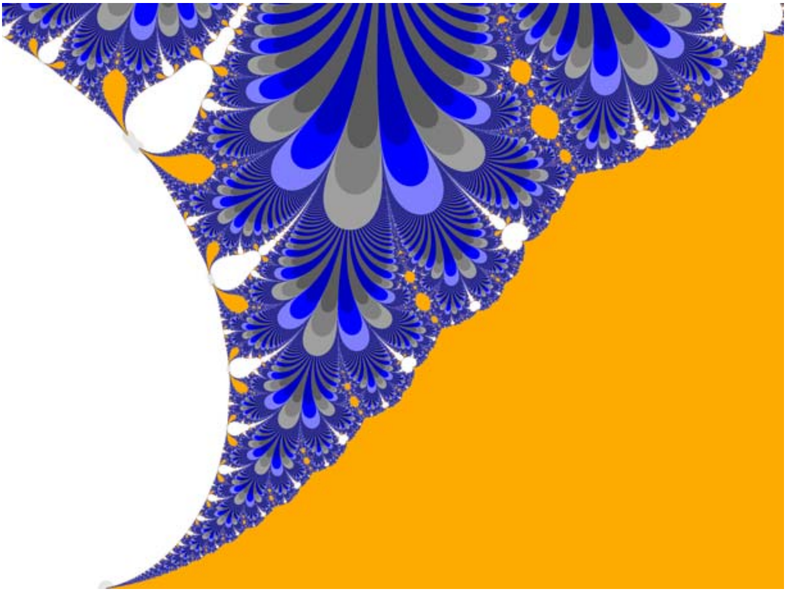
愛知教育大学ブックレット

数学/数理科学セレクト 1

コラッツの問題

浦田　敏夫

AICHI UNIVERSITY OF EDUCATION

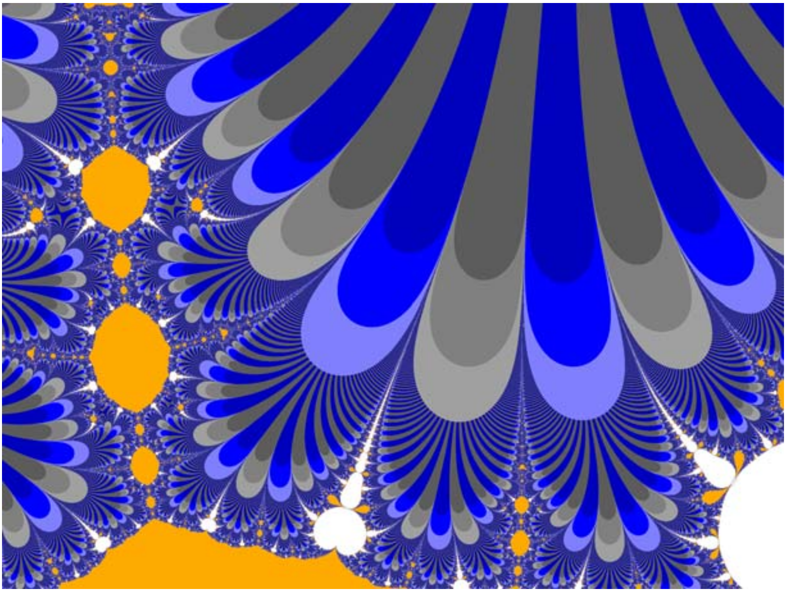


A 図

上図の範囲は複素数平面の領域

$$\left\{ z = x + iy \;\middle|\; -0.100 < x < 0.700,\ 0.000 < y < 0.600 \right\}.$$

この範囲に含まれる複素数 z で，関数 $F(z)$ を繰り返し反復した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画.（参照 **4.2 無限級数による関数で**）



B 図

上図の範囲は複素数平面の領域

$$\left\{ z = x + iy \;\middle|\; 0.700 < x < 1.500,\ 0.600 < y < 1.200 \right\}.$$

この範囲に含まれる複素数 z で，関数 $F(z)$ を繰り返し反復した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画.（参照 **4.2 無限級数による関数で**）

はじめに

高校での数学Ｉや数学Ａを学んだ読者は，確率と期待値の意味や三角比の応用を通して数学は身近な現象を理解するための言語であることを，また方程式や不等式のような問題は，関数の考えに助けられて，解決可能になっていくことを知ったことでしょう．

この冊子では，これらの知識を基盤として，整数にかかわるまだ解かれていない問題の一つ‘コラッツの問題’をめぐって，数のどんな性質が我々を魅了しているのか，どのような考察や実験を含む研究の展開があるのかを紹介します．冊子を一見して，数式を読みたくないと思われる読者は数式にとらわれずに先に進んでください．特に，まだ‘対数関数’とかになれていない読者は，その言葉に引っかからないで先に進んで下さい．この冊子の最後の第４章は，高校の数学の水準を超えていますが，読者のさらなる好奇心を刺激できればと思っていますので気楽に読んでください．

数学の本や教科書は，数学の段階を踏んで前進するように書かれ，学校での学年を追って学ばれています．一般にはそうではあっても，先に何があるかを考えるのは，一人一人の知的意欲の現れです．‘学校の生徒としての学年にとらわれない立場から見た数学’とは何かを先生に聞いてみたらどうでしょう．まだ見たこともない数学の教科書を図書室でさがしたり，出版社から数学の本を自分で探してきて読んでみて下さい．経験と知識に，得るものは多いでしょう．

コラッツの問題は自然数のたし算，ひき算，かけ算，わり算という

四則演算ができる誰にでもわかる問題です．この問題は，任意に取った一つの整数 m に一つの簡単な手続きをおこなって整数 n が得られるとき，この簡単な手続きを何度も繰り返したらどうなるだろうかと考えます．

この簡単な手続きを何回か繰り返すと

(1) どんどん大きい整数となって発散しないか，

(2) ある一定の数になってしまわないか，

(3) もとの整数 m に戻って無限に繰り返さないか

(4) またはこれ以外のことが生じるだろうか．

(5) 実験では，予想外の結果が現れるだろうか．

ある手続きを限りなく繰り返す場合に生じる現象については，整数に関わる問題であっても，数学が展開した広大な数の理論－有理数，無理数の実数や複素数の体系－はもちろん，さらに数学の力によって構想された「2-進整数」と呼ばれている数の体系も関係してきます．複素数を変数とする解析関数の反復の理論を始めとして，確率論や有限次元または無限次元の空間の幾何学に関連する分野である「力学系の理論」などの立場からの考察など，今は述べることの出来ないことがらも，いつかは読者みずからの眼でその展開を確かめてほしいと思います．

2002 年 3 月　　浦　田　敏　夫

目 次

第1章　コラッツの問題とは？

1.1　コラッツの問題

　コラッツの問題とかコラッツの予想と言われている未解決の問題があります．これまでには,「Syracuse 予想」とかこの問題に関心をもった数学者の名前から「角谷の問題」,「Hasse の手続き」,「Ulam の問題」とか呼ばれたこともあったりしたようですが，今では $3n+1$ 問題 または コラッツの問題 と呼ばれています．数学者のコラッツ（Lothar Collatz(1910-1990)）が学生の頃（1930 年代）に，この問題を通して，数学の女王と言われる分野‘数論’の問題を見出したことが出発点のようです.

　コラッツの問題というのは,
「ある自然数（正の整数のこと）に対して,
　　その数が偶数であれば 2 で割り,
　　奇数であれば 3 倍して 1 をたす.
　　得られた数に同様の操作をする.
　この操作を繰り返すと何回目かには 1 になる.」
という予想の成否を問う問題です.
コラッツの問題に現れるこの操作のことを**コラッツの操作**とか**コラッツの手続き**と言います．たとえば,
1 の場合：$1 \to 4 \to 2 \to 1$

6 の場合：$6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$
7 の場合：$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$
となります．
27 を試してみると，
$27 \to 82 \to 41 \to 124 \to 62 \to 31 \to 94 \to 47 \to 142 \to 71 \to 214 \to 107 \to 322 \to 161 \to 484 \to 242 \to 121 \to 364 \to 182 \to 91 \to 274 \to 137 \to 412 \to 206 \to 103 \to 310 \to 155 \to 466 \to 233 \to 700 \to 350 \to 175 \to 526 \to 263 \to 790 \to 395 \to 1186 \to 593 \to 1780 \to 890 \to 445 \to 1336 \to 668 \to 334 \to 167 \to 502 \to 251 \to 754 \to 377 \to 1132 \to 566 \to 283 \to 850 \to 425 \to 1276 \to 638 \to 319 \to 958 \to 479 \to 1438 \to 719 \to 2158 \to 1079 \to 3238 \to 1619 \to 4858 \to 2429 \to 7288 \to 3644 \to 1822 \to 911 \to 2734 \to 1367 \to 4102 \to 2051 \to 6154 \to 3077 \to 9232 \to 4616 \to 2308 \to 1154 \to 577 \to 1732 \to 866 \to 433 \to 1300 \to 650 \to 325 \to 976 \to 488 \to 244 \to 122 \to$ **61 → 184 → 92 → 46 → 23 → 70 → 35 → 106 → 53 → 160 → 80 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1**
となり 111 回目に，とにかくも，1 に到達します．

軌道と周期軌道

　自然数 y にコラッツの操作を繰り返したときに，次々に現れる整数達の並び

$$y \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{n-1} \to y_n \to \cdots$$

を**自然数 y の（コラッツの操作に関する）軌道**と呼びます．
　自然数 1 のたどる軌道は，$1 \to 4 \to 2 \to 1$ と 1 に戻ってきます．周期的です．こういう場合，1 は周期軌道にあると言われます．これ以外に周期軌道はあるのでしょうか．あるとすれば，決して 1，4，2，ではありえませんから，コラッツの予想は成り立たないことになりま

す．もちろん $1 \to 4 \to 2 \to 1$ 以外の周期軌道は見つかっていません．

すぐにわかるように，すべての自然数は，コラッツの操作の過程で奇数になります．そこで，操作の過程であらわれる偶数の項をとばして奇数の項についてのみ考えてみましょう．

先に試した 27 の例を参考にし，61 に到達した所から見ていくと，$61 \to 23 \to 35 \to 53 \to 5 \to 1$ となります．

正の奇数に対する手続き (**コラッツの奇数手続き**と呼ぶ）を，次のように考えます:

すべての正の奇数 x を変数とし正の奇数を値とする**関数** f を次のように定義します（‘ f ’を関数 $f(x)$ の名前と考えましょう.）：

$3x+1$ が 2^k でわりきれて 2^{k+1} ではわりきれない（k はある自然数）場合に，正の奇数

$$y = \frac{3x+1}{2^k}$$

を関数 f の値 $y = f(x)$ とします．関数 f の値 $f(x)$ とは

$$3x+1 = 2^k y$$

が成り立つような正の奇数 y のことです．

明らかに 関数 f の値は奇数にコラッツの手続きを繰り返して最初に得られる奇数です．

例えば，$x = 53$ のとき，$3x+1 = 160$．160 は $32 = 2^5$ でわりきれて，その商は 5 ですから

$$f(53) = 5$$

となります．

さて，コラッツの奇数手続きを繰り返すということを数学的に表し

ましょう：まず，関数 $f(x)$ を考えます．そして

$$
\begin{aligned}
f^2(x) &= f(f(x)) \qquad (f(f(x)) \text{ は関数値 } f(x) \text{ での関数 } f \text{ の値.}) \\
f^3(x) &= f(f(f(x))) \\
&\cdots \\
f^n(x) &= f(f^{n-1}(x)) = \overbrace{f(f(\cdots(f}^{n\text{ 回}}(x))\cdots)) \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

と帰納的に関数 $f^n(x)$, $n = 2, 3, \cdots$ を決めます.

関数 $f^n(x)$ は関数値 $f(x)$ の n 乗 $f(x)^n = \overbrace{f(x) \times f(x) \times \cdots \times f(x)}^{n\text{ 個}}$ とは違いますので，注意してください.

関数 $f^n(x)$ $(n = 2, 3, \cdots)$ は**関数 $f(x)$ の反復**と言われます，またいわゆる合成関数の例ともなっています.

自然数に対する コラッツの問題は，関数 f の反復を考えると，
任意の正の奇数 $2p + 1$ に対してある自然数 n が存在して

$$f^n(2p + 1) = 1$$

が成り立つかという問題です.

不動点

すぐにわかるのは，1 は コラッツの奇数手続きで変化しないということです, こういう数（点）を f の不動点と言います.

関数 f（コラッツの奇数手続き）の作用については次のこともすぐにわかります.

事実．　すべての正の奇数 x に対して

$$f(4x+1)=f(x)$$

が成り立っています．何故ならば，

$$3(4x+1)+1=12x+4=2^2(3x+1)\ .$$

1.2　方程式　$f(x)=y$

正の奇数 $x,\ y$ に関する方程式 $f(x)=y$ のすべての奇数解 x は次のように求められます．

奇数 $x,\ y$ と自然数 k に対して関係式 $3x+1=2^k y$ が成り立たねばならないから，

$$x=\frac{2^k y-1}{3}$$

の形をしています．

すべての自然数は $3m+1,\ 3m+2,\ 3m+3\ \ (m=0,1,2,\cdots)$ のどれかの形をしていますので，

$$y=3m+r \qquad (r=0,1,2)$$

としましょう．この場合

$$x=\frac{2^k(3m+r)-1}{3}=2^k m+\frac{2^k r-1}{3}$$

となります．

奇数 $y=3m+r$ が 3 の倍数である場合は，$r=0$ ですので方程式

は奇数解を持たないことは明らかです.
さて, $p = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，等比数列の和の公式から

$$\begin{cases} 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{p-2} + 4^{p-1} + 4^p = \dfrac{4^{p+1} - 1}{4 - 1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{2^{2p+2} - 1}{3} \quad \text{奇数} \\ 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{p-2} + 4^{p-1} + \dfrac{4^p}{3} = \dfrac{4^p - 1}{4 - 1} + \dfrac{4^p}{3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{2^{2p+1} - 1}{3} \quad \text{非整数} \end{cases}$$

ですから,

y を 3 でわった余りが 1 の場合, $r = 1$ ですので x が奇数であるためには k は偶数でなければなりません．このことから，すべての奇数解の集合は

$$\frac{4 \cdot y - 1}{3}, \ \frac{4^2 \cdot y - 1}{3}, \ \frac{4^3 \cdot y - 1}{3}, \ \cdots, \ \frac{4^n \cdot y - 1}{3}, \ \cdots.$$

同様に，y を 3 でわった余りが 2 の場合, $r = 2$ ですのですべての奇数解の集合は

$$\frac{2y - 1}{3}, \ \frac{4 \cdot 2y - 1}{3}, \ \frac{4^2 \cdot 2y - 1}{3}, \ \cdots, \ \frac{4^n \cdot 2y - 1}{3}, \ \cdots.$$

さて，すべての自然数を $3m+1$, $3m+2$, $3m+3$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ の形に表せるように，正の奇数 y は 6 でわった余りによって，$6n+1$, $6n+3$, $6n+5$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の型をしています.

これらのことを使って次の結論が得られます：

定理１．正の奇数 x, y に関する方程式 $f(x) = y$ のすべての奇数解 x は次のように求められます：

$y = 6n + 1$ のとき，すべての奇数解は

$$\frac{2^{2p+2}(6n+1)-1}{3} = 4^p(8n+1) + 4^{p-1} + \cdots + 4 + 1 \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots).$$

$y = 6n + 3$ のとき，奇数解なし.

$y = 6n + 5$ のとき，すべての奇数解は

$$\frac{2^{2p+1}(6n+5)-1}{3} = 4^p(4n+3) + 4^{p-1} + \cdots + 4 + 1 \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots).$$

1.3　コラッツの奇数手続きの周期軌道

さて, 自然数に対するコラッツの操作の下では，$1 \to 4 \to 2 \to 1$ 以外の周期軌道は見つかっていませんでした.

コラッツの奇数手続きの下ではどうでしょうか.

コラッツの奇数手続きが（真の）n **周期軌道**を持つというのは,（互いに異なる）正の奇数 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n = y_0$ に対して

$$y_n = y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{n-1} \to y_n$$

が成り立つことです．このとき n をこの周期軌道の**周期**，周期軌道に含まれる奇数を**周期点**といいます.

Computer で探索してみても現在まで正の奇数の範囲にある周期２以上の周期軌道は見つかっていませんし，コラッツの問題が肯定的であればそのような周期軌道は存在しないはずです.

コラッツの奇数手続きをすべての奇整数の範囲で考えてみたらどうなるでしょうか．コラッツの奇数手続きは明らかにすべての奇整数に対して定義することができます.

すべての奇整数に対する奇数手続き

負の奇数を含むすべての奇整数 x に対して，奇整数を値とする**関数** f を次のように定義します：

$3x+1$ が 2^k でわりきれて 2^{k+1} ではわりきれない（k はある自然数）場合に，奇数

$$y = \frac{3x+1}{2^k}$$

を関数 f の値 $y = f(x)$ とします，明らかに

$$3x + 1 = 2^k y$$

が成り立つような奇数 y が関数 f の値 $f(x)$ です.

この場合には -1 も コラッツの奇数手続きの不動点となります;

$$-1 \to (-2 \to) - 1.$$

さらに，正の奇数に対しては見つからなかった周期軌道が存在します；

２周期軌道　$$-5 \to -7 \to -5,$$

７周期軌道

$$-17 \to -25 \to -37 \to -55 \to -41 \to -61 \to -91 \to -17$$

が知られています.

これらの周期軌道以外に周期軌道があるかどうかはまだわかっていません.

では，周期軌道の存在について考えてみましょう.

奇数 y が コラッツの奇数手続きで

$$y = y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{n-1} \to y_n$$

と動く（y の軌道をたどる）としましょう．このとき，関係

$$(*) \begin{cases} 2^{p_1} y_1 = 3y_0 + 1 & (p_1 \geq 1) \\ 2^{p_2} y_2 = 3y_1 + 1 & (p_2 \geq 1) \\ \qquad\vdots & \\ 2^{p_i} y_i = 3y_{i-1} + 1 & (p_i \geq 1) \\ \qquad\vdots & \\ 2^{p_n} y_n = 3y_{n-1} + 1 & (p_n \geq 1) \end{cases}$$

が成り立っています．

この関係式 $(*)$ から，y と y_n の関係を求めると

$$\begin{aligned} (**) \quad 2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} \cdot y_n \quad = \quad & 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}} + 3 \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-2}} + \\ & \cdots + 3^i \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-i-1}} + \\ & \cdots + 3^{n-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{n-1} + 3^n \cdot y \end{aligned}$$

が成り立ちます．数学的帰納法で証明してみて下さい．

n 周期軌道の場合，$y_n = y$ ですから，つぎのことがわかります．

定理 2．　コラッツの奇数手続きが（真の）n 周期軌道を持つための必要充分条件は，方程式

$$\begin{aligned} (\star) \quad (2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n)y = 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}} + 3 \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-2}} + \\ \cdots + 3^i \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-i-1}} + \\ \cdots + 3^{n-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{n-1} \end{aligned}$$

が自明でない整数解 $y, p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, \cdots, p_n \geq 1$ を持つことです．
定理2の方程式 $(\star)$ は解 $y = 1, p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 2$ と $y = -1, p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ を持ちます．これらの解はコラッツの奇数手続きの不動点１，－１（の軌道）に対応するものです．これらの解を自明な解ということにします．

例．
(1) 負の奇数をたどる2周期軌道

$$-5 \to -7 \to -5$$

の場合に方程式 $(\star)$ を確かめて見ましょう：
$n = 2$ のとき，$p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ y = -5$ は関係式

$(\star)$
$$(2^{1+2} - 3^2)(-5) = 2^1 + 3^{2-1}$$

を満たしています．

(2) 負の奇数をたどる7周期軌道

$$-17 \to -25 \to -37 \to -55 \to -41 \to -61 \to -91 \to -17$$

の場合はどうでしょうか．
$n = 7$ のとき，
$p_1 = p_2 = p_3 = p_5 = p_6 = 1,\ p_4 = 2,\ p_7 = 4,\ y = -17$ に対して

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 11 \\ 2^{11} - 3^7 = -139 \\ 2^{1+1+1+2+1+1} + 3^1 2^{1+1+1+2+1} + 3^2 2^{1+1+1+2} \\ \qquad +3^3 2^{1+1+1} + 3^4 2^{1+1} + 3^5 2^1 + 3^6 \\ \qquad\quad = 2363. \end{cases}$$

$(-139)(-17) = 2363$
ですから，方程式 $(\star)$ が成り立っています．

1.4　コラッツの奇数手続きに正の周期軌道はない？

さて，負の奇数をたどる 2 周期軌道

$$-5 \to -7 \to -5$$

があることは，前に気がつきましたが，正の奇数をたどる（真の）2 周期軌道はあるでしょうか.

前節 **コラッツの奇数手続きの周期軌道** の定理 2 と例を見て気がつくことは，方程式

$$2^p - 3^q = \pm 1$$

が 2 以上の整数解 $p,\ q$ を持てば，定理 2 の方程式 $(\star)$ は $n = q$ に対して，方程式の右辺の正負 1 か -1 かに応じて正整数解または負の整数解を持つことです.

方程式　$2^p - 3^q = 1$　が 2 以上の整数解 $p,\ q$ を持つとしましょう.
（方程式　$2^p - 3^q = -1$　のときも同様に考えて証明できます.）
$2^p - 3^q = 1$ から $p > n = q \geq 2$ ですから，$p_1 = 2,\ p_2 = p_3 = \cdots = p_{n-1} = 1,\ p_n = p - n$ とすると，

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + \cdots + p_n = p \\ 2^p - 3^n = 1 \\ y = 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}} + 3 \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-2}} + \\ \qquad\qquad \cdots + 3^i \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-i-1}} + \\ \qquad\qquad\qquad \cdots + 3^{n-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{n-1} \end{cases}$$

に対して，方程式

$$(\star)\quad (2^{p_1+p_2+\cdots+p_n}-3^n)y = 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}} + 3\cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-2}} + \cdots + 3^i\cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-i-1}} + \cdots + 3^{n-2}\cdot 2^{p_1} + 3^{n-1}$$

が成り立つのは明らかです.

実は，方程式 $2^p-3^q=1$ には２以上の整数解 $p,\ q$ はないことが証明されています (参照 P. 51 注 1.)．また，方程式 $2^p-3^q=-1$ の２以上の整数解は $p=3,\ q=2$ に限ります (参照 P. 51 注 2.).

一般には，**カタラン（Catalan）の方程式**と呼ばれている

$$x^a-y^b=1$$

の２以上の整数解は $a=2,\ b=3,\ x=3,\ y=2$ だけか，という未解決の問題があるのです.

$n=2,3,4$ の場合には，方程式 $(\star)$ が（自明でない）正整数解を持たないことは，ちょっと計算してみると，整数の素因数分解の可能性（初等整数論の基本定理）からわかります；従って，定理２から，コラッツの奇数手続きには周期が 2，3 または 4 であるような正の周期軌道は存在しません.

注. 初等整数論の基本定理

1 より大きいどんな整数も素数の積に分解される，しかも積の順序を除けば，一意的な仕方で分解される.

問題．方程式 $(\star)$ は自明でない正整数解 $y, p_1, p_2, \cdots, p_n$ を持たないということは正しいでしょうか.

もちろん，コラッツの問題が肯定的であれば周期 2 以上の周期軌道が存在するはずがないので，方程式 $(\star)$ は自明でない正整数解を持ち得ないことになります．このことはまだ証明されていませんが，Computer を使う数値実験によれば少なくとも 2×10^{16} 以下の全ての正の奇数は コラッツの奇数手続きで 1 に到達することがわかっています（Tomas Oliveira e Silva，1999 年）．

コラッツの奇数手続きが真の正の n 周期軌道

$$y_n = y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{n-1} \to y_n$$

を持つとしましょう．ここで

$$y_n = y_0 > 1,\ y_1 > 1,\ \cdots,\ y_{n-1} > 1.$$

先に述べた関係 1.3 の $(*)$ から

$$\begin{aligned}2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} y_1 y_2 \cdots y_n &= (3y_0+1)(3y_1+1)\cdots(3y_{n-1}+1)\\ &= 3^n y_0 y_1 \cdots y_{n-1}\\ &\quad \times (1+\frac{1}{3y_0})(1+\frac{1}{3y_1})\cdots(1+\frac{1}{3y_{n-1}})\end{aligned}$$

すなわち

$$2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} y_n = 3^n y_0 (1+\frac{1}{3y_0})(1+\frac{1}{3y_1})\cdots(1+\frac{1}{3y_{n-1}})$$

が成り立っています．したがって

$$2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} = 3^n (1+\frac{1}{3y_0})(1+\frac{1}{3y_1})\cdots(1+\frac{1}{3y_{n-1}})$$

が成り立ちます．

今，正の定数 a に対して，

$$(y_n =) y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_{n-1} > a$$

としましょう．

10^{10} 以下の全ての正の奇数は コラッツの奇数手続きで１に到達することがわかっているから，$a=10^{10}$ としてもよいですね．このとき

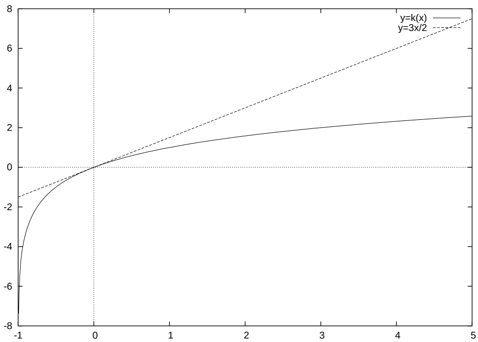
$$\begin{aligned} 3^n &< 2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} = 3^n(1+\frac{1}{3y_0})(1+\frac{1}{3y_1})\cdots(1+\frac{1}{3y_{n-1}}) \\ &< 3^n(1+\frac{1}{3a})^n \end{aligned}$$

がなりたちます.

すこし難しいかもしれませんが，高校の数学 II で扱われている対数関数の知識を使うと，コラッツの奇数手続きには周期が 12500 以下であるような正の周期軌道はありえないことが示されます.

命題１． $n \le 12500$ の場合に方程式 $(\star)$ は（自明でない）正整数解を持たない.

初めて‘ 対数関数 ’という言葉に出会った人は，以下の証明は省いて第２章に進んで下さい．すべての正の数 x で，$1+x$ の２を底とす



る対数を $k(x)$ と表すと，

$$k(x) = \log_2(1+x) < \frac{3x}{2}$$

となっています；このことは高校の数学 III の微分積分の知識の簡単な応用問題です．さて，すでに示した関係

$$3^n < 2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} < 3^n(1+\frac{1}{3a})^n$$

の 2 を底とする対数を取り，$\log_2(1+x) < \dfrac{3x}{2} \quad (x>0)$ を使うと

$$\log_2 3 < \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n} < \log_2 3 + \frac{1}{2a}$$

が成り立っていることがわかります．

$$\log_2 3 = 1.5849625007\cdots$$

で $a \geq 3$ ですから，

$$1.5 < \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n} < 2.0\ .$$

実は $a = 10^{10}$ としているので，

$$\log_2 3 = 1.5849625007\cdots > 1.584962500 = \frac{126797}{8\times 10^4}$$

より

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n} - \log_2 3 \\
&< \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n} - \frac{126797}{8\times 10^4} \\
&= \frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)\times 8\times 10^4 - 126797\times n}{8\times 10^4\times n} \\
&< \left(\frac{\log 3}{\log 2} + \frac{1}{2\times 10^{10}}\right) - \frac{126797}{8\times 10^4} \\
&= \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{126797}{8\times 10^4} + \frac{1}{2\times 10^{10}} \\
&< 8\times 10^{-10} + 0.5\times 10^{-10} \quad < \quad 10^{-9}.
\end{aligned}$$

有理数

$$\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)\times 8\times 10^4-126797\times n}{8\times 10^4\times n}>0$$

の分子，分母は正整数ですから

$$\frac{1}{8\times 10^4\times n}\leq\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)\times 8\times 10^4-126797\times n}{8\times 10^4\times n}<10^{-9}$$

が成り立ちます.

こうして，　$n>10^9/(8\times 10^4)=12500$ でなければならないことが証明されました.

もし，読者が初歩の微分積分を使えるのであれば,
$1+x$ の自然対数の底 $e=2.718\cdots$ を底とする対数関数 $\log(1+x)$ は,
すべての正の数 x に対して

$$\log(1+x)<x$$

を満たしていることが証明できます．さらに,

$$3\log 2=3\times 0.693\cdots=2.079\cdots>2$$

に注意すると，すべての正の数 x に対して

$$\log_2(1+x)<\frac{3x}{2}$$

も証明できるはずです.

第2章　パソコン上での探求

2.1　大きい整数の計算

最近では，2×10^{16} 以下の奇数（整数）については，コラッツの予想が成り立っていることが計算機によって確かめられています．
どんな整数に対して，コラッツの予想が成り立っているかは，インターネット上の HP(ホームページ)

http://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html

などに公開されています．

大きい数の計算は苦手ですよね．例えば $10\,! = 3628800$ の程度の大きさの整数計算でもやりたいとは思わないでしょう．
159487 は コラッツの手続き 183 回目に 1 に到達しますが，途中 60 回目に 5097000814 と約 50 億にもなります．
パソコンは文句も言わずに計算してくれますが，計算ソフトがあればです．どんなソフトを使ったら大きい整数に対して正確な計算ができるでしょうか．すごく大きな整数の四則演算を正しくを計算させるためには，それなりの機能を持つ計算ソフトを用意しなければだめです．
プログラミング言語 BASIC や C++を使うこともできるだろうし，Mathematica や Maple のような数学ソフトを使うことも考えられます．

自由に使用可能ないわゆるフリーソフトもあります.

例えば, Windows パソコン上での BASIC 言語として ActiveBasic.com でら公開されている' ActiveBasic ver.4 'では, 高等学校の数学の教科書等で使われている BASIC がプログラミング言語として使えます. インターネット上で公開されています.

また, 白石和夫氏が教育研究を目的として作成された' 十進BASIC 'は, プログラミング言語 JIS Full BASIC を Windows パソコン上で使用可能にしているもので, インターネット上で公開されています. 1000 桁以下の 10 進数を計算する 10 進 1000 桁モード, 複素数モード, 有理数モードなどの機能もあって楽しめます.

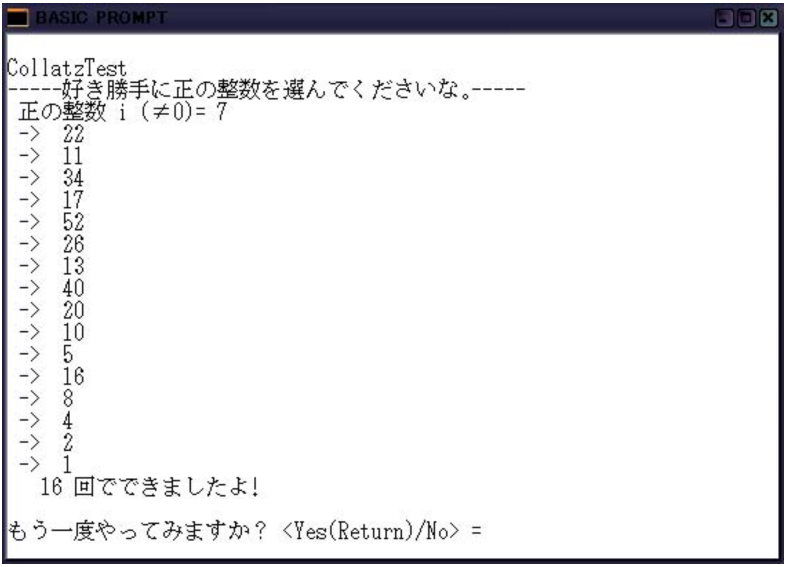
* Full BASIC は, 国際標準化機構 (ISO) が定める BASIC 言語の規格.

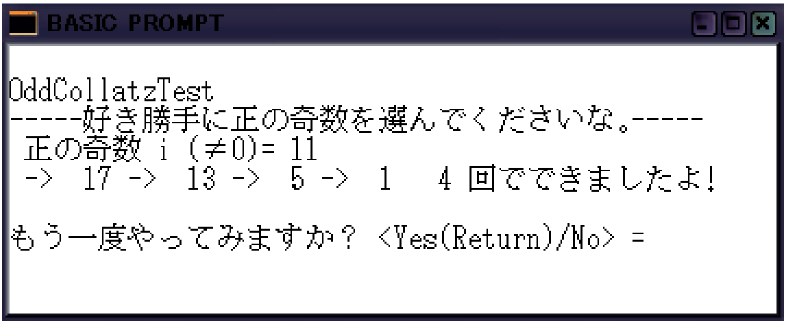
コラッツの手続きを実験する BASIC プログラムの例

[CollatzTest.BAS]

```
# prompt

DIM STARTF
DIM i, k, c
DIM S$

   STARTF=1
DO
          PRINT"CollatzTest"
          PRINT"——好き勝手に正の整数を選んでくださいな——"
          INPUT" 正の整数 i (≠ 0)= ", i

          k=0   ' Collatz の手続きの回数
          c=i   ' 好き勝手に取った正の整数

          WHILE c >1
                   IF c MOD 2 = 0 THEN
                            c=c/2
                   ELSE
                            c=3*c+1
                   END IF

                   PRINT" → ";c
                   k=k+1
          WEND

          PRINT" ";k;"回でできましたよ!"
          PRINT

INPUT"もう一度？ <Yes(Return)/No>= ",S$
IF (S$ <>"" AND S$ <>"Y" AND S$ <>"y") THEN
                                                              STARTF=0
LOOP WHILE STARTF=1
END
```

上のプログラムの実行は例えば，入力 7 が 1 に到達するまでの軌道を出力します．(次頁 参照)


BASIC PROMPT
CollatzTest
-----好き勝手に正の整数を選んでくださいな。-----
正の整数 i (≠0)= 7
-> 22
-> 11
-> 34
-> 17
-> 52
-> 26
-> 13
-> 40
-> 20
-> 10
-> 5
-> 16
-> 8
-> 4
-> 2
-> 1
16 回でできましたよ!
もう一度やってみますか? <Yes(Return)/No> =


BASIC PROMPT
OddCollatzTest
-----好き勝手に正の奇数を選んでくださいな。-----
正の奇数 i (≠0)= 11
-> 17 -> 13 -> 5 -> 1 4 回でできましたよ!
もう一度やってみますか? <Yes(Return)/No> =

下のプログラムの実行は例えば，入力 11 が 1 に到達するまでの軌道を出力します．(前頁 参照）

コラッツの奇数手続きを実験する BASIC プログラムの例

[OddCollatzTest.BAS]

```
# prompt

DIM STARTF
DIM i, k, c, r
DIM S$

   STARTF=1
DO
          PRINT"OddCollatzTest"
          PRINT"——好き勝手に正の奇数を選んでくださいな——"
          INPUT" 正の奇数 i (≠ 0)= ",i

          k=0   ' Collatz の奇数手続きの回数
          c=i    ' 好き勝手に取った正の奇数

          WHILE c>1
                    c=3*c+1
                    r=c Mod 2

                    WHILE r=0
                              c=c/2
                              r=c Mod 2
                    WEND

                    PRINT" → ";c;
                    k=k+1
          WEND

          PRINT" ";k;"回でできましたよ!"
          PRINT

INPUT"もう一度？ <Yes(Return)/No>= ",S$
IF (S$ <>"" AND S$ <>"Y" AND S$ <>"y") THEN
                                                                      STARTF=0
LOOP WHILE STARTF=1
END
```

2.2　コラッツの操作の回数についての予想

今までは，コラッツの手続きを代数的にみてきました．では，統計的にわかる事が何かないでしょうか．

まず，コラッツの操作について調べてみましょう．

1 からある整数 n までの整数に コラッツの操作を実行しその回数をすべてたし（総回数），その数を 1 から n までの項の数 n で割り（平均回数），得られる数について調べます．

すなわち，ある整数 k が 1 に到達する コラッツの操作の最小回数を j_k として，平均回数

$$b_n = \frac{j_1 + j_2 + \cdots + j_n}{n} \quad \left(= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} j_k \right)$$

を調べましょう．

パソコンで実験・計算してみると，平均回数は

$$b_n \quad 10.41373 \times \log n - 12.56$$

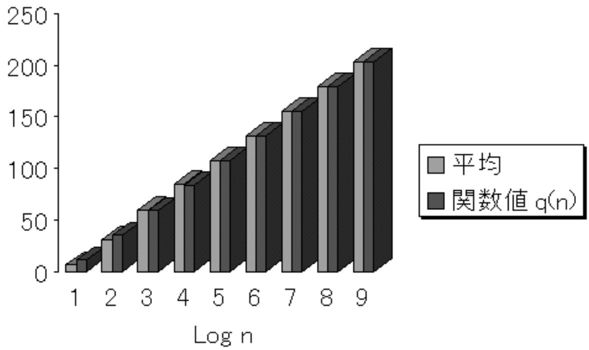
と予想できそうであることに気づきました（表１）．今，

$$q(n) = 10.41373 \times \log n - 12.56$$

表　1．

整数 n	総回数 $\sum_{k=1}^{n} j_k$	平均 b_n	関数値 $q(n)$
10	67	6.7	11.418
100	3142	31.42	35.396
1000	59542	59.542	59.375
10000	849666	84.9666	83.353
100000	10753840	107.53840	107.332
1000000	131434424	131.43442	131.310
10000000	1552724831	155.27248	155.289
100000000	17923493583	179.23493	179.267
1000000000	203234783374	203.23478	203.246

と置きましょう.



普通，何らかの大きい整数を処理するための特別なソフトウエアを用意しない限り，パソコン上では約 40 億より大きい整数の計算はできません.

例えば，前にも述べた整数 159487 は コラッツの奇数手続き 64 回目に 1 に到達しますが，29 回目に 2548500407, 30 回目に 3822750611,

31 回目に 5734125917 となり，パソコン上で簡単に扱うことができる整数の範囲約 40 億より大きくなります.

コラッツの奇数手続きを繰り返したときに現れる大きい整数の計算を行うためには，いわゆる整数の多倍長計算という方法が行われます.

多倍長計算 大きい整数の計算を十進法で行うことの代わりに，10^8 進法で計算を行うというような考え方の計算法.

そんなわけで，前の実験と次の実験では，C++言語での多倍長整数計算法を使っていますが，1000 桁（十進位取り記数法）以下の整数計算を行うことができる‘ 十進 BASIC の 10 進 1000 桁モード ’を試してみることもできます.

次に，コラッツの奇数手続きについて，平均回数を調べてみます. 1 からある整数 n までの奇数について平均回数をパソコンで実験・計算してみました．ある奇数 k が操作によって 1 に到達する最小回数を i_k，平均回数

$$a_n = \frac{i_1 + i_3 + \cdots + i_{2n-1}}{n} \qquad \left(= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} i_{2k-1} \right)$$

を調べます．その結果,

$$a_n \quad 2.406 \times \frac{\log n}{\log 2} - 2$$

となりました（表 2）．今,

$$p(n) = 2.406 \times \frac{\log n}{\log 2} - 2$$

と置きます（このとき， $q(n) \quad 3p(n) - 6.56$ ）.

整数 n	総回数 $\sum_{k=1}^{n} i_{2k-1}$	平均 a_n	関数値 $p(n)$
10	14	2.8	5.992
100	679	13.58	13.985
1000	11037	22.074	21.977
10000	153336	30.6672	29.970
100000	1899202	37.98404	37.962
1000000	22996390	45.99278	45.955
10000000	269686304	53.93726	53.947
100000000	3096869298	61.93738	61.940
1000000000	34969255812	69.93851	69.933

表　2.

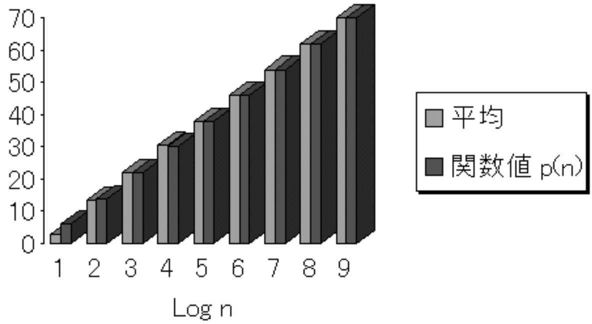


表１，表２のようなデータが得られましたが，これらから何が知られるでしょうか.

n $(\geq 10^9)$ が大きいときにも平均回数

$$b_n \quad q(n) = 10.41373 \times \log n - 12.56$$
$$= 7.21824 \times \frac{\log n}{\log 2} - 12.56$$

が成り立つのか，また平均回数

$$a_n \quad p(n) = 2.406 \times \frac{\log n}{\log 2} - 2$$

が成立するものかどうかも，疑問に思っています.

さらには,

$$3a_n - b_n \quad 6.56 \quad (10^5 \leq n \leq 10^9)$$

であることが見つかりましたが，n が大きいときにもこの関係が成り立つかどうか，興味深い問題だと思っています.

【寄り道】

最近，誰にでも意味がわかりやすい有名な数学の問題が新聞紙上などで話題になりました．

フェルマー（Pierre de Fermat, 1601-1665）の最終定理

フェルマーの方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

は整数 $n \geq 3$ のとき，0 でない整数解 x, y, z を持たない．

1994 年，この予想はワイルズ（Andrew Wiles） によって証明されました．整数 $n = 2$ のときは，この方程式はピタゴラスの直角三角形の三辺となる自然数を求める問題であって，無限に多くの解のすべての求め方が知られていますから，フェルマーの方程式に 0 でない解がないというのは不思議なことですね．

【 自然数が関係している有名な未解決の問題 】

ゴールドバッハ（Christian Goldbach, 1690-1764）の予想

2 より大きいどんな偶数も 2 個の素数の和となっている．
この予想を 1742 年にオイラー（L. Euler, 1707-1783）に手紙で知らせました．
※　1 は素数としない．
現在，コンピュータ上での計算手続きの工夫の結果，4×10^{14} 以下の自然数に対しては，予想が成り立つことが確かめられています（J. Richstein 1999 年）．

エルデス-シュトラウス (Erdös-Strauss) の予想

2 以上のどんな自然数 n に対しても，

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

を満たす自然数 a，b，c が必ず存在する．
現在，$n \leq 10^8$ のときは，この予想が成り立つことが認められています．
つぎのことは簡単にわかります：　自然数 p に対して

$$\begin{aligned} \frac{4}{3p} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{1+3p} + \frac{1}{3p(1+3p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{4p} + \frac{1}{12p} \\ \frac{4}{2+3p} &= \frac{1}{2+3p} + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)(2+3p)}\,. \end{aligned}$$

第3章　コラッツの奇数手続きの奇数型の有理数への拡張

3.1　コラッツの奇数手続きの奇数型の有理数への拡張

さて，奇整数に対するコラッツの奇数手続き（を表す関数）f をより広い有理数の集合に定義することを考えましょう.

数学では，すべての自然数の集合を $\boldsymbol{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$，すべての整数の集合を $\boldsymbol{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}$ と表すの普通です．さらに，この冊子では，すべての奇整数の集合を $O\boldsymbol{Z} = \{\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \cdots\}$ と表すことにします.

有理数 x の 2-指数

0 でない任意の有理数 x は $2^k \dfrac{a}{b}$ $(k \in \boldsymbol{Z}, a, b \in O\boldsymbol{Z})$ の形に表せる，この場合，整数 k は一意的に決まります．この整数 k を有理数 x の 2-指数といい, $e(x)$ で表します.

非負の 2 -指数を持つすべての有理数の集合を

$GQ = \{ \ 2^k \dfrac{2m+1}{2n+1} \ \mid \ m, n \in \boldsymbol{Z}, \ k = 0, 1, 2, \cdots \}$
とします.
特に，2-指数 0 の有理数を**奇数型の有理数**と言うことにし，
$OQ = \{ \ \dfrac{2m+1}{2n+1} \ \mid \ m, n \in \boldsymbol{Z} \ \}$
とします.

非負の 2 -指数を持つ， $-\dfrac{1}{3}$ と異なる，すべての有理数の集合を記号 $G\boldsymbol{Q}^*$ で表し，
$-\dfrac{1}{3}$ と異なる，すべての奇数型の有理数の集合を記号 $O\boldsymbol{Q}^*$ で表すことにします.

非負の 2 -指数を持つ， $-\dfrac{1}{3}$ と異なる，有理数 x に対して奇数型の有理数 $y(\in O\boldsymbol{Q}$）を対応させる**関数** f を次のように定義します：
正の 2 -指数 k を持つ有理数 $x = 2^k y$ $(\in G\boldsymbol{Q}, \ y \in O\boldsymbol{Q})$ に対しては,

$$f(x) = y.$$

奇数型の有理数 x $(\in O\boldsymbol{Q}^*)$ に対しては,
ある自然数 $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$3x + 1 = 2^k y \quad (y \in O\boldsymbol{Q})$$

が成り立つときに,

$$f(x) = y.$$

（数学では，関数の定義域と値域が明確になるように,‘ 関数 $f(x)$ が集合 $G\boldsymbol{Q}^*$ の要素を動く x を変数とし，集合 $O\boldsymbol{Q}$ の要素を対応する値 $f(x)$ としている ’ことを $f : G\boldsymbol{Q}^* \ \rightarrow \ O\boldsymbol{Q}$ と表わすことがあります.）

関数 $f(x)$ を具体的に書き表せば,

正の 2-指数 k を持つ有理数 $x = \dfrac{2^k r}{s}$ $(r,\ s \in O\boldsymbol{Z})$ に対しては，明らかに

$$f(x) \ = \ \frac{r}{s} \qquad (\in O\boldsymbol{Q}).$$

奇数型の有理数 $x = \dfrac{r}{s} \in O\boldsymbol{Q}^*$ に対しては，
偶整数 $3r+s$ の 2-指数 k とある奇整数 t によって

$$3r + s = 2^k t$$

が成り立つので

$$3 \cdot x \ + 1 = 3 \cdot \frac{r}{s} + 1 = \frac{3r+s}{s} = \frac{2^k \cdot t}{s}$$

より，

$$f(x) \ = \ \frac{3x+1}{2^k} = \ \frac{t}{s} \qquad (\in O\boldsymbol{Q}).$$

例. $\quad \dfrac{3}{5} \to f(\dfrac{3}{5}) = \dfrac{7}{5} \to f(\dfrac{7}{5}) = \dfrac{13}{5} \to \cdots$

さて，関数 f はその定義域を $G\boldsymbol{Q}^*$ まで広げられましたが，奇数型の有理数の集合 $O\boldsymbol{Q}^*$ を定義域として $f: O\boldsymbol{Q}^* \ \to \ O\boldsymbol{Q}$ と考えるのがより適切です.

$f(x)$ を不変にする OQ 上の変換 $a(x)$
関数 $f: O\boldsymbol{Q}^* \ \to \ O\boldsymbol{Q}$ は $O\boldsymbol{Q}$ 上の関数

$$a(x) = 2x + \frac{1}{3} = \frac{6x+1}{3} \quad (x \in O\boldsymbol{Q})$$

に関して不変です，すなわち

$$f(a(x)) = f(x) \quad (x \in O\boldsymbol{Q}^*)$$

が成り立ちます．また $a(a(x)) = 4x + 1 \quad (x \in O\boldsymbol{Q})$ ですから

$$f(4x+1) = f(x) \quad (x \in O\boldsymbol{Q}^*)$$

も成り立ちます.

コラッツの予想の一般化

〈 奇数型の任意の正の有理数は手続き f の有限回の繰り返しで必ず周期軌道に到達する.〉

奇数型有理数における 方程式 $f(x) = y$ の解

定理３．　奇数型の有理数 $x,\ y$ に関する方程式 $f(x) = y$ は必ず無限に多くの解 x を持つ．そのすべての解 x は

$$\frac{2^k y - 1}{3} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

である.

例．　$f : O\boldsymbol{Q}^* \quad \to \quad O\boldsymbol{Q}$ （関数 f の定義域を $O\boldsymbol{Q}^*$ とした関数）のすべての不動点の集合は

$$\left\{ \frac{1}{2^k - 3} \;\middle|\; k = 1, 2, 3, \cdots \right\}$$

である．f の不動点とは，方程式 $f(x) = x$ の解のことです.

3.2　周期軌道と 2-指数列

すべての番号 k について,

$$x = x_0,\ \cdots,\ x_k = f^k(x) \in O\boldsymbol{Q}^*,\ \cdots$$

となっているとします.

このとき，数列

$$\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$$

を x **の** f **軌道**といい，$\{x_k\}$ や $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ と表します.

さらに，2指数 $p_k \equiv e(3x_{k-1}+1)$，すなわち

$$3x_{k-1}+1 = 2^{p_k} x_k$$

を満たす自然数 p_k, によって与えられる自然数列

$$\{p_1, p_2, p_4, \cdots\}$$

を x **の** f **軌道の 2-指数列**といい，$\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ と表すことにします.

f 軌道 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ が n **周期的である**とは，
$x_0 = x_n$ （すなわち $x_1 = x_{n+1}$） が成り立つことです.

さて，

$$2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}} + 3 \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-2}} + \cdots$$
$$+ 3^i \cdot 2^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-i-1}} + \cdots + 3^{n-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{n-1}$$

を $C(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1})$ と表すことにします.

1.3 コラッツの奇数手続きの周期軌道 $(**)$ の説明と同様に考えて，
次の命題 2 が証明されます.

命題 2.　$x = x_0$, $x_k = f^k(x) \in O\boldsymbol{Q}^*$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ とする.
x の f 軌道の 2-指数列 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して，
すべての番号 n で

$$2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} x_n = C(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}) + 3^n x$$

が成立する.

定理 2 の証明と同様に考えて, 次の命題 3 が証明されます.

命題 3． $x = x_0,\ x_k = f^k(x) \in O\boldsymbol{Q}^*\ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．
x の f 軌道の 2-指数列 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して,
f 軌道 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ が n 周期的であるための必要十分条件は,

$$(2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n)x = C(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1})$$

が成り立つことである．このとき,

$$x = \frac{C(p_1, p_2, \cdots, p_{n-1})}{2^{p_1+p_2+\cdots+p_n} - 3^n} \ \in \ O\boldsymbol{Q}^*$$

である.

ここでは, 説明を略しますが, 次の命題 4 は f 軌道の 2-指数列は f 軌道を決定するものであることを示しています.

命題 4． $x = x_0,\ x_k = f^k(x),\ y = y_0,\ y_k = f^k(y) \in O\boldsymbol{Q}^*\ \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．
x と y の f 軌道の 2-指数列が 同一ならば, x と y は同一である.
すなわち,
すべての番号 k に対して $e(3x_{k-1} + 1) = e(3y_{k-1} + 1)$ ならば

$$x = y\ .$$

命題 5．　$x = x_0,\ x_k = f^k(x) \in O\boldsymbol{Q}^*$　$(k = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．
f 軌道 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ が n 周期的であるための必要十分条件は,
x の f 軌道の 2-指数列 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ が n 周期的，すなわち，
すべての $t \in \boldsymbol{N}$ と $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$p_{tn+k} = p_k$$

が成立することである．
このとき，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ を周期成分と言います.

例.

(1)　$f : O\boldsymbol{Q}^* \quad \to \quad O\boldsymbol{Q}$ の不動点

$$\frac{1}{2^p - 3} \quad (p = 1, 2, 3, \cdots)$$

の (f 軌道の) 2-指数列は定数列 $\{p_k = p\}_1^{\infty}$ です.

(2)　命題 3 から，f 軌道の 2-指数列の周期成分を $\{p,\ q\}$ とする 2 周期点は

$$\frac{2^p + 3}{2^{p+q} - 9} \quad (p, q = 1, 2, 3, \cdots)$$

です.
-7 の f 軌道の 2-指数列の周期成分は $\{2,\ 1\}$ です．この場合,

$$\frac{2^2 + 3}{2^{2+1} - 9} = \frac{7}{-1} = -7$$

$\dfrac{5}{7}$ の f 軌道の 2-指数列の周期成分は $\{1,\ 3\}$ です．この場合,

$$\frac{2^1 + 3}{2^{1+3} - 9} = \frac{5}{7}$$

3.3　不動点と二進符号

すべての自然数は二進位取り記数法で有限二進数として表されます．その原理は，N を1より大きい自然数とすると，必ずある番号 n を

$$2^n \leq N < 2^{n+1}$$

となるように取れるということです；このとき

$$\begin{cases} N = 2^n + M \\ 0 \leq M < 2^n \end{cases}$$

が成り立ちますから, この手続きを自然数 M について繰り返し考えることで, N の有限二進数としての表示

$$N = \Sigma_{k=0}^{n} a_k 2^k \qquad (\ a_k \text{は} 0 \text{または} 1\ )$$

が得られます.

二進位取り記数法の手続きに，負符号' −' と小数点の考えを付け加えると，すべての実数（有理数と無理数）を表すことができるというのは常識ですね.
ところが，現代数学においては，自然数の二進数表示の拡張になっている**2-進整数表示**と**2-進整数**という考えが方が知られています．二進位取り記数法で実数を表すのと似ていますが異なる考えです．すべての非負の2-指数を持つ有理数は2-進整数ですが，2-進整数のなかには有理数でさえないどころか実数ではないものが含まれています.
2-進整数の世界は，通常の整数，有理数と無理数からなる実数，さらに広い複素数の世界とは異なる数の世界です.

非負の2-指数を持つ有理数 $r = 2^k \dfrac{a}{b} \quad (0 \leq k \in \boldsymbol{Z},\ a, b \in O\boldsymbol{Z})$

の 2-進整数表示と呼ばれている表現法は次のようなものです：

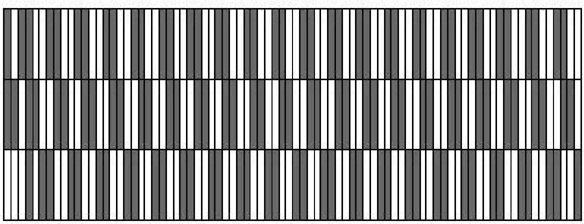
$$r = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k 2^k \qquad (\ a_k \text{は } 0 \text{ または } 1\ ).$$

例.

$$\begin{aligned}
-1 &= \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^k \\
0 &= 1 + (-1) = 1 + \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^k \\
-2 &= \Sigma_{k=1}^{\infty} 2^k && ,\ 2 = 2^1 \\
-3 &= 1 + \Sigma_{k=2}^{\infty} 2^k && ,\ 3 = 1 + 2 \\
-4 &= \Sigma_{k=2}^{\infty} 2^k && ,\ 4 = 2^2 \\
-5 &= 1 + 2 + \Sigma_{k=3}^{\infty} 2^k && ,\ 5 = 1 + 2^2 \\
&\ \cdots \\
2^p - 1 &= \Sigma_{k=0}^{p-1} 2^k \\
-2^p &= \Sigma_{k=p}^{\infty} 2^k \\
&\ \cdots \\
-\frac{1}{3} &= \frac{1}{1-2^2} = \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{2k} \\
\frac{2}{3} &= 2 + \Sigma_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \\
\frac{1}{3} &= 1 + \Sigma_{k=1}^{\infty} 2^{2k-1} \\
-\frac{2}{3} &= \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{2k+1} \\
-\frac{1}{5} &= \frac{3}{1-2^4} = (1+2)\Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{4k} = \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{4k} + \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{4k+1} \\
\frac{1}{5} &= 1 - \frac{4}{5} = 1 + \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{4k+2} + \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{4k+3} \\
&= 1 + 2^2 + 2^3 + 2^6 + 2^7 + 2^{10} + 2^{11} + \cdots \\
&\ \cdots \\
-\frac{1}{2^p - 1} &= \frac{1}{1-2^p} = \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{pk}
\end{aligned}$$

$$= \quad 1 + 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} + 2^{4p} + \cdots$$

f の不動点 $x = \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2^p - 3}$,　 $p = 3$



上図は 2 -進符号列を 3 段に重ねて表示しています.
上段に $x = \dfrac{1}{5}$ の 2 -進符号を 1, 0 をそれぞれ黒, 白のコードで表現,
中段に $2x + 1$ の 2 -進符号を 1, 0 をそれぞれ黒, 白のコードで表現,
下段に $3x + 1$ の 2 -進符号を 1, 0 をそれぞれ黒, 白のコードで表現しています.

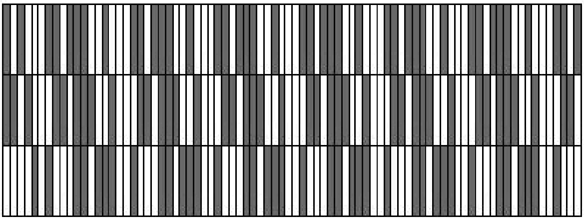
中段 $2x + 1$ の 2 -進符号は上段 x の 2 -進符号を 1 コード右移動した後, 1 を加えてできています.

下段 $3x + 1$ の 2 -進符号は上段 x の 2 -進符号と中段 $2x + 1$ の 2 -進符号を加えて計算されていますが, 上段 x の 2 -進符号を 3 コードだけ右移動したものになっています.

これが有理数 $x = \dfrac{1}{5}$ がコラッツの奇数手続き f の不動点であるという事実の特徴です.

$$\begin{aligned}\frac{1}{13} &= 1 + 2^2 + (2^6 + 2^7 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{14})\Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{12k} \\ &= 1 + 2^2 + 2^6 + 2^7 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{14} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{21} \\ &\quad + 2^{22} + 2^{23} + 2^{26} + \cdots\end{aligned}$$

f の不動点　$x = \dfrac{1}{13} = \dfrac{1}{2^p - 3}$,　　$p = 4$

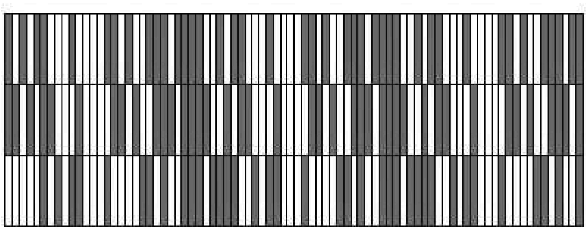


上図は, 上段に $x = \dfrac{1}{13}$ の 2-進符号を, 中段に $2x+1$ の 2-進符号を, 下段に $3x+1$ の 2-進符号を 1, 0 をそれぞれ黒, 白のコードで表現しています.

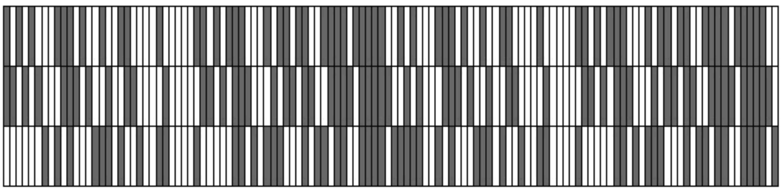
下段 $3x+1$ の 2-進符号は上段 x の 2-進符号と中段 $2x+1$ の 2-進符号から同様に計算されますが, 当然上段 x の 2-進符号を 4 コードだけ右移動したものになっています.

コラッツの奇数手続き f の不動点である有理数 $x = \dfrac{1}{2^5 - 3} = \dfrac{1}{29}$，$x = \dfrac{1}{2^6 - 3} = \dfrac{1}{61}$ に対しても，同じような 2-進符号の右移動が現れます（次頁図）.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{29} &= 1 + (2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^9 + 2^{14} + 2^{15} + 2^{17} + 2^{20} + 2^{21} + 2^{22} \\
&\quad + 2^{24} + 2^{25} + 2^{26} + 2^{27})\Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{28k} \\
&= 1 + 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^9 + 2^{14} + 2^{15} + 2^{17} + 2^{20} + 2^{21} + 2^{22} \\
&\quad + 2^{24} + 2^{25} + 2^{26} + 2^{27} + 2^{30} + 2^{32} + 2^{33} + 2^{37} + 2^{42} + 2^{43} \\
&\quad + 2^{45} + 2^{48} + 2^{49} + 2^{50} + 2^{52} + 2^{53} + 2^{54} + 2^{55} + \cdots
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\frac{1}{61} &= 1 + (2^2 + 2^4 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{15} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{24} \\
&\quad + 2^{30} + 2^{31} + 2^{33} + 2^{35} + 2^{36} + 2^{37} + 2^{41} + 2^{43} + 2^{44} + 2^{46} \\
&\quad + 2^{47} + 2^{50} + 2^{51} + 2^{52} + 2^{53} + 2^{55} + 2^{56} + 2^{57} + 2^{58} + 2^{59}) \Sigma_{k=0}^{\infty} 2^{60k} \\
&= 1 + 2^2 + 2^4 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{15} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{24} \\
&\quad + 2^{30} + 2^{31} + 2^{33} + 2^{35} + 2^{36} + 2^{37} + 2^{41} + 2^{43} + 2^{44} + 2^{46} \\
&\quad + 2^{47} + 2^{50} + 2^{51} + 2^{52} + 2^{53} + 2^{55} + 2^{56} + 2^{57} + 2^{58} + 2^{59} \\
&\quad + 2^{62} + 2^{64} + \cdots
\end{aligned}
$$

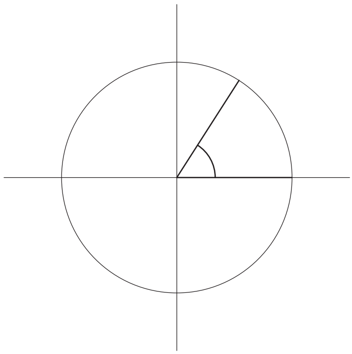


コラッツの奇数手続きの結果が，その 2-進符号の右移動でしかないような 2-進符号列（2-進整数）は特別な有理数に限るというのは，ちょっと不思議な感じがしませんか.

第4章　コラッツの手続きと関数

4.1　三角関数で

この章では, コラッツの問題を微分積分学の光のもとで，見ていきたいと思います．証明は述べませんので，気楽に読み進んでください．三角関数を考えるときに，はじめに気をつけることは角の単位は何かということです．普通は直角の $\frac{1}{90}$ を単位１°とする‘度’を使っていますが，数学の世界では，円周上で，半径と角に対応する円弧の長さの比を使うのが普通です−すなわち，半径に等しい長さの円弧に対応する中心角を１ラジアンとします.‘ラジアン=radian’という用語は’半径=radius’にもとづいて１９世紀に造られたものです.‘半径との比較による角’というような意味を感じませんか.



ラジアンを使う理由は，この方法（弧度法）によると，角の単位には

‘ 直角 ’というような特別な概念が現れないからです．角の大きさが長さの比の値

$$\frac{\text{角を見こむ円弧の長さ}}{\text{円の半径}}$$

として表されていることは角の大きさが次元なしの数として表されているということを意味しています.

t 度＝ x ラジアン の関係は

$$\frac{t}{180} = \frac{x}{\pi}$$

という関係です．ですから，角 $180 \times x$ 度＝ πx ラジアン で

$$\begin{cases} \cos(180 \times x)\ ^\circ = \cos \pi x \\ \cos(90 \times x)\ ^\circ = \cos \dfrac{\pi x}{2} \\ \sin(90 \times x)\ ^\circ = \sin \dfrac{\pi x}{2} \end{cases}$$

となります.

さて，次のような実数 x を変数とする関数を考えましょう:

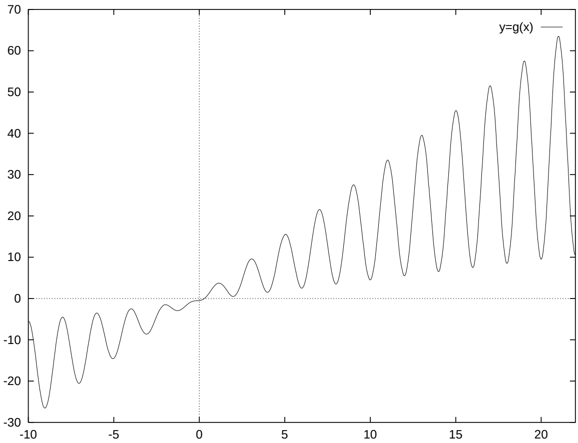
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{2}\cos^2\frac{\pi x}{2} + (3x+1)\sin^2\frac{\pi x}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{7x}{4} - \frac{5x+2}{4}\cos \pi x. \end{aligned}$$

関数 $g(x)$ の定義式から，x が偶数ならば 2 でわった $\dfrac{x}{2}$，x が奇数ならば 3 倍して 1 たした $3x+1$ が $g(x)$ の値となって，関数 $g(x)$ がコラッツの手続きを表現していることがわかります．さらに

$$g(n) = \frac{1}{4}\Big\{7n+2-(-1)^n(5n+2)\Big\} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つことも容易にわかるでしょう.

関数 $g(x)$ の 区間 $-10 < x < 22$ でのグラフは次図.



（合成関数としての）反復

$$
\begin{aligned}
g^2(x) &= g(g(x)) \\
g^3(x) &= g(g(g(x))) \\
&\cdots \\
g^n(x) &= g(g^{n-1}(x)) = g(g(\cdots(g(x))\cdots)) \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

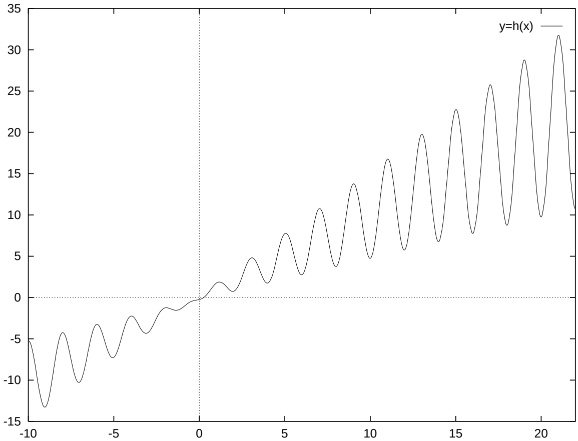
を考えると変数 x の変動が小さくても，関数 $g^n(x)$ の挙動の変化はきわめて大きく複雑になりそうです．実際そうです.

$g(x)$ の変形として, 関数 $h(x)$

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x}{2}\cos^2\frac{\pi x}{2} + \frac{3x+1}{2}\sin^2\frac{\pi x}{2} \\
&= \frac{1}{4} + x - \frac{2x+1}{4}\cos\pi x.
\end{aligned}
$$

があります．関数 $h(x)$ の定義式は，x が偶数ならば 2 でわった数 $\dfrac{x}{2}$，整数 x が奇数ならば 3 倍して 1 をたして 2 でわった数 $\dfrac{3x+1}{2}$ を表します．関数 $h(x)$ はコラッツの奇数手続きを表現していしているものではありません．

関数 $h(x)$ の 区間 $-10 < x < 22$ でのグラフは次図．



4.2　無限級数による関数 F

コラッツの奇数手続きを表現している関数はないでしょうか．そのような関数として，

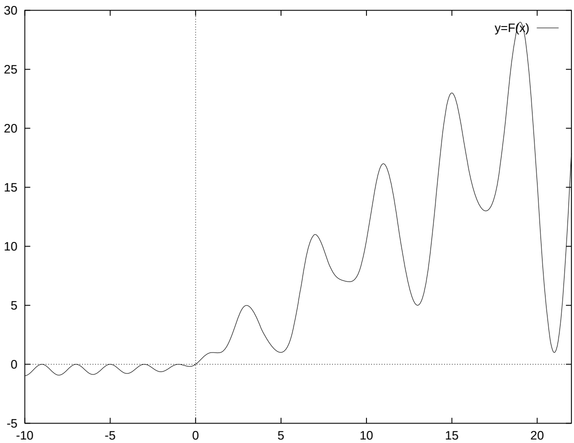
$$F(x) = \frac{4}{\pi^2}\cos^2\frac{\pi x}{2}\sum_{k=0}^{\infty} f(2k+1)\left(\frac{1}{(x-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right)$$

があります．

この無限級数の和として表されている関数 $F(x)$ は,
有限和

$$\frac{4}{\pi^2}\cos^2\frac{\pi x}{2}\sum_{k=0}^{n} f(2k+1)\Big(\frac{1}{(x-2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\Big)$$

において $n\to\infty$ とするときの極限として与えられる関数です.
関数 $F(x)$ の 区間 $-10<x<22$ でのグラフは次図.



関数の微分や積分を扱う微分積分学において, 三角関数 $\cos\pi x$ は
次のような冪級数の和として計算できるとわかっています:

$$\begin{aligned}\cos\pi x &= 1+\textstyle\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^q\dfrac{\pi^{2q}x^{2q}}{(2q)!}\\ &= 1-\frac{\pi^2x^2}{2!}+\frac{\pi^4x^4}{4!}-\frac{\pi^6x^6}{6!}-\frac{\pi^8x^8}{8!}+\cdots.\end{aligned}$$

このことを使って関数 $F(x)$ を実変数 x の冪級数として表すと,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{2}{\pi^2}\Bigl(2+\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^q\frac{\pi^{2q}x^{2q}}{(2q)!}\Bigr)\Biggl\{\sum_{p=2}^{\infty}\Bigl(p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(2m+1)}{(2m+1)^{p+1}}\Bigr)x^{p-1}\Biggr\}\\
&= \frac{2}{\pi^2}\Biggl\{\Bigl(4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(2m+1)}{(2m+1)^3}\Bigr)x+\Bigl(6\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(2m+1)}{(2m+1)^4}\Bigr)x^2\\
&\quad+\Bigl(8\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(2m+1)}{(2m+1)^5}-\pi^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(2m+1)}{(2m+1)^3}\Bigr)x^3\\
&\quad+\Bigl(10\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(2m+1)}{(2m+1)^6}-\frac{3\pi^2}{2!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(2m+1)}{(2m+1)^4}\Bigr)x^4+\cdots\Biggr\}
\end{aligned}
$$

となります.

このとき, 微分係数

$$
\begin{aligned}
F'(0) &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(2n+1)}{(2n+1)^3}\\
&= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6k+1}{(4^n(8k+1)+4^{n-1}+\cdots+4+1)^3}\Bigr)\\
&\quad+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6k+5}{(4^n(4k+3)+4^{n-1}+\cdots+4+1)^3}\Bigr)\\
&\quad(=1.04\cdots\ \text{パソコンで計算して})>1
\end{aligned}
$$

となります.

この事実は，0 は F の反発的不動点であること，すなわち 0 の近くでは関数 F を繰り返すときの点 z ごとの変化が激しいこと，を示しています．さらに，$F'(1)=0$ であることもわかっています．これは 1 が F の超吸引的不動点だということ，すなわち 1 の近くでは関数 F を繰り返すときの点 z ごとの変化が特に安定していることを意味しているのです.

関数 $F(x)$ の実数変数 x を複素数変数 z に変えて複素数を変数とする関数 $F(z)$ を考えましょう.

図版のＡ図とＢ図，４６頁のＣ図，４７頁のＥ図は，関数 $F(z)$ を複素数平面のある領域に含まれる z で繰り返し反復した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画された図です．

$\lim_{n\to\infty} F^n(z) = 1$ となる複素数 z は黄色で，

$\lim_{n\to\infty} F^n(z) = z_0$ となる複素数 z は白色で

表されています．この複素数 $z_0 = -0.03\cdots$ は関数 F の吸引的不動点と呼ばれる点であって，z_0 の近くでは関数 F を繰り返すときの点 z ごとの変化が安定していることがわかっています．
ある番号 n で複素数 $u + iv = F^n(z)$ に対して，$u > 2\times 10^6$ または $v > 70$ となる複素数 z は銀灰色で表されています．

４６頁のＣ図は，複素数平面の領域

$$\left\{z = x + iy \;\middle|\; -4 < x < 4,\ \ -1.5 < y < 4.5\right\}$$

に含まれる z で繰り返し反復した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画．
４７頁のＥ図は，複素数平面の領域

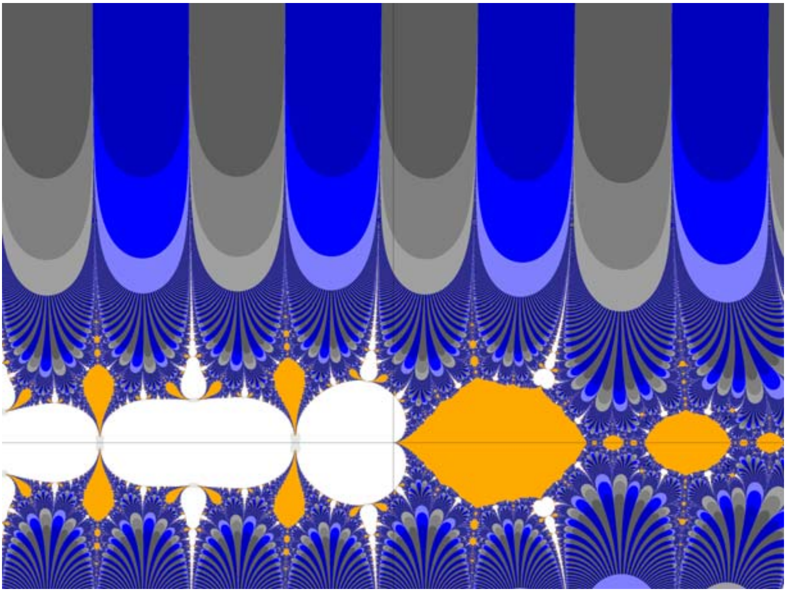
$$\left\{z = x + iy \;\middle|\; 2.9400 < x < 3.0200,\ 0.5950 < y < 0.6550\right\}$$

に含まれる z で繰り返し反復した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画．

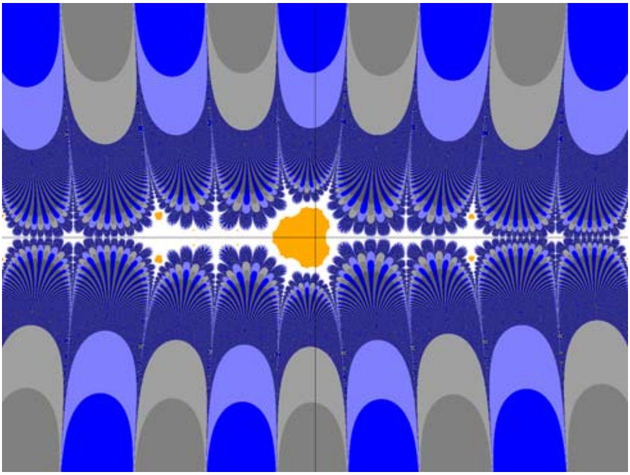
さて，実変数 x の関数 $\cos\pi x$ が

$$\begin{aligned}\cos\pi x &= 1 + \textstyle\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^q \dfrac{\pi^{2q}x^{2q}}{(2q)!}\\ &= 1 - \frac{\pi^2x^2}{2!} + \frac{\pi^4x^4}{4!} - \frac{\pi^6x^6}{6!} - \frac{\pi^8x^8}{8!} + \cdots\end{aligned}$$

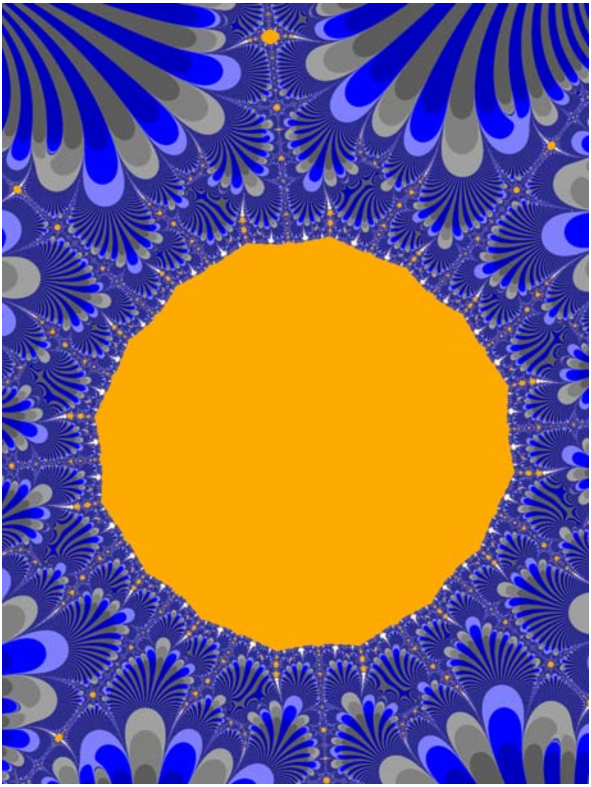
と表されるのであれば，実変数 x を複素変数 z に変えて複素数を変数とする関数 $\cos\pi z$ が考えられます．



C 図



D 図

E 図 

$$\cos \pi z = 1 + \textstyle\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \dfrac{\pi^{2q} z^{2q}}{(2q)!}$$

$$= 1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \frac{\pi^6 z^6}{6!} - \frac{\pi^8 z^8}{8!} + \cdots$$

という関数です.

こうして複素数 z を変数とする関数

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \frac{z}{2}\cos^2\frac{\pi z}{2} + (3z+1)\sin^2\frac{\pi z}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{7z}{4} - \frac{5z+2}{4}\cos\pi z
\end{aligned}
$$

が考えられて，複素数 z が実数 x に等しい $z = x$ のときには，
$g(z) = g(x)$ となっています．

４６頁のＤ図は，関数 $g(z)$ を複素数平面の領域

$$\left\{ z = x + iy \;\middle|\; -4 < x < 4,\ -3 < y < 3 \right\}$$

に含まれる z で３回反復した関数 $g^3(z)$ の複素数値から作画された図です．

$|g^3(z) - 1| < 0.1$ となる複素数 z は銀灰色で，
複素数 $u + iv = g^3(z)$ と置くとき $u > 10^{20}$ または $v > 70$ となる複素数 z は青色で表されています．

この冊子で取り上げた図の中における黄色い領域や白い領域は，複素関数 $F(z)$ による複素数平面上の複素力学系における点の収束の状況を局所一様性の立場から示しています．
「複素数 z が正の奇数であるときは，いつでも

$$\lim_{n\to\infty} F^n(z) = 1$$

となるだろうか?」
という意味で，これらの図はこの冊子の主題であるコラッツの問題に関連しているわけです．

むすび

さて，数論の有名な研究者 ポール エルデス (Paul Erdös, 1913-1996) は，現在の数学はコラッツの問題などをあつかえるまでには進歩していない (“ Mathematics is not yet ready for such problems. ”) と言っていますが，多くの人々が新しい道を探し求めていますし空しい努力ばかりではないでしょう．というわけですので，もし参考書をというならば,

金子晃：数理系のための 基礎と応用 微分積分 I -理論を中心に-,
サイエンス社，2000.

をあげておきます．微分積分学と代数学をさらに進んでください.

著者が参考にした，コラッツの問題についての手に入れやすい文献を挙げておきます.

· Richard K. Guy(Ed.), 一松信　監訳：数論における未解決問題集（シュプリンガー・フェアラーク東京，1983）.

· Jeffrey C. Lagarias : The $3x+1$ Problem and its Generalizations, Amer. Math. Monthly 92(1985), 3-23.
http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/

· Tomoaki Mimuro : On certain cycles of the Collatz conjecture, SUT Journal of Mathematics Vol. 37, No.2 (2001), 79-89.

12 頁　注 1.　方程式　$2^p - 3^q = 1$　が整数解 $p = 1,\ q = 0$ と $p = 2,\ q = 1$ を持つことは明らかである．方程式　$2^p - 3^q = 1$　が２以上の整数解 $p,\ q$ を持たないことはつぎのようにして証明される．$2^p = 3^q + 1$ $(p \geq 3)$ が成り立ったと仮定すると，2^p を 8 でわったときの余りは 0 で $3^q + 1$ を 8 でわったときの余りは 2 または 4 となり不合理である．

12 頁　注 2.　方程式　$2^p - 3^q = -1$　が整数解 $p = 1,\ q = 1$ と $p = 3,\ q = 2$ を持つことは明らかである．方程式　$2^p - 3^q = -1$　が２以上の整数解 $p,\ q$ を持たないことはつぎのようにして証明される．$2^p + 1 = 3^q$ $(q \geq 3)$ が成り立ったと仮定すると，3^q を 27 でわったときの余りは 0 で $2^p + 1$ を 27 でわったときの余りは $1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 20, 13, 26, 25, 23, 19, 11, 22, 17, 7, 14$ のどれかとなり不合理である．

索引

あ〜しゅうき

しゅうごう〜わ

浦田敏夫（うらた としお）
1970 年　東北大学大学院 理学研究科修士課程 数学専攻　修了.
現在　　　愛知教育大学 教授 理学博士.

愛知教育大学ブックレット　　　数学/数理科学 セレクト 1

コラッツの問題

初　版　　2002 年 3 月 31 日
第三版　　2013 年 3 月 6 日 原稿
著　者　　浦田敏夫
印刷所
発　行

愛知教育大学ブックレット

数学/数理科学セレクト

数学の中には，数や空間の性質にかかわる
様々な考えや問題があります.
数についての計算ができたり，図形の性質を証明できたり
またはそれに悩まされたり，さらには，複雑な問題を解くことへの
挑戦を楽しく感じている人もおられるでしょう.
このブックレットで著者達は，数学には
その使い方を学んだり覚えたりすること以外の
未知の何かがあることや，
数学は，数や自然の不思議な現象に魅惑されている人々，
数や自然の謎を疑問に思う人々や新しい考え方を探し求める人々によって
研究されているのだ，ということを示せたらと望んでいます.
ですから，このブックレットは，大学進学に直接に役立つことや
社会生活を営む上に必要な数学的能力を身につけさせることを
目的にしているのではなく，
読者に数学の一端を垣間見て楽しんでいただくことを目指しています.
数学は広く深く人間の思考と生活に影響を及ぼしているので，
過去・現在の広大な数学から
自由に話題を探し出すなどということはとてもできません.
ただ，著者達が研究で出会った
数学的話題や楽しみの一端などを
提供したいと思います.
読者の数学への興味を呼び起こしたり
夢を育んだりする手掛かりとなれば幸いです.

AICHI UNIVERSITY OF EDUCATION