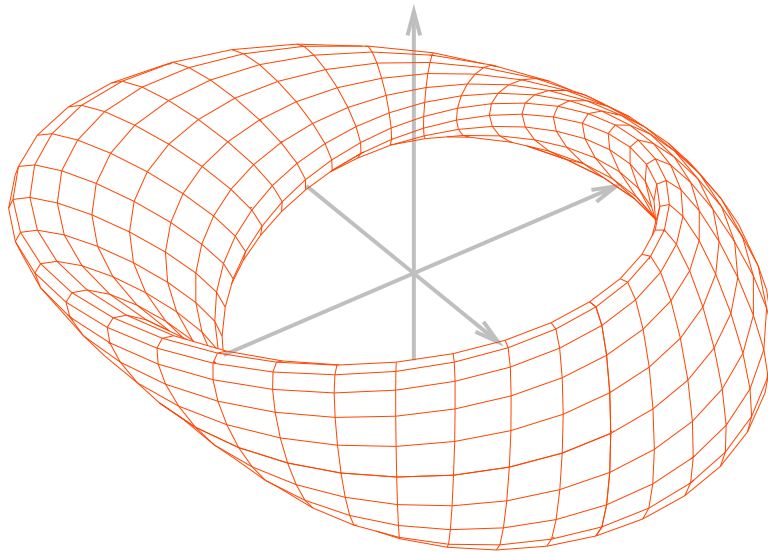


# 微分積分学 2

ver. 19.09.15





# はじめに

一変数関数  $f$  からは,  $f$  のグラフとよばれる集合  $G_f$  が派生し, 連続関数や微分可能関数が生まれ, また関数の '不連続な点' や '微分不可能な点' に気づくようになった. つぎのことは, 重要なことである:

- ・ 微分係数の意味を通して, 関数のグラフの接線が微分積分学の対象として生まれ出た,
- ・ 関数  $f(x)$  に関連して新しい関数  $\frac{df}{dx}(x)$  が生まれた; この関数を  $f(x)$  の導関数と呼ぶ.
- ・ 量を求める問題において, 不定積分を使って計算する手続きを意味づけるのが定積分の考えである.

これらのことは二変数関数の微分積分学においては, どのように取り上げられているだろうか. 二変数関数  $f(x, y)$  からは  $f$  のグラフとよばれる集合

$$G_f = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$$

が曲面として派生する.

曲面としてのグラフ  $G_f$  が連なっていて破れ目がないとき, 関数  $f(x, y)$  は連続であるといわれる; そうでない時, 関数  $f(x, y)$  は不連続であるといわれる. こうして二変数の連続関数 (いたる所で連続な関数) が生まれる.

二変数関数  $f(x, y)$  はその変数の1つ  $x$  を特別な値  $a$  と固定すると変数  $y$  の一変数関数

$$\psi(y) = f(a, y)$$

が派生し, 変数  $y$  を特別な値  $b$  と固定すると変数  $x$  の一変数関数

$$\phi(x) = f(x, b)$$

が派生する. 変数  $x$  の関数  $\phi(x)$  の導関数として二変数関数  $f(x, y)$  の偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, b)$  が生まれ, 変数  $y$  の関数  $\psi(y)$  の導関数として二変数関数  $f(x, y)$  の偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, y)$  が生まれる.

- ・ 一変数関数の微分可能性とそのグラフの接線概念が, 二変数関数に対して一般化され, 二変数関数の微分可能性とそのグラフの接平面が生まれる.

さて, 二変数関数  $f(x, y)$  の定義域を, 例えば長方形  $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  としよう. 関数  $f(x, y)$  が正の値をとる関数であるときに, 関数のグラフ  $G_f$  と  $xy$  平面の長方形  $R$  に挟まれた部分

$$D_f = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

の体積が一般的に問われる． この体積を計算する方法は一変数関数に対する定積分の概念の二変数関数への一般化である二重積分

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

の計算法から得られる．

関数のグラフ  $G_f$  は曲面を与えるのであるが，この曲面の表面積は，この曲面をパラメータ表示  $(x, y, f(x, y))$  を伴う対象  $T$  として捉えるとき， $C^1$  級関数でパラメータ表示された曲線の長さが曲線を近似する折れ線の長さの極限值として求められたように，曲面  $T$  を近似する ( $T$  のパラメータ表示から決まる) 三角形の面の複合である二次元複体の面積の極限值として二重積分

$$\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} dx dy$$

を計算することから得られる．

- ・ 二重積分の値を一変数関数の定積分を使って計算する累次積分の考えや座標変換を通して計算する手続きを説明することは二重積分の理論の成果である．

このようにして，偏導関数が計算されるすべての関数や二変数の意味で微分可能な関数の集合や，二重積分が計算されるすべての連続関数の集合が微分積分学の舞台に加わる．言うまでもなく実数を係数とする二変数多項式は連続関数であり微分可能である．二変数の微分可能な関数と一変数の微分可能な関数との合成によって生じる関数もすべて定義される所で連続で微分可能である．この微分積分学の舞台に，二変数関数のテイラー展開やベータ関数を重要な例とする多様な関数とその性質が微分，積分，偏微分や二重積分を通して現れてくるのである．微分積分学における展開は，変数を 2 つ以上持つ関数や関数から派生する数学的対象のみならず関数の集合から産まれる新たな対象を得て，さらに奥深い数学の展開へと広がっていくように見える．その例として，‘ベクトル解析’の話題からベクトル場と微分形式にふれた．

曲面の面積の概念が曲面のパラメータ表示に ( $C^1$  級である限り) 依らないことを示した後で，曲面積の計算の拡張として曲面  $S$  上でのベクトル場  $A$  の法線面積分  $\int_S A \cdot n dS$  を発見する．そして，空間の領域  $V$  および  $V$  の境界である閉曲面  $S$  上で定義されたベクトル場  $A$  に対して，閉曲面  $S$  での法線面積分がベクトル場  $A$  の発散と呼ばれるスカラー場  $\operatorname{div} A$  の領域  $V$  での体積分との関係

$$\int_S A \cdot n dS = \int_V \operatorname{div} A dx dy dz \quad (\text{発散 (量) 定理})$$

を見出す．加えて，空間内の曲面  $S$  上の領域  $\Omega$  および  $\Omega$  の境界である閉曲線  $C$  上で定義されたベクトル場  $X$  について，ベクトル場  $X$  の閉曲線  $C$  に沿った線積分がベクトル場  $X$  の回転と呼ばれるベクトル場  $\operatorname{rot} X$  の法線面積分と一致するという Stokes の定理

$$\int_C X \cdot t_C ds = \int_\Omega \operatorname{rot} X \cdot n dS$$

を示した．発散定理から Green の恒等式を導くことを示した後で，ベクトル場のポテンシャルやベクトルポテンシャルの概念を導入してベクトル場の決定の問題を調べた．

これらの定理に関わる多様な問題に備えて，空間  $\mathbf{R}^3$  での微分形式とその積分についても述べた．

空間内の曲線  $C$  に沿っての、一次微分形式  $\omega$  の線積分  $\int_C \omega$  を定義した。平面内の領域  $\Omega$  および  $\Omega$  の境界である閉曲線  $C$  上で定義された一次微分形式  $\omega$  の閉曲線  $C$  に沿っての線積分に関する Green の定理を証明し、Green の定理が二次元空間での発散定理として解釈できることを述べた。また、一次微分形式の完全性とその一次微分形式から決まる微分方程式の解との関連を述べた。曲面  $S$  上の二次微分形式に対する曲面  $S$  上の積分および空間の領域  $V$  上の三次微分形式に対する領域  $V$  上の積分を定義し、微分形式  $\omega$  の外微分形式  $d\omega$  を通して Stokes の定理や発散 (量) 定理を微分形式の積分として表現することを述べた。

## 微分積分学 2 について

微分積分学 1 では、変化する量の変化率を関数の微分係数として数学的に取り扱うことにより極値を求める問題に答えられるようになったし、重要な関数を計算できるようになった。また量の求積法を取扱う中で、定積分を求める技術は微分係数を求める問題の逆問題であるという基本定理の理解によって大きく進歩したことを学んだ。微分積分学 1 ではただ 1 つの変数を持つ関数を取り扱ったが、微分積分学 2 では 2 つまたはそれより多い変数を持つ関数の局所の変化を関数の (2 つまたはそれより多い) 偏微分係数を使って数学的に取り扱うことを知り、凸性に関連する性質を二階偏導関数のつくるヘッセ行列の符号を調べて極値問題に答えられるようになり、重要な関数を近似して計算できるようになる。また量の求積法を取扱う中で、重積分を累次積分によって計算することおよび重積分を変数変換して計算することを理解し、多様な関数の結びつきを知る。このようにして、曲面や高次元の対象に係る現代の科学や社会に現れる広範な問題を数学的に取り扱うための基礎が獲得されるだろう。

この微分積分学 2 の展開においても、実数の存在や性質については直感的にあつかう一方、定理の証明や不等式の評価の場合などに現れる数学的論理性は重視する。偏微分係数の計算、接平面の決定、極値の探索と判定、重積分の計算などについて、コンピュータ上での典型例の計算の提示と曲面  $z = f(x, y)$  のグラフィックス表示に Gnuplot ©Thomas Williams, Collin Kelley and many others. や Mathematica ©Wolfram Research, Inc. を使った。定理の意味の会得に役立つと期待する。

この講義における各節の事項について、学習上の道程を OPTION A ~ D で指示するよう試みたが適切とは言えないかもしれない：

- ‘ A ’ : 基礎概念の発見と理解に向かう数学の経験。
- ‘ B ’ : 基本事項。
- ‘ C ’ : 微分積分を応用するための基礎的考え方、計算技術を高める巧妙な計算法。
- ‘ D ’ : 数学的能力を基礎から高めるための‘理論的補充’と‘微分積分法の熟練’

この講義ノートの作成に協力してくれた、愛知教育大学数学教育の卒業生の方々に感謝します。

2006 年から 2010 年に、2014 年に改めて 著者 識



# 目次

第 4 章 偏微分法	微分積分学 2	1
4.1 二変数関数と曲面		1
4.2 二変数関数の極限值と連続性		6
4.3 偏微分		13
4.4 接平面と法線		16
4.5 合成関数の偏微分		22
4.6 高階偏導関数		28
4.7 テイラーの定理		34
4.8 極値		38
4.9 陰関数		43
4.10 条件付極値問題		49
4.11 逆写像定理		52
第 5 章 重積分法		55
5.1 重積分		55
5.2 累次積分		66
5.3 重積分の変数変換		69
5.4 二重積分の変数変換公式の証明		72
5.5 広義重積分		83
5.6 三重積分と体積		86
5.7 曲面の面積		90
5.8 積分と関数表現		98
5.9 微分と積分の順序変更		100
第 6 章 ベクトル場と微分形式		103
6.1 面積分		103
6.2 発散 (量) 定理 (Divergence Theorem)		107
6.3 線積分		113
6.4 Green の定理		117
6.5 Green の恒等式		124
6.6 曲面上での Stokes の定理		126
6.7 ポテンシャルとベクトルポテンシャル		131
6.8 外微分と積分		135
問題 略解		141
付録		183

おわりに	184
関連図書	185
索引	186



# 微分積分学 1

## 1章 数列と極限

- 1.1 実数の連続性と極限值
- 1.2 収束数列
- 1.3 級数
- 1.4 指数関数
- 1.5 対数関数
- 1.6 三角関数
- 1.7 逆関数
- 1.8 関数の連続性
- 1.9 基本的極限值 および  $\epsilon - \delta$  論法
- 1.10 連続関数の性質
- 1.11 関数の極限

## 2章 微分法

- 2.1 曲線の表示
- 2.2 曲線の接線と微分
- 2.3 指数関数の微分
- 2.4 対数関数の微分
- 2.5 三角関数の微分
- 2.6 逆関数の微分
- 2.7 高階導関数
- 2.8 平均値の定理
- 2.9 関数の増減
- 2.10 関数の凸凹
- 2.11 ロピタルの定理
- 2.12 テイラーの定理
- 2.13 極値と不等式

## 3章 積分法

- 3.1 不定積分
- 3.2 置換積分
- 3.3 部分積分
- 3.4 有理関数, 無理関数や三角関数の不定積分
- 3.5 変数分離形の微分方程式
- 3.6 定積分
- 3.7 定積分の基本的性質
- 3.8 定積分の計算
- 3.9 有理関数, 無理関数, 三角関数の定積分
- 3.10 広義積分
- 3.11 面積と体積と長さ
- 3.12 Gamma 関数と Beta 関数
- 3.13 定積分と不等式
- 3.14 台形近似
- 3.15 関数列と積分
- 3.16 応用 テイラー展開とべき級数

## 問題 略解



## 第4章 偏微分法

## 微分積分学 2

### 4.1 二変数関数と曲面

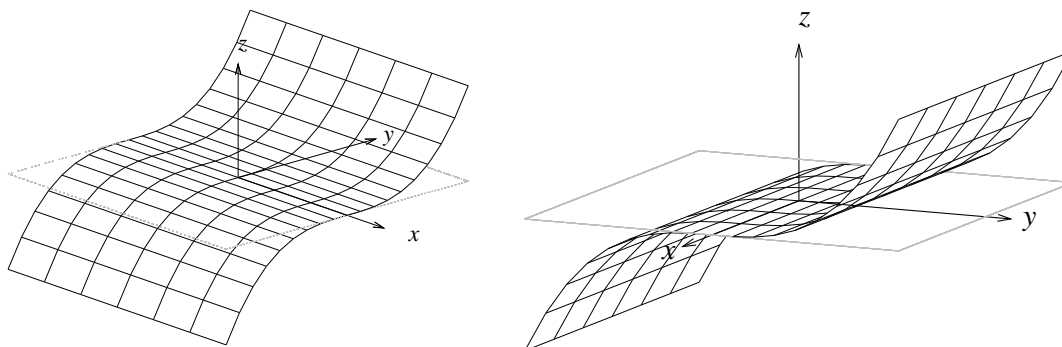
#### A. 関数のグラフと曲面

平面  $\mathbf{R}^2$  の領域  $D$  で定義された二変数関数  $f(x, y)$  を考える．一変数関数の場合と同様に関数  $f(x, y)$  のグラフ  $\Gamma_f$  が定義される：

$$\Gamma_f = \left\{ (a, b, f(a, b)) \in \mathbf{R}^3 \mid (a, b) \in D \right\} .$$

一変数関数  $f(x)$  のグラフは一般には曲線を表していたが，二変数関数  $f(x, y)$  のグラフは，一般に，曲面を表す．

**例** 二変数関数  $f(x, y) = y^3$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ) の  $-3 < x < 3$ ,  $-3 < y < 3$  の範囲でのグラフは変数  $x$  の変動によらないので，その概形は  $yz$  平面内の曲線  $z = y^3$  の平行移動からできる曲面になる．下図のようにとらえることもできる：



**例** 関数  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  ( $x^2 + y^2 \leq 1$ ) のグラフは原点を中心とする半径 1 の上半球面である．

**問** 二変数関数  $f(x, y) = x^2$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ) のグラフの概形を画いてみよ．

## 回転面

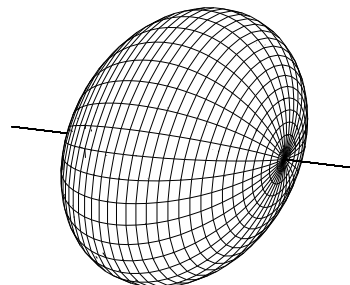
関数  $y = f(x)$  の  $xy$  平面上のグラフを  $x$  軸のまわりに一回転してできる回転面の方程式は

$$y^2 + z^2 = f(x)^2 .$$

- ① 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  を  $x$  軸のまわりに一回転してできる回転面の方程式は

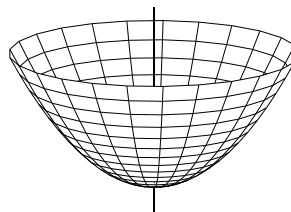
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 .$$

(右図は  $x$  軸とその周りの回転楕円面 .)



- ② 放物線  $4az = x^2$  を  $z$  軸のまわりに一回転してできる回転面の方程式は,  $x = \sqrt{4az}$  の  $z$  軸のまわりの回転面と考えられるので,  $x^2 + y^2 = 4az$  回転放物面 .

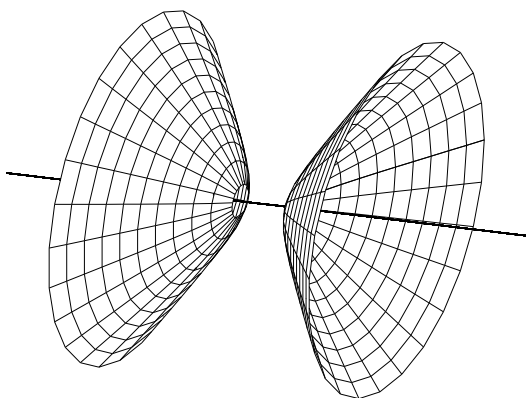
(右図は  $z$  軸とその周りの回転放物面 .)



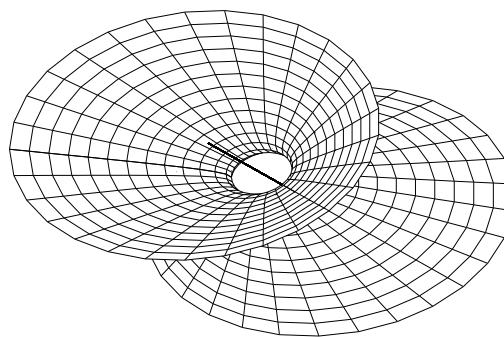
- ③ 双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  を  $x$  軸および  $y$  軸のまわりに一回転してできる回転面の方程式を求めよ .

解.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$  回転二葉双曲面 .

$\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  回転一葉双曲面 .



(上左図は  $x$  軸とその周りの回転二葉双曲面 .)



(上右図は  $y$  軸とその周りの回転一葉双曲面 .)

注. 一般の二次曲面については, 付録の図を参照せよ .

B. 等位面 二次元空間  $\mathbf{R}^2$  の領域  $D$  で定義された二変数関数  $f(x, y)$  を考える .

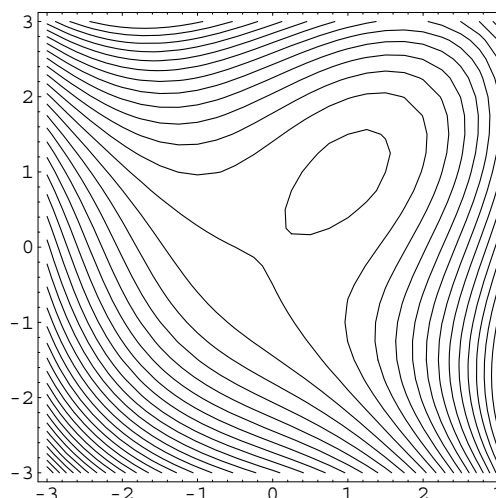
実数  $\alpha$  に対して , 集合

$$C_\alpha = \{(a, b) \in D \mid f(a, b) = \alpha\}$$

が , 空集合ではなく ,

$D$  内の曲線となっている場合には ,

これらの曲線  $C_\alpha$  を値  $\alpha$  の等位曲線という .



$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  の等位曲線  
( 参考 : 4.8 極値 B. 例 2 )

三次元空間  $\mathbf{R}^3$  の領域  $D$  で定義された三変数関数  $f(x, y, z)$  を考える .

実数  $\alpha$  に対して , 集合

$$S_\alpha = \{(a, b, c) \in D \mid f(a, b, c) = \alpha\}$$

が , 空集合ではなく ,  $D$  内の曲面となっている場合には , これらの曲面  $S_\alpha$  を値  $\alpha$  の等位面という .

**例** 関数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  の正の値  $\alpha$  に対して ,  $\{(a, b, c) \in D \mid f(a, b, c) = \alpha\}$  は半径  $\sqrt{\alpha}$  の球面である .

### C. 空間曲線や曲面のパラメータ表示

円柱座標 3次元空間  $\mathbf{R}^3$  の点

$(x, y, z)$  は2次元平面  $\mathbf{R}^2$  の点

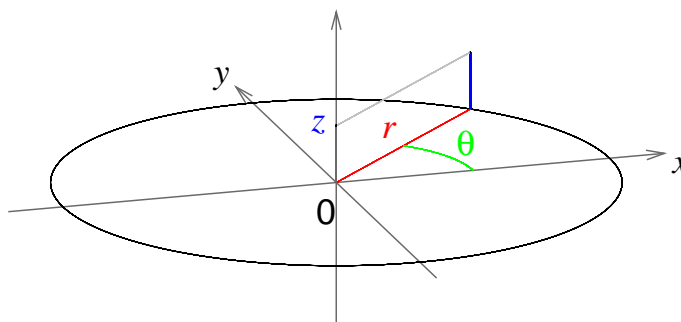
$(x, y)$  を表す極座標と  $z$  座標を

使って

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z$$

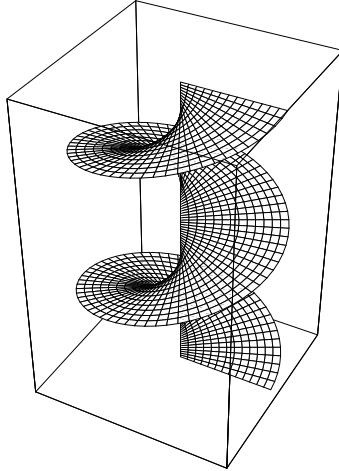
$$(r \geq 0, \theta \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R})$$

と表すこともできる (円柱座標系)



例 Helicoid

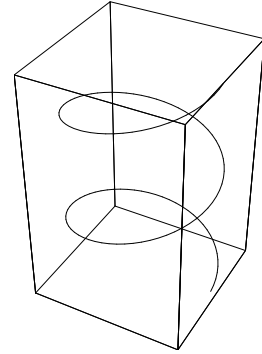
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \theta \end{cases}$$



$$(0 \leq r \leq 4, -2\pi \leq \theta \leq 2\pi).$$

例 Helix

$$\begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \\ z = \theta \end{cases}$$



$$(-2\pi \leq \theta \leq 2\pi).$$

#### D. 曲面の例

一般に、空間  $\mathbf{R}^3$  にある曲線や曲面はパラメーター変数を使って表示される。曲線  $\gamma$  に対しては

$$\gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}^3 \mid a \leq t \leq b\},$$

ただし  $x(t), y(t), z(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) は連続関数。例として、右上図の螺旋 Helix を見よ。

曲面  $S$  に対しては

$$S = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbf{R}^3 \mid (u, v) \in D\},$$

ただし  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) は

平面領域  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  で定義された連続関数。

右図のパラメータ表示された曲面は等位面

$$S : (x^2 + y^2)z^2 - x^2 = 0$$

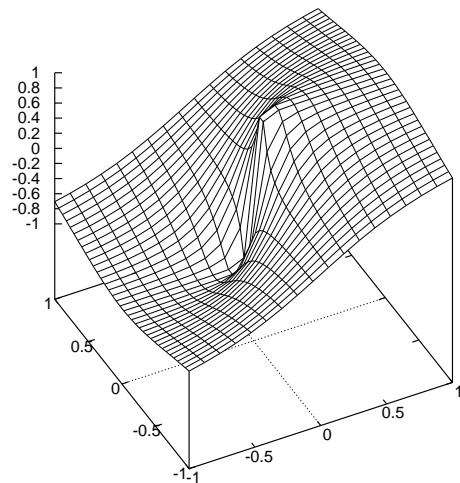
の一部分である。等位面  $S$  から  $z$  軸を除いた部

分は二変数関数  $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  のグラフであ

り、この曲面は原点  $O(0, 0, 0)$  で破れている。

例

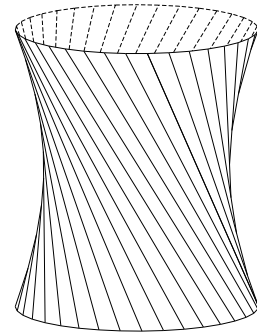
$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = \cos v \quad (0 < u, -\infty < v < \infty) \end{cases}$$



例 一葉双曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  はつぎの  
パラメータ表示

$$\begin{cases} x = a \cos u + v a \sin u \\ y = b \sin u - v b \cos u \\ z = c v \end{cases} \quad (-\infty < u, v < \infty)$$

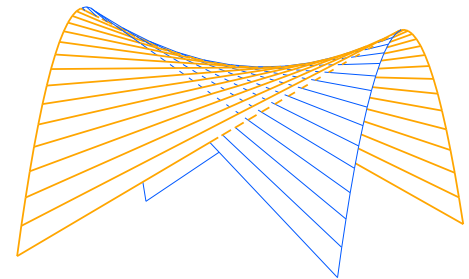
を持つ。一葉双曲面は互いに交わらない直線の族であることを確かめよ。



例 双曲放物面  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$  はつぎのパラメータ表示

$$\begin{cases} x = u \\ y = bv - \frac{bu}{a} \\ z = -v^2 + \frac{2vu}{a} \end{cases} \quad (-\infty < u, v < \infty)$$

を持つ。双曲放物面は互いに交わらない直線の族であることを確かめよ。



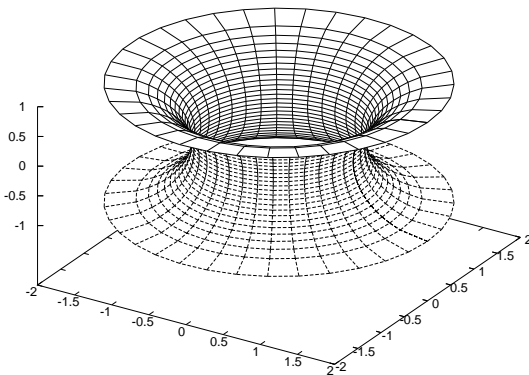
例 関数  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2)$  に対して、等位面

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0\}$$

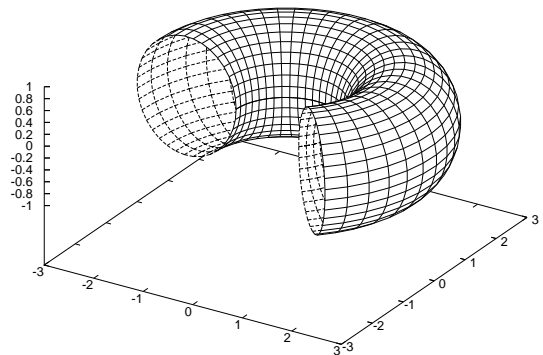
は円環体 (トーラス) である。何故ならば、明らかに、

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 4\sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1.$$

これから、等位面  $T$  上の点  $(x, y, z)$  は、 $\mathbf{R}^3$  内の円周  $C = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$  に垂直な平面内でこの円周  $C$  の点を中心とする半径 1 の円周上にあることがわかる。この曲面は  $yz$ -平面内の円  $(y-2)^2 + z^2 = 1$  を  $z$  軸の周りに回転してできる曲面、すなわち、円環体である。



円環体の内側部.



円環体の一部.

## 4.2 二変数関数の極限值と連続性

平面  $\mathbb{R}^2$  の集合  $D$  で定義された二変数関数  $f(x, y)$  を考える .

$$\text{A. 極限值 } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

$D$  において  $(x, y) \neq (a, b)$  が  $(a, b)$  に限りなく近づく (すなわち ,  $(a, b)$  と異なる  $(x, y) (\in D)$  が  $(a, b)$  に限りなく近づく) につれて 関数値  $f(x, y)$  がある値  $\alpha$  に限りなく近づくとき ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \alpha \quad \left( \lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} f(x, y) = \alpha \text{ または } f(x, y) \rightarrow \alpha \text{ } ((x, y) \rightarrow (a, b)) \right)$$

と表し ,  $\alpha$  を  $(x, y)$  が  $(a, b)$  に近づくときの  $f(x, y)$  の極限值という .

**定理 1**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \alpha$  ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = \beta$  とする . 次の (1) - (4) が成り立つ .

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{f(x, y) + g(x, y)\} = \alpha + \beta$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{\gamma f(x, y)\} = \gamma \alpha \quad (\gamma \text{ は定数})$$

上の (1) と (2) の性質を極限值計算の線形性という .

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) g(x, y) = \alpha \beta$$

$$(4) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0 \text{ のとき.})$$

**定義 . 点  $(a, b) \in D$  での連続性** 関数  $f(x, y)$  の定義域は集合  $D (\subset \mathbb{R}^2)$  であるとする .

関数  $f(x, y)$  は

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b) \text{ が成り立つ}$$

とき点  $(a, b)$  で連続といわれる . また

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$  が成り立たないとき , すなわち

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \neq f(a, b) \text{ または } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \text{ が存在しない}$$

とき , 関数  $f(x, y)$  は点  $(a, b)$  で不連続といわれる .

**定義 . 連続関数** 関数  $f(x, y)$  が定義域  $D (\subset \mathbb{R}^2)$  のすべての点  $(x, y)$  で連続のとき ,  $f(x, y)$  は集合  $D$  で連続であるといわれる , また  $f(x, y)$  を (集合  $D$  上の) 連続関数という .

以下の例を見れば , 関数  $f(x, y)$  のグラフに曲面として破れ目がないときにだけ 関数  $f(x, y)$  が連続であることが理解されるだろう .

**例 1** 関数  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  を考えよう , 定義域は  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$  である .



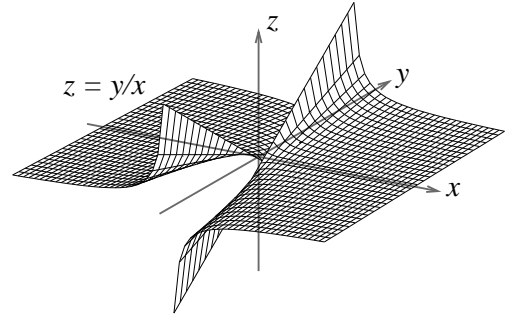
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (+0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (+0,y_0)} \frac{y}{x} = \begin{cases} \infty & (y_0 > 0) \\ -\infty & (y_0 < 0) \end{cases}$$

また

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (-0,y_0)} \frac{y}{x} = \begin{cases} -\infty & (y_0 > 0) \\ \infty & (y_0 < 0) \end{cases}$$

であるから,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f(x,y)$  は存在しない.

すなわち関数  $f(x,y)$  は  $y$  軸上の点で連続でない. //



**例 2** 関数  $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$  を考えよう, 定義域は  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$  である.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  の点を極座標で表すとき,  $(x,y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \neq (0,0)$  に対して

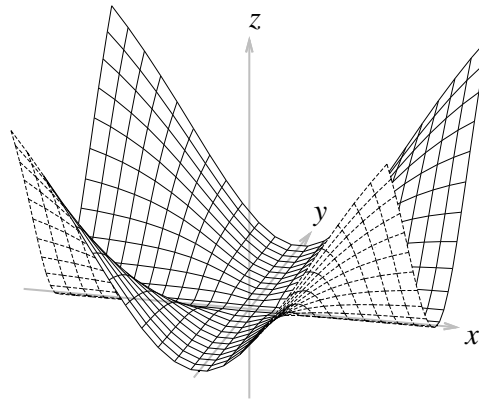
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 0 \end{aligned}$$

であるから, 極限值  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  が存在する.

関数  $f(x,y)$  は  $(0,0)$  で連続ではないが, 関数  $f(x,y)$  の定義域を  $\mathbb{R}^2$  まで拡張して定義される関数

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

は原点  $(0,0)$  で連続であるといえる. ( $\because \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(0,0)$ ) //



(上図は  $z = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$  のグラフ.)

**定理 1** と連続関数の定義から, ある集合  $D(\subset \mathbb{R}^2)$  で連続な関数  $f(x,y), g(x,y)$  に対して,  $f(x,y) + g(x,y), f(x,y) - g(x,y), f(x,y)g(x,y)$  が  $D$  で連続であることがわかる. さらに,  $g(x,y) \neq 0 ((x,y) \in D)$  ならば  $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$  も  $D$  で連続であることがわかる.

**定理 2** 関数  $f(x,y)$  は定義域  $D(\subset \mathbb{R}^2)$  で連続とする.

(1)  $f(x,y)$  の値域  $\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$  が  $(\mathbb{R})$  の区間  $I$  に含まれるとする. 関数  $\phi(t)$  が  $I$  で連続ならば, 合成関数  $\phi(f(x,y))$  は  $D$  で連続である.

(2) 関数  $p(t)$  および  $q(t)$  は  $(\mathbb{R})$  の区間  $J$  で連続で, すべての  $t \in J$  で  $(p(t), q(t)) \in D$  とする. このとき, 合成関数  $f(p(t), q(t))$  は  $J$  で連続である.

問題 4.2

- 1 (1) 関数  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  は原点  $O = (0, 0) \in \mathbf{R}^2$  で連続でないことを示せ.
- (2) 関数  $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  は平面  $\mathbf{R}^2$  のどこで連続かを調べよ.
- (3)  $\mathbf{R}^3$  の曲面  $z = \frac{\cos \theta}{\sqrt{r^2 - 1}}$  (極座標表示) の境界を調べよ.

B. 点列と閉集合

**収束点列の定義** 平面  $\mathbf{R}^2$  の点列  $(x_n, y_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\mathbf{R}^2$  の点  $(x, y)$  に収束するとは, つぎのことが成り立つことである:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0.$$

**閉集合の定義** 平面内  $\mathbf{R}^2$  の集合  $K$  は閉集合であるとは, つぎのことが成り立つことである: 集合  $K$  の点列  $(x_n, y_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\mathbf{R}^2$  の点  $(x_0, y_0)$  に収束すれば, 極限点  $(x_0, y_0)$  は集合  $K$  に属している.

例. 閉長方形  $[a, b] \times [c, d]$  は閉集合である.

何故なら, 閉長方形  $[a, b] \times [c, d]$  に含まれる点列  $(x_n, y_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\mathbf{R}^2$  の点  $(x_0, y_0)$  に収束すれば,

$$(x_n, y_n) \in [a, b] \times [c, d] \quad \text{のとき} \quad a \leq x_n \leq b, \quad c \leq y_n \leq d \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であるから 比較原理により  $a \leq x_0 \leq b, \quad c \leq y_0 \leq d$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が成り立つ.

これは  $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$  を意味している. //

例. 平面  $\mathbf{R}^2$  の点  $(a, b)$  に対して, 点  $(a, b)$  を中心とする半径  $r$  の閉円板

$$\bar{D}_r(a, b) = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2 \right\}$$

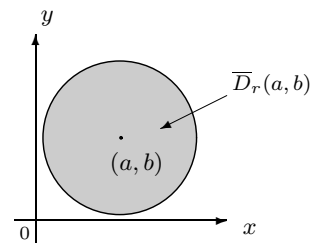
は閉集合である. 何故なら,

閉円板  $\bar{D}_r(a, b)$  に含まれる点列  $(x_n, y_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\mathbf{R}^2$  の点  $(x_0, y_0)$  に収束すれば,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} &\leq \sqrt{(x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2} + \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} + r \rightarrow r \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるから 比較原理により  $\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} \leq r$  が成り立つ.

これは  $(x_0, y_0) \in \bar{D}_r(a, b)$  を意味している. //



連続関数が有界な閉集合（平面内で無限に遠方まで広がってはいない，すなわち，平面内の十分大きい円に含まれる閉集合）で最大値や最小値をとるということは，重要な事実である．条件付極値問題における解の存在（参考．4.10 条件付極値問題）や二変数連続関数の積分可能性（参考．5.1 重積分，D. 一様連続性と積分可能性）に関わっている定理である．

**最大値・最小値定理**

平面  $\mathbb{R}^2$  内の有界閉集合  $K$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  は ( $K$  で) 最大値と最小値をとる，すなわち，つぎのことが成り立つ：

- (1) 閉集合  $K$  のある点  $(x_0, y_0)$  が在って  $K$  のどの点  $(x, y)$  でも関数値  $f(x, y)$  は最大値  $f(x_0, y_0)$  以下である

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\forall (x, y) \in K).$$

- (2) 閉集合  $K$  のある点  $(x_1, y_1)$  が在って  $K$  のどの点  $(x, y)$  でも関数値  $f(x, y)$  は最小値  $f(x_1, y_1)$  以上である

$$f(x, y) \geq f(x_1, y_1) \quad (\forall (x, y) \in K).$$

**開集合の定義**

平面内  $\mathbb{R}^2$  の集合  $O$  は開集合であるとは，つぎのことが成り立つことである：集合  $O$  のどの点  $(x_0, y_0)$  に対しても，点  $(x_0, y_0)$  を中心とする十分小さい半径  $r$  の開円板

$$D_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\} \subset O$$

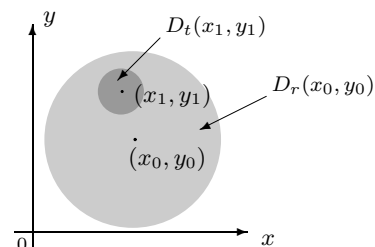
が成り立つことである．

例. 平面  $\mathbb{R}^2$  の点  $(x_0, y_0)$  を中心とする半径  $r$  の開円板

$$D_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}$$

や平面  $\mathbb{R}^2$  の開長方形  $R = (a, b) \times (c, d)$  は開集合である．

今，円板  $D_r(x_0, y_0)$  に含まれる任意の点  $(x_1, y_1)$  を考える．



$s = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} < r$  であるから，点  $(x_1, y_1)$  を中心とする半径  $t (< r - s)$  の

$$\text{円板 } D_t(x_1, y_1) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} < t\}$$

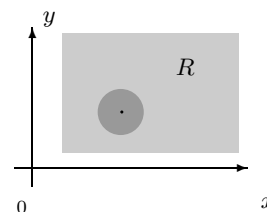
の点  $(x, y)$  に対して（距離の三角不等式から）

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} < t + s < r$$

が成り立つ．故に

$$D_t(x_1, y_1) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} < t\} \subset D_r(x_0, y_0).$$

これは  $D_r(x_0, y_0)$  が開集合であることを示している．



同様に，平面  $\mathbf{R}^2$  の開長方形  $R = (a, b) \times (c, d)$  が開集合であることも容易に示される．

**領域の定義** 平面内  $\mathbf{R}^2$  の開集合  $\Omega$  は，

$\Omega$  のどの二点  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$  に対しても 点  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$  を結ぶ  $\Omega$  内の連続曲線

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega, \quad \gamma(0) = (x_0, y_0) \quad \text{かつ} \quad \gamma(1) = (x_1, y_1)$$

が存在するとき，領域といわれる．

#### D. 連続性と $\epsilon - \delta$ 論法

**収束点列の定義** 平面  $\mathbf{R}^2$  の点列  $(x_n, y_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\mathbf{R}^2$  の点  $(x, y)$  に収束する

とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0 \quad \text{が成り立つ}$$

ことである．このことを数学的に詳しく言い表すと，つぎのことが成り立つことである：

$$(*) \quad \left( \begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある正の番号 } N \text{ が存在して，} \\ \text{(どの番号 } n \text{ に対しても) } n \geq N \implies \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つことである．

この表現が与える収束の印象は，‘数列の点がすべて打ってあるところから数列の点を順番に消していくと，点の散らばっている範囲が狭まって一点に集まっていく．’というものである．

逆に 性質  $(*)$  の否定を考えると，点列  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  が点  $(x, y)$  に収束しないとは，

$$\left( \begin{array}{l} \text{ある正の数 } \epsilon \text{ に対して，どんな正の番号 } N \text{ を選んでも，} \\ \text{ある番号 } n \text{ に対して } n \geq N \text{ かつ } \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \geq \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つことである．

**関数の連続性の定義** 関数  $f(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) を考える．

関数  $f(x, y)$  が  $(x_0, y_0) (\in D)$  で連続であるとは，

$$(*) \quad \left( \begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある正の数 } \delta \text{ が存在して，} \\ \text{定義域 } D \text{ のどの } (x, y) \text{ に対しても} \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つことである．

**説明** 性質  $(*)$  の否定はつぎの性質が成り立つことである：

$$\left( \begin{array}{l} \text{ある正の数 } \epsilon \text{ に対して，どんな正の数 } \delta \text{ を選んでも，} \\ \text{定義域 } D \text{ のある } (x_\delta, y_\delta) \text{ に対して} \\ \sqrt{(x_\delta - x_0)^2 + (y_\delta - y_0)^2} < \delta \text{ かつ } |f(x_\delta, y_\delta) - f(x_0, y_0)| \geq \epsilon. \end{array} \right.$$

**定理 連続関数の一様連続性**

$\mathbb{R}^2$  の有界閉集合  $K$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  は閉集合  $K$  で一様連続である。すなわち、任意の正の数  $\epsilon$  に対して、ある正の数  $\delta$  が存在して、 $(x, y), (x', y') \in K$  に対して

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta \implies |f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon$$

が成り立つ。

**2** 平面  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $D$  で定義された関数  $f(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) が連続で、ある点  $(a, b) \in D$  で  $f(a, b) > 0$  とする。次の事を示せ：

$$\exists \delta > 0 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies f(x, y) \geq \frac{f(a, b)}{2}.$$

(ある正の数  $\delta$  が存在して、 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$  であるならば  $f(x, y) \geq \frac{f(a, b)}{2}$  .)

**3** 平面  $\mathbb{R}^2$  の長方形  $R$  で定義された連続関数は  $R$  内の任意の二点  $(p, q), (p', q')$  における値  $f(p, q), f(p', q')$  の中間の任意の値を  $R$  内のある点で必ず取ることを示せ。

**D. 最大値・最小値定理の証明**

つぎの補題は本質的に 微分積分学 1 1.1 D. **Bolzano-Weierstrass の定理** である。

**補題** 平面  $\mathbb{R}^2$  内の有界な閉集合  $K$  に含まれる点列  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  は収束する部分列を含む、すなわち、ある部分列  $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$  は  $K$  の点に収束する。

**最大値・最小値定理の証明**

最初に、関数  $f(x, y)$  が  $K$  で上に有界であることを示す。関数  $f(x, y)$  が閉集合  $K$  で上に有界でないと仮定すると、どんな正の整数  $n$  に対しても  $f(x_n, y_n) > n$  が成り立つ点  $(x_n, y_n) \in K$  がとれる。点列  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  は有界な閉集合  $K$  に含まれるから、上の補題により収束する部分列  $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$  がとれる。  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}, y_{n_k}) = (x_0, y_0) \in K$  とすると  $f(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = \infty$  となる。これは関数値  $-\infty < f(x_0, y_0) < \infty$  に矛盾する。背理法により、関数  $f(x, y)$  が  $K$  で上に有界であることが示された。こうして 関数値の集合

$$V = \{f(x, y) \mid (x, y) \in K\}$$

は実数の集合  $\mathbb{R}$  の中で上に有界であることが示された。

微分積分学 1 1.10 D. **補題 上限の存在** により、 $\sup V$  に収束する数列  $\{f(x_n, y_n) \in V\}_{n=1}^{\infty}$  がある。点列  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  は有界な閉集合  $K$  に含まれているから、

上の補題を使って  $K$  で収束する部分列  $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$  がとれる .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}, y_{n_k}) = (x_0, y_0) \in K$$

とすると , 関数  $f(x, y)$  の連続性により

$$f(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \sup V$$

となる .  $\sup V$  の性質から

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\forall (x, y) \in K).$$

すなわち  $V$  は最大の数

$$\max_{(x, y) \in K} f(x, y) = f(x_0, y_0) = \sup V \quad (\exists (x_0, y_0) \in K)$$

を含む . 同様にして , 関数  $f(x, y)$  が ( $K$  で) 最小値をとることも示される . //

#### D. 定理 連続関数の一様連続性 の証明

$\mathbb{R}^2$  の有界閉集合  $K$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  は閉集合  $K$  で一様連続でないとは仮定しよう . このとき , つぎのことが成り立つ :

ある正の数  $\epsilon$  が存在して , どんな正の番号  $n$  に対しても , 有界閉集合  $K$  に含まれる  $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n)$  が取れて

$$\sqrt{(x_n - x'_n)^2 + (y_n - y'_n)^2} < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad |f(x_n, y_n) - f(x'_n, y'_n)| \geq \epsilon \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ . このことからつぎの様に不合理 (矛盾) が導かれる .

Bolzano-Weierstrass の定理により , 有界な点列  $\{(x_n, y_n), (x'_n, y'_n)\}_{n=1}^{\infty}$  から収束する部分列  $(x_{n_k}, y_{n_k}), (x'_{n_k}, y'_{n_k})$  が取れる . 選び出した収束するこの部分列を新たに番号付けして収束する点列  $\{(x_k, y_k), (x'_k, y'_k)\}_{k=1}^{\infty}$  とすると

$$\sqrt{(x_k - x'_k)^2 + (y_k - y'_k)^2} < \frac{1}{k} \quad \text{かつ} \quad |f(x_k, y_k) - f(x'_k, y'_k)| \geq \epsilon \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ . 有界閉集合  $K$  に含まれる極限点を

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0) \quad , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (x'_k, y'_k) = (x'_0, y'_0)$$

とすると ,

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_k - x'_k)^2 + (y_k - y'_k)^2} = \sqrt{(x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2}$$

が成り立つから ,  $(x_0, y_0) = (x'_0, y'_0)$  である . このとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_k, y_k) - f(x'_k, y'_k)| = |f(x_0, y_0) - f(x'_0, y'_0)| = 0 \geq \epsilon > 0$$

が成り立たねばならないが , ここに  $0$  が  $0$  より大きいという不合理が生じている . 不合理が生じたのは仮定が誤りだからである . すなわち , 有界閉集合  $K$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  は有界閉集合  $K$  で一様連続である . //

## 4.3 偏微分

### A. 偏微分係数

二変数関数  $z = f(x, y)$  の定義域内の点  $(a, b) (\in \mathbf{R}^2)$  を考える .

**定義** (1) 極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

が存在するとき, 関数  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で  $x$  に関して偏微分可能といわれ, この極限値を  $(a, b)$  での  $x$  に関する偏微分係数といい  $f_x(a, b)$  と表す .

(2) 極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

が存在するとき, 関数  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で  $y$  に関して偏微分可能といわれ, この極限値を  $(a, b)$  での  $y$  に関する偏微分係数といい  $f_y(a, b)$  と表す .

**定義** (1) 二変数関数  $f(x, y)$  が領域  $D (\subset \mathbf{R}^2)$  で定義されていて, 領域  $D$  の各点  $(a, b)$  で  $x$  に関する偏微分係数  $f_x(a, b)$  が存在するとき, 偏導関数  $f_x(x, y)$  が領域  $D$  で定義される .  $f_x(x, y)$  を  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  と表す .

(2) 二変数関数  $f(x, y)$  が領域  $D (\subset \mathbf{R}^2)$  で定義されていて, 領域  $D$  の各点  $(a, b)$  で  $y$  に関する偏微分係数  $f_y(a, b)$  が存在するとき, 偏導関数  $f_y(x, y)$  が領域  $D$  で定義される .  $f_y(x, y)$  を  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$  と表す .

**例** 関数  $f(x, y) = x^2y^3 + x + 5y$ ,  $g(x, y) = e^{xy} + \sin(x + 2y)$  に対して ,  
 $f_x(x, y) = 2xy^3 + 1$ ,  $f_y(x, y) = 3x^2y^2 + 5$  .  
 $g_x(x, y) = ye^{xy} + \cos(x + 2y)$ ,  $g_y(x, y) = xe^{xy} + 2 \cos(x + y)$  .

### B. 偏微分係数の基本的性質

**定理 1** 関数  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  が  $x$  に関して偏微分可能であるとき, 次の (1) - (4) が成り立つ .

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \{f(x, y) + g(x, y)\} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \{\alpha f(x, y)\} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad (\alpha \text{ は定数})$$

上の (1) と (2) の性質を偏微分係数計算の線形性という .

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x} \{f(x, y) g(x, y)\} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \cdot g(x, y) + f(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} g(x, y)$$

$$(4) \quad g(x, y) \neq 0 \text{ のとき, } \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right\} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \cdot g(x, y) - f(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} g(x, y)}{g(x, y)^2} .$$

注 . 関数  $f(x, y), g(x, y)$  が  $y$  に関して偏微分可能であるときも同様のことが成り立つ .

**高階 (次) 偏導関数** 関数  $f(x, y)$  に対して , つぎの高階偏導関数が存在するときがある :

$f_x(x, y)$  の  $x$  に関する (二階) 偏導関数を  $f_{xx}(x, y)$  または  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$  と表す .

$f_x(x, y)$  の  $y$  に関する (二階) 偏導関数を  $f_{xy}(x, y)$  または  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$  と表す .

$f_y(x, y)$  の  $x$  に関する (二階) 偏導関数を  $f_{yx}(x, y)$  または  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$  と表す .

$f_y(x, y)$  の  $y$  に関する (二階) 偏導関数を  $f_{yy}(x, y)$  または  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$  と表す .

$f_{xx}(x, y)$  の  $x$  に関する (三階) 偏導関数を  $f_{xxx}(x, y)$  または  $\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, y)$  と表す .

$f_{xx}(x, y)$  の  $y$  に関する (三階) 偏導関数を  $f_{xxy}(x, y)$  または  $\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x, y)$  と表す .

...

### 問題 4.3

1 つぎの関数の一階偏導関数を求めよ .

- (1)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$       (2)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$       (3)  $f(x, y) = \frac{e^{xy}}{e^x + e^y}$   
 (4)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$       (5)  $f(x, y) = x^y$       (6)  $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (x > 0)$   
 (7)  $f(x, y) = \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (y > 0)$       (8)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$

2 関数  $f(x, y) = x^2y^3 + x + 5y$ ,  $g(x, y) = e^{xy} + \sin(x + 2y)$  に対して , 二階および三階の偏導関数をすべて求めよ .

3 三つ以上の変数を持つ関数  $f(x, y, z)$  や  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  等に対してもその偏微分係数や偏導関数が同様に定義される .

- (1) 三変数関数  $f(x, y, z)$  の偏微分係数  $f_x(a, b, c)$ ,  $f_y(a, b, c)$ ,  $f_z(a, b, c)$  の定義を述べよ .  
 (2) 関数  $f(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\lambda xy + 2\mu yz + 2\nu zx$  の一階偏導関数をすべて求めよ .

### C. 偏微分係数の幾何学的意味

二変数関数  $z = f(x, y)$  のグラフとして定義される曲面を  $S$  とし ,  $S$  上の点  $P(a, b, f(a, b))$  を考える . また ,  $\mathbf{R}^3$  内の平面  $\pi_a : x = a$  と  $\pi_b : y = b$  を考える .

曲面  $S$  と平面  $\pi_b$  との交わり , すなわち 曲面  $S$  の平面  $\pi_b$  による切片 , は  $\mathbf{R}^3$  内の曲線

$$\begin{cases} x = t \\ y = b \\ z = f(t, b) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$



と考えられると同時に平面  $\pi_b : y = b$  内の曲線

$$C_b : \begin{cases} x = t \\ z = f(t, b) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

とも考えられる .

この平面  $\pi_b$  内の曲線  $C_b$  の点  $P(a, b, f(a, b)) \in \pi_b$  での接線の傾きを求めよう .

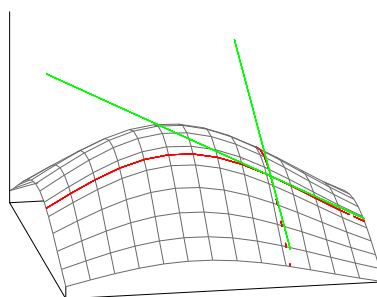
二変数関数  $f(x, y)$  の変数  $y$  を  $y = b$  と固定して , 関数  $f(x, b)$  を変数  $x$  の一変数関数と考えて  $\varphi(x) = f(x, b)$  と名前をつける .

曲線  $C_b$  上の点  $P(a, b, f(a, b))$  での接線の傾きは , 関数  $z = \varphi(x) (= f(x, b))$  の  $x = a$  での接線の傾き  $\varphi'(a)$  である . この傾きが  $(a, b)$  での  $f(x, y)$  の  $x$  に関する偏微分係数である . すなわち

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \varphi'(a) .$$

そして , 曲線  $C_b$  の点  $P(a, b, f(a, b))$  での接線は ,  $\mathbf{R}^3$  内で ,

$$\begin{cases} x = t \\ y = b \\ z = f_x(a, b)(t - a) + f(a, b) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$



と表される . 同様に ,

曲面  $S$  と平面  $\pi_a$  との交わり , すなわち 曲面  $S$  の平面  $\pi_a$  による切片 , は  $\mathbf{R}^3$  内の曲線

$$\begin{cases} x = a \\ y = t \\ z = f(a, t) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と考えられると同時に平面  $\pi_a : x = a$  内の曲線

$$C_a : \begin{cases} y = t \\ z = f(a, t) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

とも考えられる . この平面  $\pi_a$  内の曲線  $C_a$  の点  $P(a, b, f(a, b)) \in \pi_a$  での接線の傾きを求めよう .

二変数関数  $f(x, y)$  の変数  $x$  を  $x = a$  と固定して , 関数  $f(a, y)$  を変数  $y$  の一変数関数と考えて  $\psi(y) = f(a, y)$  と名前をつける . この曲線  $C_a$  上の点  $P(a, b, f(a, b))$  での接線の傾きは , 関数  $z = \psi(y) (= f(a, y))$  の  $y = b$  での接線の傾き  $\psi'(b)$  である . この傾きが  $(a, b)$  での  $f(x, y)$  の  $y$  に関する偏微分係数である . すなわち

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} = \psi'(b)$$

そして , 曲線  $C_a$  の点  $P(a, b, f(a, b))$  での接線は ,  $\mathbf{R}^3$  内で ,

$$\begin{cases} x = a \\ y = t \\ z = f_y(a, b)(t - b) + f(a, b) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と表される .

## 4.4 接平面と法線

### A. 球面の接平面と法線

- 1  $\mathbb{R}^3$  の平面と法線の関係について以下の問いに答えよ。  
( $a, b, c \neq 0$ ) とし, 平面と法線を含む図も示せ。

- (1)  $\mathbb{R}^3$  の平面  $ax + by + cz = d$  上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  での法線を求めよ。

$$\text{法線 : } \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

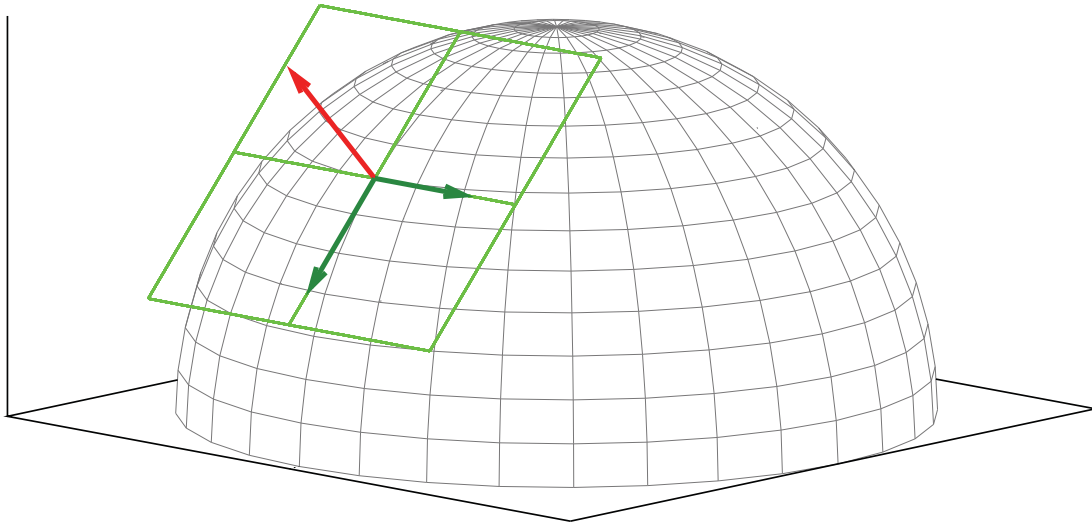
であること, また

$$abc \neq 0 \text{ の場合 法線の方程式 : } \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} .$$

であることも示せ。

- (2)  $\mathbb{R}^3$  の平面で,  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  を法線ベクトルとし点  $(x_0, y_0, z_0)$  を通る平面を求めよ。  
平面の方程式は  
 $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ , すなわち  $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$   
であることを示せ。

- 2 半径  $r > 0$  の球面  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  での接平面の方程式を求めよ。  
(Hint. この球面上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  での接平面の法線ベクトルとは何か考えよ.)  
球面、接平面、法線を含む図も示せ。



- 3  $\mathbb{R}^3$  の原点  $O$  を中心とする球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  上の点  $(1, 1, 2)$  での接平面を求めよ。

- 解 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  上の点  $(1, 1, 2)$  での法線ベクトルは  $(1, 1, 2)$  であるから,  
接平面 :  $x + y + 2z = 6$  .

## B. 接平面と法線

関数  $f(x, y)$  を開集合  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  で  $C^1$  級 (偏導関数  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  が連続である) とし,

$$c = f(a, b), \quad \alpha = f_x(a, b), \quad \beta = f_y(a, b) \quad ((a, b) \in D)$$

とする. 曲面  $z = f(x, y)$  上の点  $P(a, b, c)$  でこの曲面に接する平面を求めるために,  $P(a, b, c)$  に近い曲面上の二点  $P_h(a+h, b, f(a+h, b))$  と  $P_k(a, b+k, f(a, b+k))$  ( $hk \neq 0$ ) を考え, 三点  $P, P_h, P_k$  を通る平面  $\pi_{h,k}$  を求める:

$$\pi_{h,k} : z - c = \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}(x - a) + \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}(y - b).$$

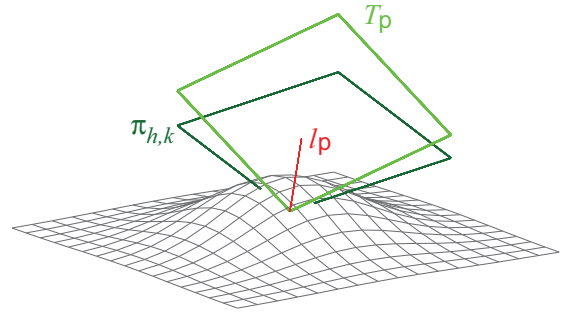
ここで  $h, k \rightarrow 0$  として二点  $P_h, P_k$  を点  $P$  に近づけると, この  $\pi_{h,k}$  はつぎの平面  $T_P$  に近づく:  
平面の方程式

$$T_P : z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

平面  $T_P$  を (曲面  $z = f(x, y)$  上の) 点  $P(a, b, c)$

での曲面  $z = f(x, y)$  の接平面という,

$$T_P : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\forall s, t \in \mathbf{R})$$



とベクトル表示することもできる.

(曲面  $z = f(x, y)$  上の) 点  $P(a, b, c)$  での曲面  $z = f(x, y)$  の法線  $l_P$  のパラメータ表示は

$$l_P : \begin{cases} x - a = t f_x(a, b) \\ y - b = t f_y(a, b) \\ z - c = -t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbf{R}).$$

曲面  $z = f(x, y)$  上の点  $P(a, b, c)$  での法線  $l_P$  のベクトル表示は

$$l_P : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbf{R}), \quad N_P = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる.  $N_P$  を法 (線) ベクトルという.

$f_x(a, b)f_y(a, b) \neq 0$  の場合, 法線  $l_P$  の方程式は

$$l_P : \frac{x - a}{f_x(a, b)} = \frac{y - b}{f_y(a, b)} = \frac{z - c}{-1}.$$

例  $\mathbf{R}^3$  の原点  $O$  を中心とする球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  上の点  $(1, 1, 2)$  での接平面 .

球面上の点  $(1, 1, 2)$  は上半球  $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$  上の点  $(1, 1, 2)$  であるから ,

$$z_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}, \quad z_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}$$

より

$$z_x(1, 1) = -\frac{1}{2}, \quad z_y(1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

上半球上の点  $(1, 1, 2)$  での接平面は

$$z - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) \quad , \text{すなわち} \quad z = -\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + 3. \quad //$$

4 曲面  $z = x^2 + y^2$  上の点  $(1, 1, 2)$  での接平面を求めよ .

解  $z_x(x, y) = 2x$  ,  $z_y(x, y) = 2y$

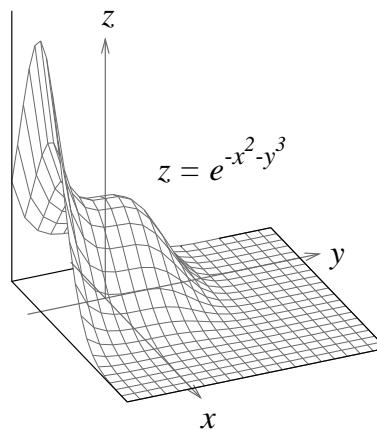
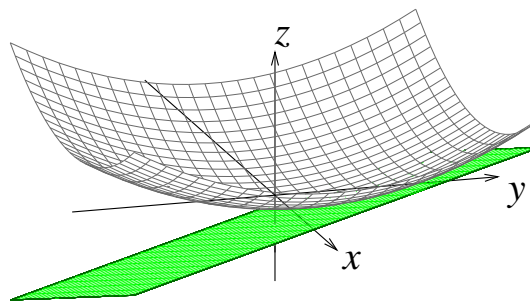
であるから ,  $z_x(1, 1) = 2$  ,  $z_y(1, 1) = 2$  .

曲面  $z = x^2 + y^2$  上の点  $(1, 1, 2)$  での

接平面の方程式 :  $z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$  ,

すなわち  $z = 2x + 2y - 2$  . //

5 関数  $g(x, y) = e^{-x^2 - y^3}$  を考える . 曲面  $z = g(x, y)$  上の任意の点  $(a, b, g(a, b))$  での法線を求めよ . 特に , 点  $(a, b) = (0, -0.6)$  の場合を求めよ .



### C. パラメータ表示された空間曲線

空間  $\mathbf{R}^3$  にあるパラメータ表示された空間曲線  $\gamma$  を考える :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}^3 \quad (a \leq t \leq b) ,$$

ただし  $x(t), y(t), z(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) は  $C^1$  級関数である .

曲線  $\gamma$  上の二点  $\gamma(t), \gamma(t+h)$  を結ぶ直線  $l_h$  は ,  $X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  と置くと  $h \neq 0$  のとき

$$l_h : X = \gamma(t) + s \cdot \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \quad (-\infty < s < \infty)$$

と表される . このことから , ベクトル  $\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$  ( $\in \mathbf{R}^3$ ) の  $h \rightarrow 0$  とする時の極限に現

れるベクトル

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} \right) \\ &= (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad (\in \mathbf{R}^3)\end{aligned}$$

は,  $\gamma'(t) \neq 0$  の場合には曲線  $\gamma$  の点  $\gamma(t)$  での接線の傾きを表すベクトル  $T$  と考えられる. ベ

クトル  $T$  を曲線  $\gamma$  の点  $\gamma(t)$  での接ベクトルといい, 直線  $l_T : \begin{cases} x = x(t) + s x'(t) \\ y = y(t) + s y'(t) \\ z = z(t) + s z'(t) \end{cases} \quad (s \in \mathbf{R})$

を接線という. すなわち,  $X = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  を使って表すと

$$\text{接線} \quad l_T : X = \gamma(t) + s T \quad (s \in \mathbf{R}), \quad \text{ここで} \quad T = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

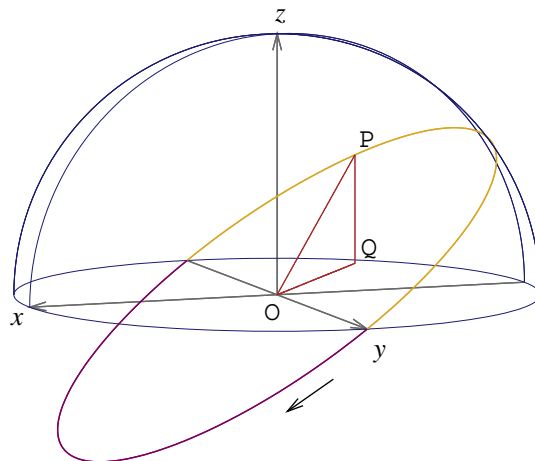
このことは 4.3 偏微分 C. 偏微分係数の幾何学的意味 で述べたことと矛盾しない.

6 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  と平面  $(\tan \delta_0) x + z = 0$  の交わってできる円周上にある点  $P(x, y, z)$  を考える ( $0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2}$ ).

(1) 点  $P$  から  $xy$  平面へおろした垂線の足を点  $Q$  とする. 原点  $O$  から点  $P$  を見上げる角  $\delta = \angle POQ$  を表す関数  $\delta(x, y, z)$  を示せ.

(2) この円周上を点  $P$  が周期  $T$  で (時計回りに) 等速運動しているとき, 点  $P$  の位置  $(x(t), y(t), z(t))$  を求めて,  $xy$  平面から点  $P$  を見上げる角  $\delta = \angle POQ$  を表す関数  $\delta(t)$  を求めよ.

ただし,  $x(0) < 0, y(0) = 0, z(0) > 0$  とする.



#### D. パラメータ表示された曲面

パラメータ表示された平面の法(線)ベクトル

空間  $\mathbf{R}^3$  でのベクトルの内積と外積 :

一次独立なベクトル  $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$  のなす角を  $\theta$  とするとき,

$$\text{内積} \quad A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |A| |B| \cos \theta,$$

$$\text{外積} \quad A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \in \mathbf{R}^3.$$

$$(A \times B) \cdot A = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

$$(A \times B) \cdot B = b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

が成り立っているから, 外積  $A \times B$  はベクトル  $A, B$  で張られる平面  $\pi = \{sA + tB \mid s, t \in \mathbf{R}\}$  と直行している. すなわち  $A \times B$  は平面  $\pi$  の法ベクトルであり, 平面  $\pi$  の点  $X = (x, y, z)$  は内積による方程式  $(A \times B) \cdot X = 0$  を満たす.  $A \times B$  は点  $C = (c_1, c_2, c_3)$  を通る (平面  $\pi$  に平行な) 平面  $\pi_C = \{sA + tB + C \mid s, t \in \mathbf{R}\}$  の法ベクトルでもあるから, 平面  $\pi_C$  の点  $X = (x, y, z)$  は内積による方程式  $(A \times B) \cdot (X - C) = 0$  を満たす.

パラメータ表示された曲面  $S$  の接平面と法線

空間  $\mathbf{R}^3$  にある曲面  $S$  のパラメータ表示を考える:

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbf{R}^3 \quad ((u, v) \in D),$$

ただし  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) は平面領域  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  で定義された  $C^1$  級関数.

曲面  $S$  上の点

$$X(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) \in \mathbf{R}^3 \quad ((u_0, v_0) \in D)$$

を考えると,

$$\text{平面 } T : \begin{cases} x = x(u_0, v_0) + sx_u(u_0, v_0) + tx_v(u_0, v_0) \\ y = y(u_0, v_0) + sy_u(u_0, v_0) + ty_v(u_0, v_0) \\ z = z(u_0, v_0) + sz_u(u_0, v_0) + tz_v(u_0, v_0) \end{cases} \quad (s, t \in \mathbf{R}).$$

が曲面  $S$  の接平面である. すなわち,

$$X_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)) \in \mathbf{R}^3$$

$$X_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0)) \in \mathbf{R}^3$$

に対して,

$$T : X = X(u_0, v_0) + sX_u(u_0, v_0) + tX_v(u_0, v_0) \quad (s, t \in \mathbf{R}).$$

この平面  $T$  が曲面  $S$  の接平面と考えられる理由を考えてみよう. ひとつには, パラメーター表示された曲面の接平面の考えは, 関数  $f(x, y)$  のグラフである曲面  $z = f(x, y)$  の接平面と法ベクトルの考えの拡張になっているからである - 問題 4.4 2.

さて, この曲面  $S$  上の曲線  $\gamma(t)$  が曲面  $S$  のパラメータ表示

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbf{R}^3 \quad ((u, v) \in D)$$

によって,

$$\gamma(t) = X(u_0 + at, v_0 + bt) \in \mathbf{R}^3 \quad (0 \leq t < \exists \epsilon)$$

と表されているとする. 曲線  $\gamma$  の  $\gamma(0)$  での接線の傾きは

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \frac{d}{dt} X(u_0 + at, v_0 + bt) \Big|_{t=0} \\ &= \left( ax_u(u_0, v_0) + bx_v(u_0, v_0), ay_u(u_0, v_0) + by_v(u_0, v_0), az_u(u_0, v_0) + bz_v(u_0, v_0) \right) \\ &= aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0) \in \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

この曲線  $\gamma$  の  $\gamma(0)$  での接線は

$$l_T : X = \gamma(0) + t \gamma'(0) = X(u_0, v_0) + taX_u(u_0, v_0) + tbX_v(u_0, v_0) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

これは 曲線  $\gamma$  の  $\gamma(0)$  での接線  $l_T$  が平面  $T$  に含まれていることを示している．逆に，平面  $T$  のベクトルは曲面  $S$  上のある曲線の接ベクトルであると考えられる．このことは平面  $T$  を曲面  $S$  の接平面と考えてよいということを示している．

曲面  $S$  上の点

$$X(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) \in \mathbf{R}^3 \quad ((u_0, v_0) \in D)$$

での接平面は

$$T : X = X(u_0, v_0) + s X_u(u_0, v_0) + t X_v(u_0, v_0) \quad (s, t \in \mathbf{R})$$

であるから，

$$\begin{aligned} N &= X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc|cc} y_u(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) & x_u(u_0, v_0) & x_v(u_0, v_0) \\ z_u(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) & x_u(u_0, v_0) & x_v(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{array} \right) \end{aligned}$$

が法線ベクトル，

$$l_N : X = X(u_0, v_0) + t N \quad (t \in \mathbf{R})$$

が法線である．

#### 問題 4.4

1 (参考. 4.1 二変数関数と曲面 C. 空間曲線や曲面のパラメータ表示)

$$\text{Helicoid} \quad \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = 2v \quad (0 \leq u \leq 1, -\infty < v < \infty) \end{cases}$$

の接平面と法線ベクトルを求めよ．

2 関数  $f(x, y)$  を開集合  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  で  $C^1$  級とする．曲面  $z = f(x, y)$  はパラメータ表示された曲面  $X(x, y) = (x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3 \quad ((x, y) \in D)$  と考えることもできる．

B. 接平面と法線 における曲面  $S : z = f(x, y) \quad ((x, y) \in D)$  の接平面および法線の表示と

D. パラメータ表示された曲面 におけるパラメータ表示された曲面

$$S : X(x, y) = (x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3 \quad ((x, y) \in D)$$

の接平面と法線の表示は同一の平面と直線を与えていることを示せ．

## 4.5 合成関数の偏微分

### A. 合成関数の偏微分

**問題** 関数  $q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  とする.  $A, B, C$  は定数である. 任意の  $(a, b) \neq (0, 0)$

に対して, 関数  $\varphi(t) = q(at, bt)$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) を考える.  $\varphi'(t), \varphi''(t)$  を求めよ.

### B. 基本事項

**定理 1** 関数  $f(x, y)$  は開集合  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  で  $C^1$  級 (偏導関数  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  が連続である) とする.

$$\alpha = f_x(a, b), \quad \beta = f_y(a, b) \quad ((a, b) \in D)$$

$$\epsilon(h, k) = \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \alpha h - \beta k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくと,

$$(*) \quad \begin{cases} f(a+h, b+k) = f(a, b) + \alpha h + \beta k + \sqrt{h^2 + k^2} \epsilon(h, k) \\ \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \epsilon(h, k) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ.

関数  $f(x, y)$  は,  $(a, b) \in D$  で条件 (\*) を満たすとき,  $(a, b)$  で (全) 微分可能といわれる.

注. この定理は (全) 微分可能な関数  $f(x, y)$  のグラフとして与えられる曲面の接平面は接点  $(a, b, f(a, b))$  の近くで関数  $f(x, y) - f(a, b)$  の一次近似

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

を与えるものだけということを示している. この意味での接平面の表現として, いわゆる微分式

$$dz = f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy$$

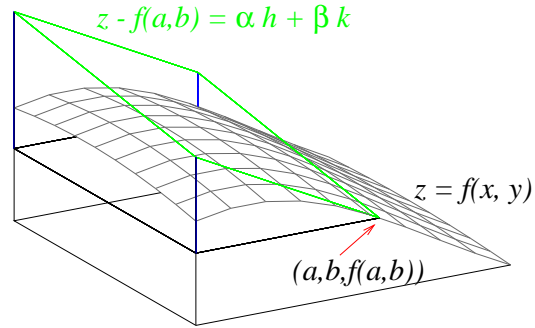
があり,  $df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$  を関数  $f(x, y)$  の微分 (形) 式という.

**定理 2** 関数  $f(x, y)$  は微分可能 (又は  $C^1$  級) とする.  $x(t), y(t)$  が微分可能のとき,

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

が成り立つ (合成関数  $f(x(t), y(t))$  の微分法則).

**定理 3** 関数  $z = f(x, y)$  は微分可能 (又は  $C^1$  級) で  $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$  が偏微分可能



$((h, k) \neq (0, 0))$



とする . このとき , 合成関数  $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$  は偏微分可能で

$$\begin{cases} z_u = z_x x_u + z_y y_u \\ z_v = z_x x_v + z_y y_v \end{cases}, \text{すなわち} \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}.$$

精確には , 定理 2 により つぎの計算が成り立つからである .

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\varphi(u, v), \psi(u, v))}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial f(\varphi(u, v), \psi(u, v))}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \end{cases} //$$

二変数関数関数  $x = \varphi(u, v)$  ,  $y = \psi(u, v)$  が  $u, v$ -平面のある領域から  $x, y$ -平面の領域への写像  $T$  を与えると考えよう :

$$T : (u, v) \longrightarrow (x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

写像  $T$  は偏微分可能 , すなわち 二変数関数関数  $x = \varphi(u, v)$  ,  $y = \psi(u, v)$  が偏微分可能とする . このとき 行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

をヤコビアン (Jacobian, 関数行列式) といい ,  $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$  や  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  または  $J_T(u, v)$  で表す .

定理 4 写像  $F : (r, s) \longrightarrow (u, v) = (\lambda(r, s), \mu(r, s))$  および

$G : (u, v) \longrightarrow (x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$  が偏微分可能とすると , 合成写像

$$G \circ F : (r, s) \longrightarrow (x, y) = (\varphi(\lambda(r, s), \mu(r, s)), \psi(\lambda(r, s), \mu(r, s)))$$

は偏微分可能で

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}, \quad \text{すなわち} \quad J_{G \circ F} = J_G \cdot J_F$$

が成り立つ .

証明 定理 3 より 偏導関数の関係式

$$\begin{cases} \varphi_r = \varphi_u \lambda_r + \varphi_v \mu_r \\ \varphi_s = \varphi_u \lambda_s + \varphi_v \mu_s \end{cases} \quad \text{そして} \quad \begin{cases} \psi_r = \psi_u \lambda_r + \psi_v \mu_r \\ \psi_s = \psi_u \lambda_s + \psi_v \mu_s \end{cases}$$

が成り立つから , 行列の積の関係

$$\begin{pmatrix} \varphi_r & \varphi_s \\ \psi_r & \psi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_r & \lambda_s \\ \mu_r & \mu_s \end{pmatrix}$$

が成り立つ . 行列式をとって , 定理を得る . //

### C. 巧みな計算

極座標変換 関数  $z = f(x, y)$  を  $C^1$  級とし, 極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  を考える.

このとき,  $z = z(r, \theta) = z(r \cos \theta, y = r \sin \theta)$  と考えると,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = z_x \cos \theta + z_y \sin \theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = z_x(-r \sin \theta) + z_y(r \cos \theta) . \end{cases}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$$

が成り立っている. このことから

$$\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix} .$$

一方,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} , \end{cases}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & \theta_x \\ r_y & \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix}$$

が成り立っているから, 次の関係式が成り立つと予想される.

$$\boxed{1} \quad \begin{cases} r_x = \cos \theta, & r_y = \sin \theta \\ \theta_x = -\frac{\sin \theta}{r}, & \theta_y = \frac{\cos \theta}{r} . \end{cases}$$

$$\boxed{\text{証明}} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{および} \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} & (x > 0) \\ \pi + \tan^{-1} \frac{y}{x} & (x < 0) \end{cases} \quad \text{から,}$$

$$\begin{cases} r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta, & r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \theta_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \theta_y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad // . \end{cases}$$

$$\boxed{2} \quad (z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \frac{1}{r^2}(z_\theta)^2 .$$

$$\text{何故ならば, } (z_x)^2 + (z_y)^2 = \left( z_r \cos \theta - \frac{z_\theta \sin \theta}{r} \right)^2 + \left( z_r \sin \theta + \frac{z_\theta \cos \theta}{r} \right)^2 = (z_r)^2 + \frac{1}{r^2}(z_\theta)^2 .$$

#### D. 定理の証明

**定理 1 の証明** 関数  $f(x, y)$  を  $C^1$  級とする .

$(h, k) \neq (0, 0)$  として,  $\Delta f = f(x+h, y+k) - f(x, y)$  を考える .

$$\Delta f = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y)$$

と表わされる .

$y+k$  を固定して  $x$  の関数  $\varphi(x) = f(x, y+k)$  を考えると, 平均値の定理から,

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi'(x+\theta_1 h)h = hf_x(x+\theta_1 h, y+k)$$

が成り立つ . 同様に  $x$  を固定して  $y$  の関数  $\psi(y) = f(x, y)$  を考えると, 平均値の定理から,

$$f(x, y+k) - f(x, y) = \psi(y+k) - \psi(y) = \psi'(y+\theta_2 k)k = kf_y(x, y+\theta_2 k)$$

が成り立つ . こうして

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y) \\ &= hf_x(x+\theta_1 h, y+k) + kf_y(x, y+\theta_2 k) \quad (0 < \exists \theta_1, \exists \theta_2 < 1) \end{aligned}$$

が成り立つ . さて,

$$\epsilon_1 = f_x(x+\theta_1 h, y+k) - f_x(x, y)$$

$$\epsilon_2 = f_y(x, y+\theta_2 k) - f_y(x, y)$$

とおくと,

$$\Delta f = hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + h\epsilon_1 + k\epsilon_2.$$

このとき, Cauchy-Schwarz 不等式

$$|h\epsilon_1 + k\epsilon_2| \leq \sqrt{h^2 + k^2} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}$$

が成り立っている .

$f_x(x, y)$  と  $f_y(x, y)$  は連続であるから,  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon_1 = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon_2 = 0$  より

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} = 0$$

が成り立ち,

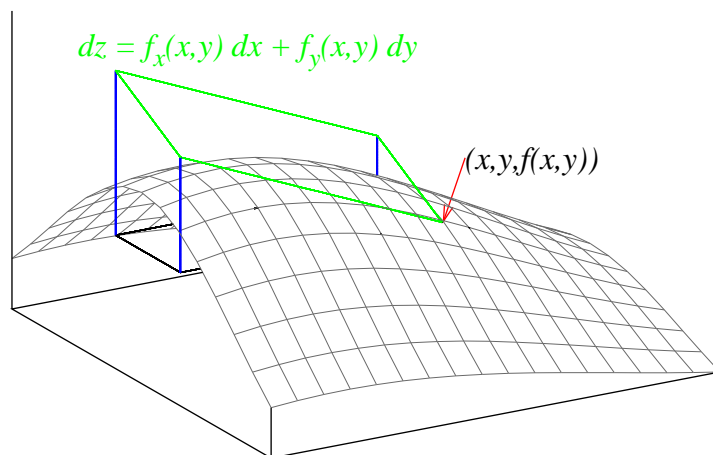
$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h\epsilon_1 + k\epsilon_2|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

となる . こうして,

$\forall a$  と  $\forall b$  に対して,  $\alpha = f_x(a, b)$  と  $\beta = f_y(a, b)$  とおくと,

$$\frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \alpha h - \beta k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \quad ((h, k) \rightarrow (0, 0))$$

が成り立つ . //



定理 2 の証明

関数  $f(x, y)$  を  $C^1$  級,  $x(t), y(t)$  を微分可能とする.

一変数関数  $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$  を考える.

このとき

$$\begin{cases} x = x(t), & y = y(t) \\ h = x(t + \delta) - x(t), & k = y(t + \delta) - y(t) \\ \alpha = f_x(x, y), & \beta = f_y(x, y) \end{cases}$$

とおくと,

$$\varphi(t + \delta) - \varphi(t) = f(x(t + \delta), y(t + \delta)) - f(x(t), y(t)) = f(x + h, y + k) - f(x, y)$$

であるから,

$$\frac{\varphi(t + \delta) - \varphi(t) - \alpha h - \beta k}{\delta} = \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y) - \alpha h - \beta k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\delta}.$$

関数  $x(t), y(t)$  は微分可能であるから,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{h}{\delta} = x'(t) \quad \text{と} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{k}{\delta} = y'(t) \quad \text{は有限な実数値であり,}$$

$$0 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\delta} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} < \infty.$$

定理 1 の証明 で示したように

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y) - \alpha h - \beta k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

あるから,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \delta) - \varphi(t) - \alpha h - \beta k}{\delta} = 0$$

となる. 明らかに,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \delta) - \varphi(t) - \alpha h - \beta k}{\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \delta) - \varphi(t)}{\delta} - \alpha \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{h}{\delta} - \beta \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{k}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \delta) - \varphi(t)}{\delta} - \alpha x'(t) - \beta y'(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

これは,

$$\varphi'(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \delta) - \varphi(t)}{\delta} = \alpha x'(t) + \beta y'(t)$$

を示している. //

定理 2n  $n$  変数関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が微分可能 (又は  $C^1$  級) で  $n$  個の関数  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

が微分可能のとき, つぎが成り立つ:

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) x_i'(t).$$

問題 4.5

1 関数  $f(x, y)$  を  $C^1$  級とする .  $f_y(x, y) = 0$  のとき ,  $f(x, y) = \varphi(x)$  と表される .  
(すなわち ,  $f(x, y)$  は  $x$  だけで決まる関数である .)

2 関数  $f(x, y)$  を  $C^1$  級とする .  $xf_x(x, y) - yf_y(x, y) = 0$  ( $xy \neq 0$ ) のとき ,  
 $z = f(x, y)$  は  $xy$  だけの関数である .  
Hint. 座標変換  $u = xy, v = y$  ( $uv \neq 0$ ) の下で ,  $z(u, v) = f\left(\frac{u}{v}, v\right)$  を調べる .

3 関数  $f(x, y)$  を  $C^1$  級とする .  $xf_y(x, y) - yf_x(x, y) = 0$  ( $(x, y) \neq (0, 0)$ ) のとき ,  
 $z = f(x, y)$  は  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  だけの関数である .

4 関数  $u(x, y)$  を  $C^1$  級とし , 二階の偏導関数  $u_{xy}(x, y) = 0$  とする .  
このとき ,  $u(x, y) = f(x) + g(y)$  と表される .

5 すべての  $t > 0$  に対して  $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$  となるとき , 関数  $f(x, y)$  は  $m$  次同  
次関数と呼ばれる . 関数  $f(x, y)$  が  $(0, 0) (\in \mathbf{R}^2)$  を除き  $C^1$  級であるとする .  
関数  $f(x, y)$  が  $m$  次同次関数であるための必要十分条件は

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = mf(x, y) , \text{ すなわち}$$

$$af_x(a, b) + bf_y(a, b) = mf(a, b) \quad ((a, b) \in \mathbf{R}^2)$$

が成立することである .

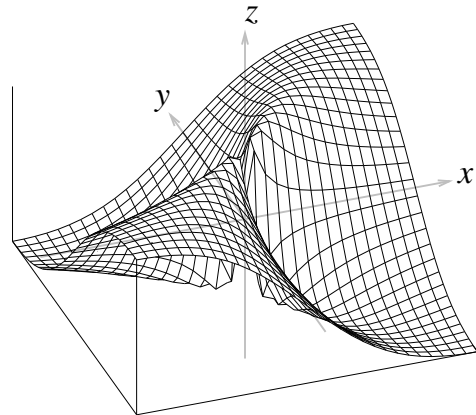
6 つぎの関数の同次性を確かめ , その次数を決定せよ .

(1)  $\sqrt{x+y}$       (2)  $\frac{xy}{x+y}$       (3)  $\frac{x^2 - y^2}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$       (4)  $\frac{e^{\frac{y}{x}}}{x^2 + y^2}$

7 関数  

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ の場合} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ の場合} \end{cases}$$
 は  $\mathbf{R}^2$  で偏微分可能であるが , 原点  $(0, 0)$  で  
連続でないことを示せ .

右図は  $z = f(x, y)$  のグラフ



8 関数  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$  (参照 4.2 例 2) は平面  $\mathbf{R}^2$  で  $C^1$  級と考えられることを示せ .

## 4.6 高階偏導関数

### A. 高階偏導関数

**定理 1** 関数  $f(x, y)$  の偏導関数  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$ ,  $f_{xy}(x, y)$ ,  $f_{yx}(x, y)$  が連続のとき,  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  が成り立つ.

この定理 1 は, 二階以上の偏導関数が存在して連続関数である場合, 偏導関数の計算は偏微分の順序によらないことを意味している; 例えば,  $f_{xyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y) = f_{xxy}(x, y)$ , また  $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$  等.

領域  $D$  で定義された関数  $f(x, y)$  が  $D$  の各点で  $n$  回偏微分可能で, その  $n$  階までのすべての  $k$  階偏導関数 ( $k \leq n$ ) が  $D$  で連続であるとき, 関数  $f(x, y)$  は領域  $D$  で  $C^n$  級であると言う. また, 関数  $f(x, y)$  が  $D$  で何回でも微分可能であるとき, 関数  $f(x, y)$  は領域  $D$  で  $C^\infty$  級であると言う: この場合, 微分可能関数の連続性 (4.5 B. **定理 1**) により,  $n$  階偏導関数

$$\frac{\partial^n}{\partial x^i \partial y^{n-i}} f(x, y) = \frac{\partial^n}{\partial y^{n-i} \partial x^i} f(x, y) \text{ 等は } D \text{ で連続である } (i = 0, 1, \dots, n).$$

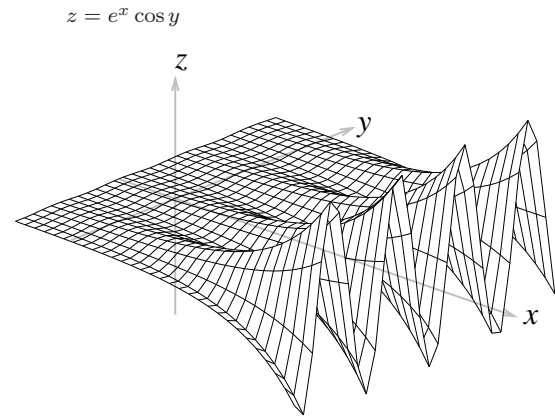
### B. 基本事項と例

**1** 関数  $f(x, y) = e^x \cos y$  の二階偏導関数

$f_{xx}(x, y)$ ,  $f_{yy}(x, y)$  を求め,

$$\Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$$

を計算しなさい.



$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  はラプラシアン (Laplacian) と

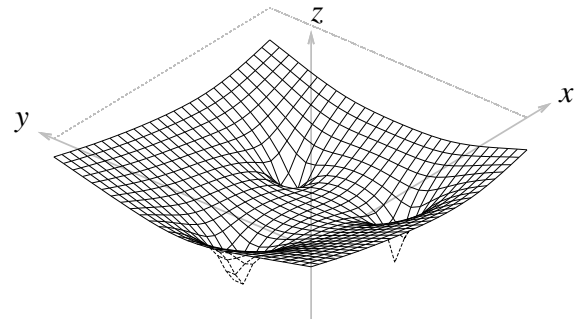
呼ばれる. また ラプラスの方程式  $\Delta f(x, y) = 0$

を満たす関数  $f(x, y)$  は調和関数と呼ばれる.

例えば  $\frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $e^x \cos y$ ,  $e^x \sin y$ ,

$$\tan^{-1} \frac{y}{x}, \log \sqrt{x^2 + y^2}.$$

右上図は



$$z = \log \sqrt{(x - 0.25)^2 + (y - 0.50)^2} + \log \sqrt{(x - 0.75)^2 + (y - 0.71)^2} + \log \sqrt{(x - 0.75)^2 + (y - 0.29)^2}.$$

2 関数  $z = f(x, y)$  を  $C^2$  級とする．  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  の時，次を示せ：

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{z_r}{r} + \frac{z_{\theta\theta}}{r^2} .$$

証明 (4.5 C. 極座標変換を参照すると)  $\begin{cases} z_x = z_r \frac{x}{r} - z_\theta \frac{y}{r^2} \\ z_y = z_r \frac{y}{r} + z_\theta \frac{x}{r^2} \end{cases}$  であるから，

$$\begin{aligned} z_{xx} &= (z_{rr}r_x + z_{r\theta}\theta_x)\frac{x}{r} + z_r\frac{y^2}{r^3} - (z_{\theta r}r_x + z_{\theta\theta}\theta_x)\frac{y}{r^2} - z_\theta\frac{-2xy}{r^4} \\ &= z_{rr}\frac{x^2}{r^2} - 2z_{r\theta}\frac{xy}{r^3} + z_{\theta\theta}\frac{y^2}{r^4} + z_r\frac{y^2}{r^3} + z_\theta\frac{2xy}{r^4} \\ z_{yy} &= (z_{rr}r_y + z_{r\theta}\theta_y)\frac{y}{r} + z_r\frac{x^2}{r^3} + (z_{\theta r}r_y + z_{\theta\theta}\theta_y)\frac{x}{r^2} + z_\theta\frac{-2xy}{r^4} \\ &= z_{rr}\frac{y^2}{r^2} + 2z_{r\theta}\frac{xy}{r^3} + z_{\theta\theta}\frac{x^2}{r^4} + z_r\frac{x^2}{r^3} - z_\theta\frac{2xy}{r^4} . \end{aligned}$$

したがって，

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr}\frac{x^2}{r^2} + z_{rr}\frac{y^2}{r^2} + z_{\theta\theta}\frac{y^2}{r^4} + z_{\theta\theta}\frac{x^2}{r^4} + z_r\frac{y^2}{r^3} + z_r\frac{x^2}{r^3} = z_{rr} + \frac{z_r}{r} + \frac{z_{\theta\theta}}{r^2} . \quad //$$

### C. 巧みな計算

円柱座標変換 関数  $u = f(x, y, z)$  を  $C^2$  級とし，円柱座標系で

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (0 < \rho, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty)$$

と考える．このとき，4.5 合成関数の偏微分 C. 巧みな計算 2 と上に述べた 2 から  
つぎが成り立つことがわかる：

$$\begin{aligned} (1) \quad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 &= u_\rho^2 + \left(\frac{u_\varphi}{\rho}\right)^2 + u_z^2 . \\ (2) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= u_{\rho\rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{\rho^2} + u_{zz} . \end{aligned}$$

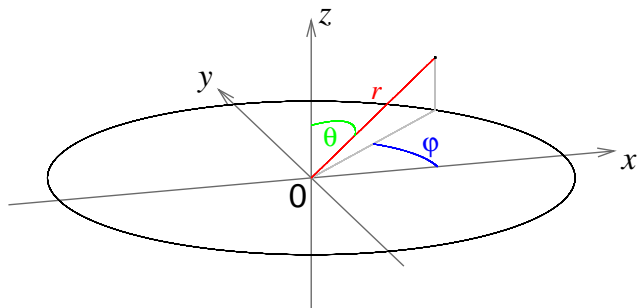
3 関数  $u = f(x, y, z)$  を  $C^2$  級とし，極座標変換 (球座標変換)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (0 < r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

を考える．つぎの (1), (2) を示せ：

(1)

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u_r^2 + \left(\frac{u_\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{u_\varphi}{r \sin \theta}\right)^2 .$$



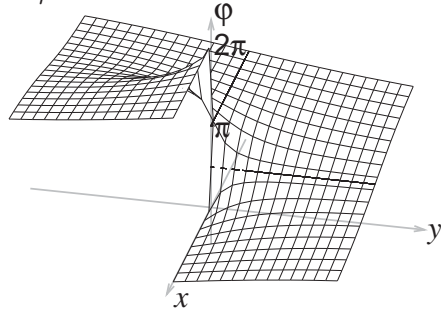
$$\begin{aligned}
(2) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= u_{rr} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} + 2\frac{u_r}{r} + \cot \theta \frac{u_\theta}{r^2} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.
\end{aligned}$$

**証明** (1)  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r}$ ,  $\varphi = \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  から計算で,

$$\begin{cases} r_x = \frac{x}{r}, & r_y = \frac{y}{r}, & r_z = \frac{z}{r} \\ \theta_x = \frac{xz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}}, & \theta_y = \frac{yz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}}, & \theta_z = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} \\ \varphi_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, & \varphi_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, & \varphi_z = 0. \end{cases}$$

そして

$$\begin{cases} u_x = u_r \frac{x}{r} + u_\theta \frac{xz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} - u_\varphi \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ u_y = u_r \frac{y}{r} + u_\theta \frac{yz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} + u_\varphi \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ u_z = u_r \frac{z}{r} - u_\theta \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} \end{cases}$$



と  $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u_r^2 + \left(\frac{u_\theta}{r}\right)^2 + \left(\frac{u_\varphi}{r \sin \theta}\right)^2$  を示す。

[0, 2π) に値をとる φ のグラフ

## (2) 円柱座標変換

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (0 < \rho, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty)$$

を考えると, [2] から  $u(\rho, \varphi, z)$  に対して つぎが成り立つことがわかる:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{\rho\rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{\rho^2} + u_{zz}.$$

座標変換  $\rho = r \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ ,  $\varphi = \varphi$  ( $0 < r, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ) を考えると,

$u(r, \theta, \varphi)$  に対して

$$u_{\rho\rho} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}, \quad \frac{u_\rho}{\rho} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( u_r \sin \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{r} \right) = \frac{u_r}{r} + \cot \theta \frac{u_\theta}{r^2}$$

であるから, 次のように計算される:

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{u_r}{r} + \cot \theta \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} \\
&= u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \cot \theta \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad //
\end{aligned}$$



注意 .  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  はラプラシアン (Laplacian) と呼ばれ , ラプラスの方程式  $\Delta f(x, y, z) = 0$  を満たす関数  $f(x, y, z)$  は調和関数と呼ばれる . 例 .  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  ,  $\sin 3x \sin 4y \sinh 5z$  .

#### D. 定理 1 の証明

**定理 1 の証明** 関数  $f(x, y)$  の二階偏導関数  $f_{xy}(x, y)$ ,  $f_{yx}(x, y)$  が連続であるとする .

任意の点  $(x_0, y_0)$  と  $(h, k) \neq (0, 0)$  に対して,

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

を考える .

$y_0, y_0 + k$  を固定して , 関数  $\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$  を考えると ,

$$\Delta = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) .$$

関数  $\varphi(x)$  は微分可能で

$$\varphi'(x) = f_x(x, y_0 + k) - f_x(x, y_0)$$

であるから , 平均値の定理により

$$\Delta = \varphi'(x_0 + \theta_1 h) h = (f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)) h \quad (0 < \theta_1 < 1) .$$

偏導関数  $f_{xy}(x, y)$  が存在するから , 変数  $y$  の関数  $\psi(y) = f(x_0 + \theta_1 h, y)$  は微分可能で

$$\psi'(y) = f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y) .$$

従って , 平均値の定理により ,

$$\Delta = (\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)) h = \psi'(y_0 + \theta_2 k) k h = f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) h k \quad (0 < \theta_2 < 1) .$$

こうして , 関数  $f_{xy}(x, y)$  の連続性から  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} = f_{xy}(x_0, y_0)$  が示される .

上と同様に ,  $x_0, x_0 + h$  を固定して , 関数  $\varphi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$  を考えると ,

$$\begin{aligned} \Delta &= \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) = \varphi'(y_0 + \theta'_1 k) k \\ &= (f_y(x_0 + h, y_0 + \theta'_1 k) - f_y(x_0, y_0 + \theta'_1 k)) k \quad (0 < \theta'_1 < 1) . \end{aligned}$$

変数  $x$  の関数  $\psi(x) = f_y(x, y_0 + \theta'_1 k)$  は微分可能で

$$\psi'(x) = f_{yx}(x, y_0 + \theta'_1 k)$$

であるから ,

$$\begin{aligned} \Delta &= (\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)) k = \psi'(x_0 + \theta'_2 h) h k \\ &= f_{yx}(x_0 + \theta'_2 h, y_0 + \theta'_1 k) h k \quad (0 < \theta'_2 < 1) . \end{aligned}$$

こうして , 関数  $f_{yx}(x, y)$  の連続性から  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} = f_{yx}(x_0, y_0)$  が示される . 故に ,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} = f_{yx}(x_0, y_0)$$

が証明された . //

問題 4.6

1 次関数の偏導関数  $z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}$  を求めよ:

(1)  $z = \frac{1}{(R^2 - x^2 - y^2)^\alpha}$

(2)  $z = \tan^{-1}(x + y)^2$

2 関数

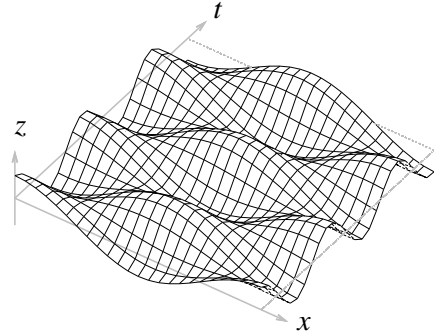
$$f(x, t) = A \cos(kx + \omega t) + B \cos(kx - \omega t)$$

$(A, B, k, \omega \in \mathbf{R})$

に対して,

$$f_{xx} + k^2 f = 0$$

が成り立つ.



$$z = 2 \cos(x + 4t) + 3 \cos(x - 4t)$$

3  $C^2$  級関数  $f(\zeta)$  と  $g(\zeta)$  および定数  $c$  と  $k$  に対して, 関数

$$u(x, t) = f(kx + ct) + g(kx - ct)$$

は

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

を満たす.

\* 注意 関数  $f(t)$  は微分可能,  $\varphi(x, y)$  は偏微分可能とする. このとき, 偏微分係数の定義と合成関数の微分法から  $f(\varphi(x, y))$  は偏微分可能で

$$\frac{\partial f(\varphi(x, y))}{\partial x} = f'(\varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(\varphi(x, y))}{\partial y} = f'(\varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}.$$

4  $u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$  となる  $C^2$  級関数  $u(x, t)$  はどんな関数か.

(Hint: 座標変換  $\xi = x + ct, \eta = x - ct$  の下で,  $z = u(x, t)$  に対して  $z_{\xi\eta} = 0$ .)

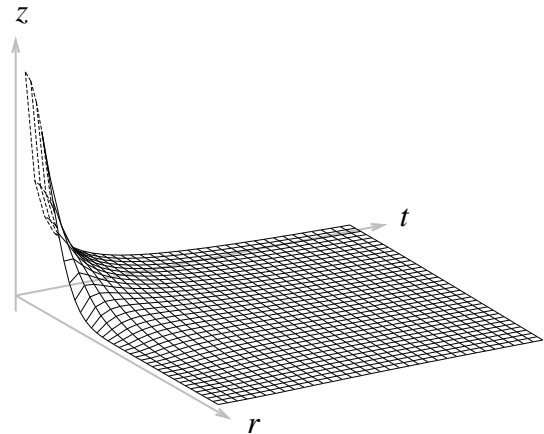
5 関数  $u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}$

を考える, ただし  $k (\neq 0)$  定数.

関数  $u(x, y, t)$  は熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = 0$$

を満たすことを示せ.



$$z = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

6  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  のとき,

(1)  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}$  を求めよ.

(2)  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{1}{r} = 0$  を示せ.

7 関数  $F(x, y, z)$  が,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  の関数  $f(r)$  によって  $F(x, y, z) = f(r)$  と現されるとき,

(1)  $\Delta F(x, y, z) = \Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$  を示せ.

(2)  $f(r) = r^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ ),  $\log r$  に対して  $\Delta f(r)$  を求めよ.

8 一変数関数  $f(x)$  を  $C^1$  級とし

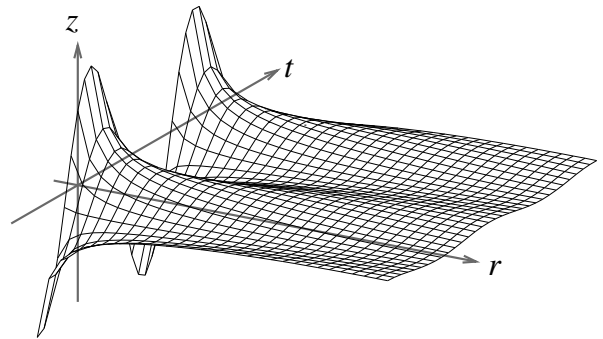
$$u(x, y, z, t) = \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

と定義する ( $c \neq 0$ ).

関数  $u(x, y, z, t)$  は波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$$

を満たすことを示せ (この  $u$  は速度  $c$  の球面波と言われる).



$$z = \frac{\cos(r - t)}{r} \quad (0 < r < \pi, -\pi < t < 2\pi)$$

9  $C^2$  級関数  $f(\zeta)$  と  $g(\zeta)$  および定数  $c$  と  $\lambda, \mu, \nu$  ( $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ) に対して, 関数

$$u(x, y, z, t) = f(\lambda x + \mu y + \nu z + ct) + g(\lambda x + \mu y + \nu z - ct)$$

は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$$

を満たす (この  $u$  は平面波であるといわれる).

10 (1) 定数  $\lambda, \mu$  ( $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ ) に対して,

関数  $u(x, y) = \cos(\lambda x + \mu y)$  は  $\Delta u = -u$  を満たす.

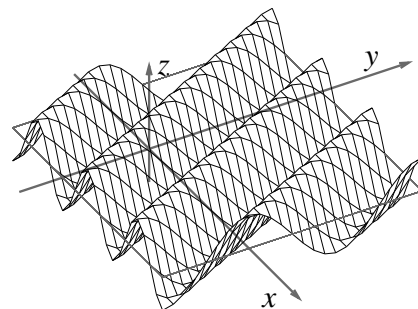
(2) 定数  $k, \lambda, \mu$  ( $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ ) に対して,

関数  $u(x, y, t) = e^{-kt} \cos(\lambda x + \mu y)$  は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = 0$$

を満たす.

$$z = \cos(2x + y)$$



## 4.7 テイラーの定理

### B. テイラー (Taylor) の定理とマクローリン (Maclaurin) の定理

関数  $f(x, y)$  を領域  $D (\subset \mathbb{R}^2)$  で  $C^n$  級とする. 4.6 A 定理 1 によつて,  $1 < p \leq n$  の場合

$p$  階偏導関数は  $\frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^p}, \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^{p-1} \partial y}, \dots, \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^{p-i} \partial y^i}, \dots, \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x \partial y^{p-1}}, \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial y^p}$  のどれか

に一致する. これらの  $p$  階偏導関数と定数  $h, k$  から得られる関数

$\sum_{i=0}^p {}_p C_i h^{p-i} k^i \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^{p-i} \partial y^i}$  を  $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x, y)$  と表す. この関数の  $(a, b) (\in D)$  での値を

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(a, b) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x, y) \Big|_{x=a, y=b} = \sum_{i=0}^p {}_p C_i h^{p-i} k^i \left[ \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-i} \partial y^i} \right] (a, b)$$

と表す. ここで  ${}_p C_i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$  は組み合わせの数である.

**テイラーの定理**  $f(x, y)$  を領域  $D (\subset \mathbb{R}^2)$  で  $C^n$  級とする.

領域  $D$  の点  $(a, b), (x, y)$  を結ぶ線分が  $D$  に含まれるとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = f(a, b) + \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) + \frac{1}{2!} \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \dots \\ \quad + \frac{1}{(n-1)!} \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(a, b) + R_n \\ R_n = \frac{1}{n!} \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b)) \quad (0 < \theta < 1) \quad \text{剰余項} \end{array} \right.$$

が成り立つ.  $T_{n-1}(x, y) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(a, b)$  を  $f(x, y)$  の  $(a, b)$  での  $n-1$

次 Taylor 多項式という.  $f(x, y)$  と  $T_{n-1}(x, y)$  の差の表現  $R_n$  は, 点  $(a, b)$  と  $(x, y)$  を結ぶ ( $D$  内の) 線分上の点  $(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b))$  ( $0 < \theta < 1$ ) で計算され, ラグランジェ(Lagrange) 型の剰余項と呼ばれている.

**マクローリンの定理**  $f(x, y)$  は原点  $(0, 0)$  を含む領域  $D (\subset \mathbb{R}^2)$  で  $C^n$  級とする.

領域  $D$  の点  $(0, 0), (x, y)$  を結ぶ線分が  $D$  に含まれるとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = f(0, 0) + \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(0, 0) + \frac{1}{2!} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(0, 0) + \dots \\ \quad + \frac{1}{(n-1)!} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(0, 0) + R_n \\ R_n = \frac{1}{n!} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(\theta x, \theta y) \quad (0 < \theta < 1) \quad \text{剰余項} \end{array} \right.$$

が成り立つ.

関数  $f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  を含む領域  $D$  で  $C^\infty$  級でテイラーの定理における剰余項  $R_n$  が ( $D$  の各点で)  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$  を満たす場合,  $f(x, y)$  はテイラー展開 ( $(a, b) = (0, 0)$  の場合には, マクローリン展開ともいう) で表される:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b).$$

関数  $f(x, y)$  に対して

$$\begin{aligned} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) &= h f_x(x, y) + k f_y(x, y), \\ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) &= h^2 f_{xx}(x, y) + 2hk f_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y), \\ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(x, y) &= h^3 f_{xxx}(x, y) + 3h^2k f_{xxy}(x, y) + 3hk^2 f_{xyy}(x, y) + k^3 f_{yyy}(x, y), \\ &\dots \end{aligned}$$

と書けることに注意して, 例を示す.

**例. 1** 関数  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$  の  $(x, y) = (1, 1)$  における 2 次の Taylor 多項式と剰余項

を求めよ.  $\begin{cases} f_x(x, y) = 2x - y, & f_y(x, y) = 2y - x \\ f_{xx}(x, y) = 2, & f_{xy}(x, y) = -1, & f_{yy}(x, y) = 2 \\ f_{xxx}(x, y) = f_{xxy}(x, y) = f_{xyy}(x, y) = f_{yyy}(x, y) = 0 \end{cases}$  であるから,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + (x-1) + (y-1) + \frac{1}{2!} \{ 2(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2 \} \\ &= 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)^2 - (x-1)(y-1) + (y-1)^2, \end{aligned}$$

剰余項  $R = 0$ .

**例. 2** 例えば, 関数  $f(x, y) = e^{x+y}$  の  $(x, y) = (0, 0)$  における Taylor 多項式と剰余項は

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{(x+y)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(\theta x + \theta y)^n}{n!}$$

となる. 何故ならば,  $\frac{\partial^{p+q} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = f(x, y) = e^{x+y}$  ( $p, q = 0, 1, 2, \dots$ ) であるから,

$$\frac{1}{k!} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(0, 0) = \frac{(x+y)^k}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

故に,  $\begin{cases} f(x, y) = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \dots + \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \\ R_n = \frac{(\theta x + \theta y)^n}{n!} \quad (0 < \exists \theta < 1). \end{cases}$

### C. 巧みな計算

**命題** 関数  $f(x, y)$  は点  $(a, b)$  の近くで  $C^n$  級とし,  $t = 0$  の近くで関数  $F(t) = f(a+ht, b+kt)$  を考える. このとき, 関数  $F(t)$  は  $C^n$  級であって,

$$F^{(p)}(t) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(a + ht, b + kt) \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

で計算される .

この公式は ,  $p$  階導関数  $F^{(p)}(t)$  は , 二変数関数

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y) = \sum_{i=0}^{i=p} {}^p C_i h^{p-i} k^i \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^{p-i} \partial y^i}$$

を求めた後 ,  $x = a + ht, y = b + kt$  を代入して

$$F^{(p)}(t) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y) \Big|_{x=a+ht, y=b+kt} = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(a + ht, b + kt)$$

と計算されることを示している .

**証明** 関数  $F(t) = f(a + ht, b + kt)$  の一階導関数

$$F'(t) = hf_x(a + ht, b + kt) + kf_y(a + ht, b + kt)$$

は , 明らかに ,

$$\frac{d}{dt} F(t) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \Big|_{x=a+ht, y=b+kt}$$

を満たしている (4.5 合成関数の偏微分 定理 2) .

ある番号  $p$  について

$$F^{(p)}(t) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y) \Big|_{x=a+ht, y=b+kt}$$

が成り立ったとすると ,

$$\begin{aligned} F^{(p+1)}(t) &= \frac{d}{dt} F^{(p)}(t) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y) \right\} \Big|_{x=a+ht, y=b+kt} \\ &= \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{p+1} f(x, y) \Big|_{x=a+ht, y=b+kt} \end{aligned}$$

が成り立つ . このことから , 帰納的に主張が示される . //

#### D. テイラー (Taylor) の定理の証明

関数  $f(x, y)$  を  $C^n$  級とする . 任意の点  $(a, b)$  と  $(h, k) \neq (0, 0)$  に対して ,  $t$  を変数とする関数

$$F(t) = f(a + th, b + tk) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

を考える . 関数  $F(t)$  は微分可能で Taylor の定理により

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{F^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n \quad (0 < \exists \theta < 1)$$

が成り立つから,

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}.$$

さて, 命題から

$$F^{(p)}(t) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(a + ht, b + kt)$$

が成り立つので,

$$\begin{cases} F^{(p)}(0) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(a, b) & (p = 0, 1, \dots, n-1) \\ F^{(n)}(\theta) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k) \end{cases}$$

を得る. したがって,  $t = 1$  として  $F(1)$  を計算して

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) + \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(a, b) + \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k) \\ &\quad (0 < \exists \theta < 1). \end{aligned}$$

$(x, y) = (a+h, b+k)$  の場合には  $h = x - a$ ,  $k = y - b$  と考えられるので,

$$\begin{cases} f(x, y) = f(a, b) + \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) + \frac{1}{2!} \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \cdots \\ \quad + \frac{1}{(n-1)!} \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(a, b) + R_n \\ R_n = \frac{1}{n!} \left( (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b)) \quad (0 < \exists \theta < 1) \end{cases}$$

が成り立つ.

#### 問題 4.7

1 関数  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  の  $x = 1$ ,  $y = 1$  における 3 次の Taylor 多項式と剰余項を求めよ.

2 関数  $f(x, y) = e^x \cos y$  の  $x = 0$ ,  $y = 0$  における 2 次の Taylor 多項式と剰余項を求めよ.

3 関数  $f(x, y) = e^{ax} \sin by$  ( $a, b \neq 0$ ) の  $x = 0$ ,  $y = \pi$  における 2 次の Taylor 多項式と剰余項を求めよ.

4 関数  $\varphi(x)$  は  $x = a$  の近くで  $C^n$  級,  $\psi(y)$  は  $y = b$  の近くで  $C^n$  級とする. 関数  $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  は  $(a, b)$  の近くで  $C^n$  級で

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y) = \sum_{i=0}^p {}_p C_i h^{p-i} k^i \varphi^{(p-i)}(x) \psi^{(i)}(y)$$

となることを示せ.

## 4.8 極値

### A. 極値

関数の値が変数の変化によってどう変化するかを調べるために、関数の最大値や最小値とは異なる極大値や極小値の考え方について述べて置こう。

定義 .

集合  $A$  で定義された関数  $f(x, y)$  が  $(x, y) = (x_0, y_0)$  で極大値を取る (極大となる) とは ある正の数  $\delta$  が在って

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \quad (x, y) \in A \implies f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

が成り立つことである .

集合  $A$  で定義された関数  $f(x, y)$  が  $(x, y) = (x_0, y_0)$  で極小値を取る (極小となる) とは ある正の数  $\delta$  が在って

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \quad (x, y) \in A \implies f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

が成り立つことである .

開集合  $O$  で定義された関数  $f(x, y)$  の最大値は極大値でありまた  $f(x, y)$  の最小値は極小値であるが、一般には、最大 (小) 値は極大 (小) 値とは限らない .

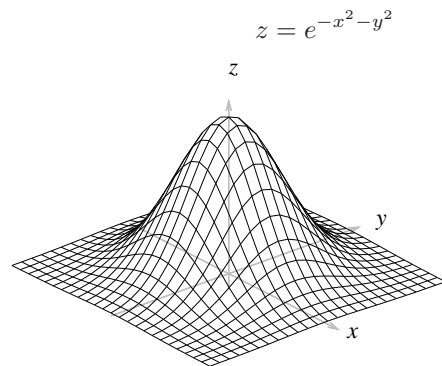
集合  $A$  で定義された関数  $f(x, y)$  が  $(x, y) = (x_0, y_0)$  で極大値や極小値を取るとき、関数  $f(x, y)$  は  $(x, y) = (x_0, y_0)$  で極値を取るといわれる .

#### 例 1

関数  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$  の極値については、

$$\begin{cases} f(x, y) = e^{-r^2} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\geq 0) \end{cases}$$

と表される事から、関数  $f(x, y)$  は  $(x, y) = (0, 0)$  で最大値  $f(0, 0) = 1$  をとることがわかる .



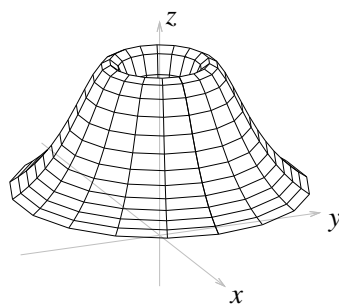
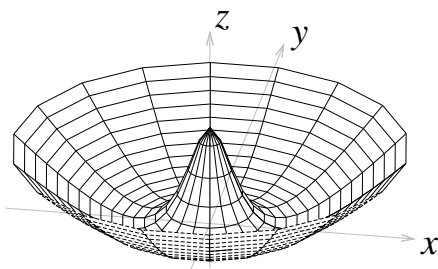
**問** 関数  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2} - 8 + \frac{16}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2}}$  の極値を調べよ .

関数  $f(x, y)$  のグラフ (次頁) を見れば、 $z = f(x, y)$  が極小値をとる点は円周上にあると予想される .

$g(x, y) = \frac{6\sqrt{x^2 + y^2}}{(1 + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}})^2}$  の場合はどうか .



$$z = f(x, y)$$



$$z = g(x, y)$$

## B. 極値の判定

### 1 二次形式

$$q(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \quad (\alpha \neq 0)$$

を考える.

$$q(x, y) = \alpha \left( x + \frac{\beta}{\alpha} y \right)^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\alpha} y^2$$

であるから,

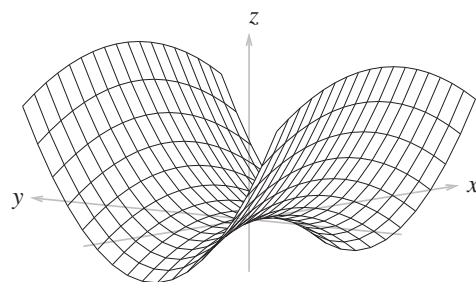
$$\begin{cases} \alpha > 0, \beta^2 - \alpha\gamma < 0 & \text{のとき, } q(x, y) \text{ は } (0, 0) \text{ で最小値 } 0 \text{ を取り,} \\ \alpha < 0, \beta^2 - \alpha\gamma < 0 & \text{のとき, } q(x, y) \text{ は } (0, 0) \text{ で最大値 } 0 \text{ を取る,} \\ \alpha \neq 0, \beta^2 - \alpha\gamma > 0 & \text{のとき, } q(0, 0) = 0 \text{ は極値ではない.} \end{cases}$$

実際,  $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$  のとき,  $\alpha > 0$  ならば

$$q(x, 0) = \alpha x^2 > 0 \quad (x \neq 0) \quad \text{かつ} \quad q(-\beta y, \alpha y) = \alpha y^2 (\alpha\gamma - \beta^2) < 0 \quad (y \neq 0)$$

が成り立つ. このような点  $(0, 0)$  は  $q(x, y)$  の鞍点と言われる.

例えば, 上右図  $q(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2$  の場合  $q(0, 0) = 0$  は極値ではない.



さて, 二変数関数  $f(x, y)$  が  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$  で極値を取る場合には, 一変数関数  $\varphi(x) = f(x, y_0)$  が  $x = x_0$  で極値を取りまた関数  $\psi(y) = f(x_0, y)$  が  $y = y_0$  で極値を取ることが必要であるから, 偏微分係数の定義により

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

が成り立っていないなければならない. この条件を満たす点  $(x_0, y_0)$  を  $f(x, y)$  の停留点と言う.

さらに, 関数  $f(x, y)$  の二階の偏導関数から計算される行列

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \quad (f(x, y) \text{ のヘッセ (Hesse) 行列という.})$$

の行列式の符号を調べるのが, 二変数関数の極値を調べるためには重要である.

**定理 極値の判定** 関数  $f(x, y)$  は  $C^2$  級で, 点  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$  は  $f(x, y)$  の停留点, すなわち,  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$  が成り立っているとす.

$$D = f_{xy}(x_0, y_0)^2 - f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) (= -H(x_0, y_0))$$

と置くととき、つぎのことが成り立つ：

- (1)  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ,  $D < 0$  ならば,  $f(x_0, y_0)$  は極小値である.
- (2)  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ,  $D < 0$  ならば,  $f(x_0, y_0)$  は極大値である.
- (3)  $D > 0$  ならば,  $f(x_0, y_0)$  は極値でない.
- (4)  $D = 0$  ならば, 判定できない.

**例 2** 関数  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  を考える.

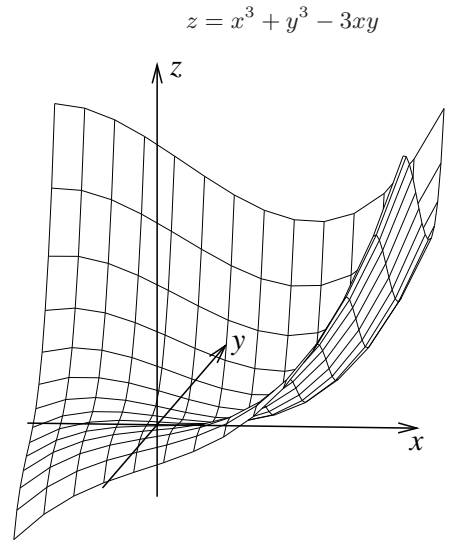
- (1)  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$  となる点  $(x, y)$  を求めよ.
- (2)  $f_{xx}(x, y)$ ,  $f_{xy}(x, y)$ ,  $f_{yy}(x, y)$  を求めよ.
- (3)  $f(x, y)$  の極値を調べよ.

**解** (1) 
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3(x^2 - y) = 0 \\ f_y(x, y) = 3(y^2 - x) = 0 \end{cases}$$

の解は  $(x, y) = (0, 0), (1, 1)$ .

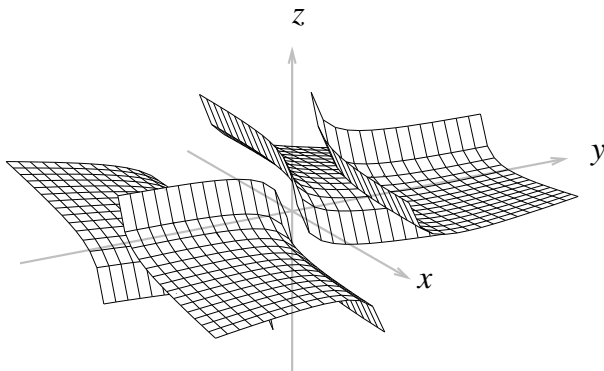
(2)  $f_{xx} = 6x$ ,  $f_{xy} = -3$ ,  $f_{yy} = 6y$ .

- (3)  $D = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 9 - 36xy$  であるから,  
 $(x, y) = (0, 0)$  のとき,  $D = 9 > 0$  より  $f(0, 0) = 0$  は極値でない.  
 $(x, y) = (1, 1)$  のとき,  $D = 9 - 36 = -27 < 0$ ,  $f_x(1, 1) = 6 > 0$  より  
 $f(1, 1) = -1$  は極小値である.

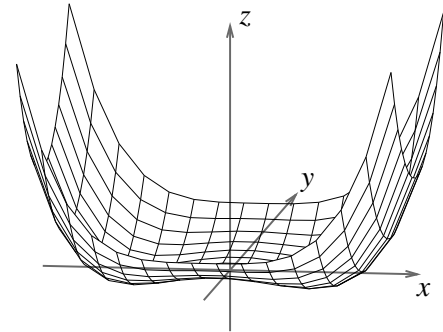


#### 問題 4.8

**1** 関数  $f(x, y) = xy + \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$  ( $a > 0$ ) の極値を調べよ.



$$z = xy + \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$$



$$z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$$

- 2 関数  $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$  の極値を調べよ .
- 3 関数  $z = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$  の極値を調べよ .
- 4 関数  $f(x, y) = xy e^{-x^2-y^2}$  の極値を調べよ .
- 5 関数  $f(x, y) = \cos(x + y) + \sin x + \sin y$  ( $0 \leq |x|, |y| < \pi$ ) の極値を調べよ .
- 6 曲面  $z = x^2 + 4xy + y^2$  は曲面  $z = 3x^2 - y^2$  を  $z$  軸の周りに角  $\frac{\pi}{4}$  回転した曲面であることを使って , 関数  $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$  の極値を調べよ .

#### D. 極値の判定定理の証明

つぎの補題を示しておこう .

**補題** 関数  $f(x, y)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  を  $C^2$  級とし , 一変数関数  $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$  を考える .

このとき

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \\ \varphi''(t) = f_{xx}(x(t), y(t))x'(t)^2 + 2f_{xy}(x(t), y(t))x'(t)y'(t) + f_{yy}(x(t), y(t))y'(t)^2 \\ \quad + f_x(x(t), y(t))x''(t) + f_y(x(t), y(t))y''(t) . \end{cases}$$

が成り立っている . 従って , ある  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$  で

$$(*) \quad \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0 \\ D = f_{xy}(x_0, y_0)^2 - f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \end{cases}$$

が成り立つとき ,  $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$  ならば ,

$$\begin{cases} \varphi'(0) = f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0) = 0 \\ \varphi''(0) = f_{xx}(x_0, y_0)x'(0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)x'(0)y'(0) + f_{yy}(x_0, y_0)y'(0)^2 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B. 極値の判定 } \boxed{1} \text{ を参考せよ})$$

が成り立つから一変数関数  $\varphi(t)$  は  $t = t_0$  で極値をとる .

特に , 任意の  $(a, b) (\neq (0, 0))$  によって定義される関数  $\varphi(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$  は , 条件 (\*) が成り立つとき ,  $t = 0$  で極値をとる .

**極値の判定定理の証明** 関数  $f(x, y)$  を  $C^2$  級 , 停留点  $(x_0, y_0) (\in \mathbf{R}^2)$  で

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ D = f_{xy}(x_0, y_0)^2 - f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) \end{cases}$$

とする .

$f(x, y)$  は  $C^2$  級であるから , 二変数関数

$$D(x, y) = f_{xy}(x, y)^2 - f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) \quad \text{および} \quad f_{xx}(x, y)$$

は連続関数である．今

$$D(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)^2 - f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$$

の場合を考えよう． $D(x, y)$  の連続性により点  $(x_0, y_0)$  の近くでは  $D(x, y) \neq 0$  また  $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$  であるから，ある正の数  $\delta$  が存在して

$$\begin{aligned} D(x_0, y_0) > 0 \quad \text{ならば} \quad & \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \text{のとき} \quad D(x, y) > 0, \\ (D(x_0, y_0) < 0 \quad \text{ならば} \quad & \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \text{のとき} \quad D(x, y) < 0, \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{ならば} \quad & \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \text{のとき} \quad f_{xx}(x, y) > 0. \\ (f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad \text{ならば} \quad & \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \text{のとき} \quad f_{xx}(x, y) < 0. \end{aligned}$$

今，点  $(x, y) = (x_0 + a, y_0 + b)$  で  $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} < \delta$  であるとしよう．

$$\text{関数} \quad \varphi(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

を考えると， $D(x_0, y_0) < 0$  かつ  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  の場合

$$\begin{cases} \varphi'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b = 0 \\ \varphi''(t) = f_{xx}(x_0 + at, y_0 + bt)a^2 + 2f_{xy}(x_0 + at, y_0 + bt)ab \\ \quad + f_{yy}(x_0 + at, y_0 + bt)b^2 > 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

となるから， $\varphi'(t) \geq 0$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) が成り立つので  $\varphi(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 単調増加であることがわかる．故に， $f(x, y) = \varphi(1) \geq \varphi(0) = f(x_0, y_0)$  が成り立つ．これは  $f(x_0, y_0)$  が極小値であることを示している．同様にして， $D(x_0, y_0) < 0$  かつ  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  の場合は  $f(x_0, y_0)$  が極大値であることが示される．

つぎに， $D(x_0, y_0) > 0$  かつ  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  の場合には，

$\alpha = f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ， $\beta = f_{xy}(x_0, y_0)$ ， $\gamma = f_{yy}(x_0, y_0)$  と置くと，B. 極値の判定 1 から

$$\varphi(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

に対して

$$\begin{cases} \varphi'(0) = f_x(x_0, y_0)\alpha = 0 \\ \varphi''(0) = \alpha \cdot \alpha^2 > 0 \end{cases}$$

となるから， $\varphi'(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) は  $t = 0$  の近くで狭義単調増加であることがわかる．これは  $(x_0, y_0)$  の近くに  $f(x, y) > 0$  となる点  $(x, y)$  があることを意味している．また

$$\varphi(t) = f(x_0 - \beta t, y_0 + \alpha t)$$

に対しては

$$\begin{cases} \varphi'(0) = f_x(x_0, y_0)(-\beta) + f_y(x_0, y_0)\alpha = 0 \\ \varphi''(0) = \alpha(-\beta)^2 + 2\beta(-\beta)\alpha + \gamma(\alpha)^2 = \alpha(-\beta^2 + \alpha\gamma) < 0 \end{cases}$$

となるから， $\varphi'(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) は  $t = 0$  の近くで狭義単調減少で  $(x_0, y_0)$  の近くに  $f(x, y) < 0$  となる点  $(x, y)$  がある．これは  $f(x_0, y_0)$  が極値でないことを意味している． //

## 4.9 陰関数

### A. 陰関数の微分

関数  $f(x, y)$  は領域  $D (\subset \mathbf{R}^2)$  で微分可能とし, 微分可能な関数  $\varphi(x)$  に対して,

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

が成り立っているとす。このとき, 4.5 合成関数の偏微分 定理 2 により,

$$\frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

であるから,  $f_y(x, \varphi(x)) \neq 0$  ならば

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

が成り立つ。

**例**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  のとき,  $f(x, y) = 0$  を満たす関数  $y = \sqrt{1 - x^2}$  は陰関数の例で

ある。この場合には,  $y'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$  が成り立っている。

陰関数  $y(x)$  の存在が明らかで, 条件  $f(x, y) = 0$  は関数関係式  $x^2 + y(x)^2 - 1 = 0$  であるから

両辺を微分して  $\frac{d}{dx} \{x^2 + y(x)^2 - 1\} = 2x + 2yy' = 0$  を得て

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{と計算することもできる。}$$

### 陰関数定理 滑らかな曲線の存在

関数  $f(x, y)$  は領域  $D (\subset \mathbf{R}^2)$  で  $C^1$  級とし,

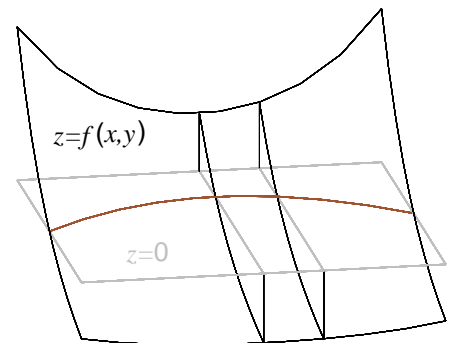
$$f(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) \neq 0 \quad ((a, b) \in D)$$

とする。このとき,  $a$  を含む開区間  $I (\subset \mathbf{R})$  で定義された関数  $\varphi(x)$  で次の (1), (2), (3) を満たすものが唯一つ存在する。

- (1)  $b = \varphi(a)$
- (2)  $f(x, \varphi(x)) = 0$  and  $f_y(x, \varphi(x)) \neq 0 \quad (\forall x \in I)$
- (3) 関数  $\varphi(x)$  は  $C^1$  級で,

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \quad (\forall x \in I).$$

- (4)  $f(x, y)$  が  $C^p$  級ならば, 陰関数  $\varphi(x)$  も  $C^p$  級となる。



曲面  $z = f(x, y)$  と平面  $z = 0$  が交わって生じる曲線の一部は, 関数  $y = \varphi(x)$  のグラフとして現される。

**陰関数定理 滑らかな曲面の存在** 関数  $f(x, y, z)$  は領域  $D (\subset \mathbf{R}^3)$  で  $C^1$  級とし,

$$f(a, b, c) = 0, \quad f_z(a, b, c) \neq 0 \quad ((a, b, c) \in D)$$

とする. このとき,  $(a, b)$  を含む開長方形  $R (\subset \mathbf{R}^2)$  で定義された関数  $\varphi(x, y)$  で次の (1), (2), (3) を満たすものが唯一つ存在する.

- (1)  $c = \varphi(a, b)$
- (2)  $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$  and  $f_z(x, y, \varphi(x, y)) \neq 0 \quad (\forall (x, y) \in R)$
- (3) 関数  $\varphi(x, y)$  は  $C^1$  級で,

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, \varphi(x, y))}{f_z(x, y, \varphi(x, y))}, \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, \varphi(x, y))}{f_z(x, y, \varphi(x, y))} \quad (\forall (x, y) \in R).$$

- (4)  $f(x, y)$  が  $C^p$  級ならば, 陰関数  $\varphi(x, y)$  も  $C^p$  級となる.

**問** 関数  $f(x, y)$  は  $C^2$  級とする.

$f(x, y) = 0, f_y(x, y) \neq 0$  によって決まる陰関数  $y = \varphi(x)$  に対して,

$$y'' = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

であることを示せ. 特に  $\varphi'(x) = 0$  のとき,  $\varphi''(x) = -\frac{f_{xx}(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$ .

## B. 陰関数の極値問題

陰関数定理と上に掲げた問の結果を応用すれば, 陰関数を計算できない場合でも, この陰関数の極値を発見できる方法が得られる:  $C^2$  級関数  $f(x, y)$  に対して, 条件

$$f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

を満たす  $(x_0, y_0)$  を求めることができれば,  $y_0 = \varphi(x_0)$  を満たす  $C^2$  級陰関数  $\varphi(x)$  が存在して

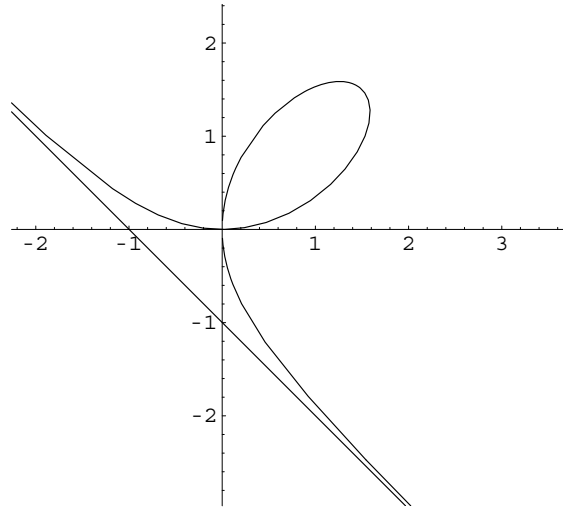
$$\varphi'(x_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad \varphi''(x_0) = -\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} \quad \text{が成り立つ.}$$

$\varphi''(x)$  が連続であるから,  $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$  のとき,  $x_0$  の近くで  $\varphi''(x_0)$  は正(または負)の値をとり,  $\varphi(x)$  も凸(または凹)となる. 従って  $\varphi''(x_0)$  の正(または負)に応じて,  $y_0 = \varphi(x_0)$  は極小値(または極大値)であると判定できる.

**例**  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ,  $f_y(x, y) \neq 0$   
 によって陰関数  $y = \varphi(x)$  を定める .

- (1)  $\varphi'(x)$  を  $x, y = \varphi(x)$  を使って表せ .
- (2)  $\varphi'(x_0) = 0$  となる点  $x_0$  を求めよ .
- (3)  $\varphi''(x_0)$  を  $x_0, y_0 = \varphi(x_0)$  を使って表せ .
- (4)  $\varphi(x)$  の極値を求めよ .

右図は Descartes 正葉線  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$



**解**  $f_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y)$ ,  $f_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x)$ ,  $f_{xx}(x, y) = 6x$  .

(1) 陰関数定理により  $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} = -\frac{x^2 - \varphi(x)}{\varphi(x)^2 - x}$  , ただし  $\varphi(x)^2 - x \neq 0$  である .

(2)  $x$  と  $\varphi(x)$  は条件  $y^2 - x \neq 0$  の下で連立方程式  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$  を満たしている .  
 $y = \varphi(x)$  に対して ,  $y = x^2$  から  $x^6 - 2x^3 = x^3(x^3 - 2) = 0$  が成り立たねばならない . 従って  $f_x(x, y) = 0$  の解は  $x = 0, \sqrt[3]{2}$  であるが ,  $x_0 = 0$  のとき  $y_0 = 0$ ,  $f_y(x_0, y_0) = 0$  となり , 条件に適さない . 故に ,  $x_0 = \sqrt[3]{2}, y_0 = x_0^2 = \sqrt[3]{4}$  .

(3)  $f_{xx}(x, y) = 6x$  であるから ,

$$\varphi''(x_0) = -\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{6x_0}{3y_0^2 - 3x_0} = -\frac{2}{x_0^3 - 1} .$$

(4)  $x_0 = \sqrt[3]{2}$  のとき ,  $f_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = 3(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) > 0$ ,  $\varphi''(\sqrt[3]{2}) = -2 < 0$  であるから ,  
 関数  $\varphi(x)$  は  $x_0$  の近くで凹となる .  $y_0 = \sqrt[3]{4}$  は  $y = \varphi(x)$  の極大値 . //

注 . Descartes の正葉線のパラメータ表示  $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3} (t \neq -1)$  が知られている .

**C. 等位面の接平面と法線** 三次元空間  $\mathbb{R}^3$  の領域  $D$  で定義された  $C^1$  級の三変数関数  $f(x, y, z)$  が点  $P(x_0, y_0, z_0) \in D$  で  $f(x_0, y_0, z_0) = \alpha$  を満たすとする .

**陰関数定理 滑らかな曲面の存在** はつぎのことを意味している : 数  $\alpha$  の等位面

$$S_\alpha = \{(a, b, c) \in D \mid f(a, b, c) = \alpha\}$$

は ,  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  の場合  $(x_0, y_0, z_0)$  の近くでは , 関係式  $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$  を満たす  $C^1$  級二変数関数  $z = \phi(x, y)$  のグラフとして与えられる .

$$(\phi_x, \phi_y, -1) = \left(-\frac{f_x}{f_z}, -\frac{f_y}{f_z}, -1\right) = -\frac{1}{f_z}(f_x, f_y, f_z)$$

であるから，等位面  $S_\alpha$  上の点  $P(x_0, y_0, z_0) \in D$  での接平面  $T_P$  は

$$(x - x_0)f_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

法線  $l_P$  のパラメータ表示は

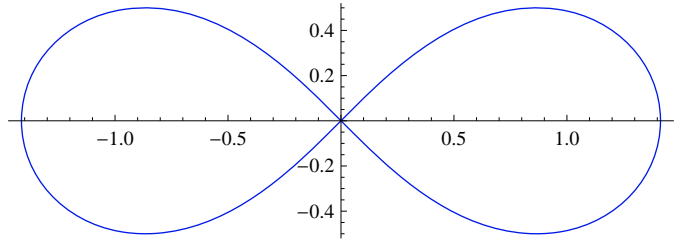
$$l_P : \begin{cases} x - x_0 = tf_x(x_0, y_0, z_0) \\ y - y_0 = tf_y(x_0, y_0, z_0) \\ z - z_0 = tf_z(x_0, y_0, z_0) \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbf{R})$$

となっていることが容易にわかる．

#### 問題 4.9

曲線  $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$

は Bernoulli の Lemniscate とよばれている (右図)．



1  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ ,  $f_y(x, y) \neq 0$  によって陰関数  $y = \varphi(x)$  を定める．

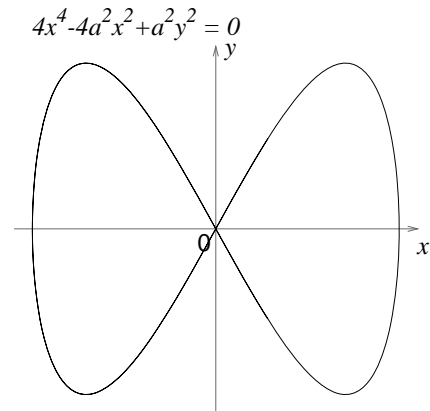
- (1)  $\varphi'(x)$  を  $x, y = \varphi(x)$  を使って表せ．
- (2)  $\varphi'(x_0) = 0$  となる点  $x_0$  を求めよ．
- (3)  $\varphi''(x_0)$  を  $x_0, y_0 = \varphi(x_0)$  を使って表せ．
- (4)  $\varphi(x)$  の極値を求めよ．

2  $a > 0$  とする．

$f(x, y) = 4x^4 - 4a^2x^2 + a^2y^2 = 0$ ,  $f_y(x, y) \neq 0$

によって陰関数  $y = \varphi(x)$  を定める．

$\varphi(x)$  の極値を求めよ．



3  $f(x, y) = x^2 - x - xy^2 + 2y^2 = 0$ ,  $f_y(x, y) \neq 0$  によって陰関数  $y = \varphi(x)$  を定める．

$\varphi(x)$  の極値を求めよ．

4 楕円面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上の点  $P(x_0, y_0, z_0)$  での接平面  $T_P$  および法線  $l_P$  を求めよ．



D. 陰関数定理 滑らかな曲線の存在 の証明

関数  $f(x, y)$  は領域  $D (\subset \mathbb{R}^2)$  で  $C^1$  級とし,

$$f(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) \neq 0 \quad ((a, b) \in D)$$

が成り立っている. このことは, 関数  $f(x, y)$  のグラフとして与えられる曲面  $z = f(x, y)$  は  $(a, b)$  の近くでは  $y$ -方向に傾いた斜面になっていることを意味しているのである. すなわち, 点  $(a, b)$  のある近傍

$$K = \{(x, y) \mid a - \delta \leq x \leq a + \delta, b - \epsilon \leq y \leq b + \epsilon\} \quad (\exists \delta, \epsilon > 0)$$

を考えると, どの  $a' \in [a - \delta, a + \delta]$  に対しても  $y$  の関数  $f(a', y)$  は  $[b - \epsilon, b + \epsilon]$  で狭義単調増加なのである (または, すべての  $f(a', y)$  は  $[b - \epsilon, b + \epsilon]$  で狭義単調減少なのである). 精しく見るとどの  $x \in [a - \delta, a + \delta]$  に対しても  $y$  の関数  $f(x, y)$  は  $[b - \epsilon, b + \epsilon]$  で狭義単調増加で唯一つの  $y = \varphi(x)$  で  $f(x, y) = 0$  を満たすのである. すなわち, 点  $(a, b)$  の近傍  $K$  上で, 曲面  $z = f(x, y)$  と平面  $z = 0$  が交わって生じる曲線をグラフとする関数が  $y = \varphi(x)$  なのである. では, 今述べたことを確かめるため  $f_y(a, b) > 0$  としよう.

関数  $f_y(x, y)$  は連続関数であるから, 正の数  $\eta$  と  $\epsilon$  を

$$f_y(x, y) > 0 \quad (a - \eta \leq x \leq a + \eta, b - \epsilon \leq y \leq b + \epsilon)$$

が成り立つように取れる. このとき,  $x = a$  を固定して

得られる関数  $f(a, y)$  の微分係数

$$\frac{d}{dy} f(a, y) = f_y(a, y) > 0.$$

このことから, 関数  $f(a, y)$  は  $[b - \epsilon, b + \epsilon]$  で狭義単調増加であることがわかるので,

$$f(a, b - \epsilon) < f(a, b) = 0 < f(a, b + \epsilon)$$

が成り立つ. さて, 関数  $f(x, y)$  は連続関数であるから, 正の数  $\delta (< \eta)$  を

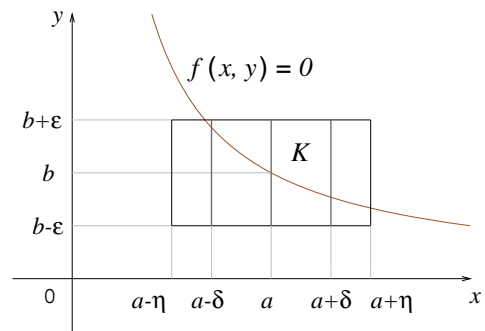
$$f(x, b - \epsilon) < 0, \quad f(x, b + \epsilon) > 0 \quad (a - \delta \leq x \leq a + \delta)$$

が成り立つように取れる. このように, 正の数  $\delta$  と  $\epsilon$  を取って点  $(a, b)$  の近傍

$$K = \{(x, y) \mid a - \delta \leq x \leq a + \delta, b - \epsilon \leq y \leq b + \epsilon\} \quad (\exists \delta, \epsilon > 0)$$

を考えると  $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$  を固定して得られる  $y$  の関数  $f(x, y)$  の微分係数

$$\frac{d}{dy} f(x, y) = f_y(x, y) > 0$$



であるから，関数  $f(x, y)$  は  $[b - \epsilon, b + \epsilon]$  で狭義単調増加で

$$f(x, b - \epsilon) < 0 < f(x, b + \epsilon)$$

を満たしている．このとき，中間値の定理により， $f(x, y) = 0$  を満たす唯一つの  $y \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$  が存在する；この  $y$  を  $\varphi(x)$  と決めるのである．こうして， $a$  を含む区間  $I = (a - \delta, a + \delta)$  で定義された関数  $\varphi(x)$  で次の (1), (2) を満たすものが唯一つ存在することがわかった：

- (1)  $b = \varphi(a)$
- (2)  $f(x, \varphi(x)) = 0$  and  $f_y(x, \varphi(x)) \neq 0$  ( $\forall x \in I$ ) .

さて，関数  $\varphi(x)$  の  $x = a$  での連続性は関数  $\varphi(x)$  の構成からわかることに注意しよう．というのは，上の構成の中で，正の数  $\epsilon$  は任意に小さく取ることができて，それに応じて正の数  $\delta$  をとると

$$\varphi(a) - \epsilon < \varphi(x) < \varphi(a) + \epsilon \quad (a - \delta < x < a + \delta)$$

が成り立っているから．陰関数  $\varphi(x)$  の任意の  $a' \in (a - \delta, a + \delta)$  での連続性は， $a'$  と  $b' = \varphi(a')$  について 陰関数  $\varphi(x)$  の構成を点  $(a', b')$  で考えることができるので明らかである．

- (3) 関数  $\varphi(x)$  の微分可能性を示そう．4.7 B. テイラー (Taylor) の定理 から

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + hf_x(x + \theta h, y + \theta k) + kf_y(x + \theta h, y + \theta k) \quad (0 < \exists \theta < 1)$$

が成り立っている．故に， $y = \varphi(x)$ ， $y + k = \varphi(x + h)$  と置くと

$$\begin{aligned} & f(x + h, \varphi(x + h)) \\ &= f(x, \varphi(x)) + hf_x(x + \theta h, y + \theta k) + kf_y(x + \theta h, y + \theta k) = 0 \quad (0 < \exists \theta < 1) \end{aligned}$$

より

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{f_x(x + \theta h, y + \theta k)}{f_y(x + \theta h, y + \theta k)} \rightarrow -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \quad (h \rightarrow 0)$$

が得られる．

- (4) 最後に注意することは，関数  $y = \varphi(x)$  の導関数が

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

と表されることから， $f(x, y)$  が  $C^2$  級ならば 関数  $-\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$  は  $C^1$  級となることが合成

関数の微分法よりわかる： すなわち

$$\varphi''(x) = -\frac{f_{xx}(x, \varphi(x))f_y(x, \varphi(x))^2 - 2f_{xy}(x, \varphi(x))f_x(x, \varphi(x))f_y(x, \varphi(x)) + f_{yy}(x, \varphi(x))f_x(x, \varphi(x))^2}{f_y(x, \varphi(x))^3}$$

が成り立つ (参考 4.9 A. 問) から， $\varphi(x)$  は  $C^2$  級となる．帰納的に，関数  $f(x, y)$  が  $C^p$  級ならば，陰関数  $\varphi(x)$  も  $C^p$  級となることがわかる． //

## 4.10 条件付極値問題

C. 条件付極値問題  $f(x, y), g(x, y)$  を  $C^1$  級関数とする．条件  $g(x, y) = 0$  があるときに， $f(x, y)$  の極値を調べる． $g(x_0, y_0) = 0$  を満たす  $(x_0, y_0)$  で， $f(x_0, y_0)$  が極値であると仮定する．今， $g_y(x_0, y_0) \neq 0$  と仮定する．この場合，陰関数定理により， $x_0$  の近くで定義された陰関数  $y = \varphi(x)$  があって，

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0) \\ g(x, \varphi(x)) = 0 \\ \varphi'(x) = -\frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))} \end{cases}$$

を満たしている．さらに， $(x_0, y_0)$  の近くでは  $g(x, y) = 0$  の解  $(x, y)$  は関数  $y = \varphi(x)$  のグラフの上にある．故に， $f(x_0, y_0)$  は関数  $z = f(x, \varphi(x))$  の極値となっていなければならない．

$z = f(x, \varphi(x))$  の導関数は

$$\frac{dz}{dx} = f_x(x, \varphi(x)) - f_y(x, \varphi(x)) \frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))}$$

と表されるから，

$$f_x(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0) = 0 \quad , \text{すなわち} ,$$

$$\lambda = \frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} \text{ に対して } f_x(x_0, y_0) - \lambda g_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) - \lambda g_y(x_0, y_0) = 0$$

が成り立つ． $\lambda$  を Lagrange 乗数と呼ぶ．

上に述べた結果を利用して，条件付き極値問題の多くの場合にその解を発見できる方法 (Lagrange の未定乗数法と呼ばれる) が得られる．つぎのような条件付き極値問題を考える：

$f(x, y), g(x, y)$  を  $C^1$  級関数とし，条件  $g(x, y) = 0$  の下で  $f(x, y)$  の極値を求めよ．

このとき，ある未定乗数  $\lambda$  を含む未知数  $x, y$  の連立方程式

$$(*) \begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

の解  $x_0, y_0$  を求めることができれば， $y_0 = \varphi(x_0)$  を満たす  $C^1$  級陰関数  $\varphi(x)$  が存在して

$$\left. \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) \right|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = 0$$

が成り立つ．特に，この条件付き極値問題が  $g_y(x, y) \neq 0$  を満たすある点  $(x, y)$  で極値  $f(x, y)$  をとることが (連続関数の最大値・最小値定理などを使って) 既知であるときには，連立方程式 (\*) の一つの解  $(x_0, y_0)$  での関数値  $f(x_0, y_0)$  として この極値問題の解が見つかる．

**例**  $2x^2 + y^2 = 1$  のとき、 $f(x, y) = x + y$  の極値を求めよ。

**解** (Lagrange の未定乗数法)

$g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1$  において、つぎの連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 1 - 4\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

から、

$$2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1.$$

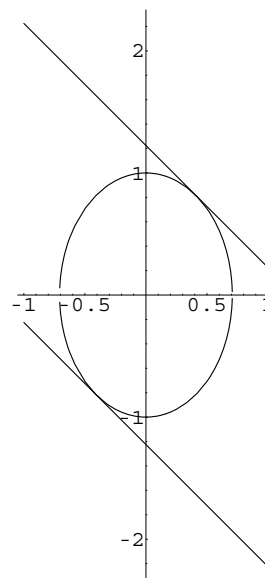
したがって、

$$\begin{cases} \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{4\lambda} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \\ y = \frac{1}{2\lambda} = \pm \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 = x(1 - 4\lambda x) + y(1 - 2\lambda y) = x + y - 2\lambda(2x^2 + y^2) = x + y - 2\lambda \end{cases}$$

が成り立つ。関数  $f(x, y) = x + y$  は楕円上で最大値、最小値をとるから、

$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$  で (極大値) 最大値  $2\lambda = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  をとり、

$(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$  で (極小値) 最小値  $2\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  をとる。 //



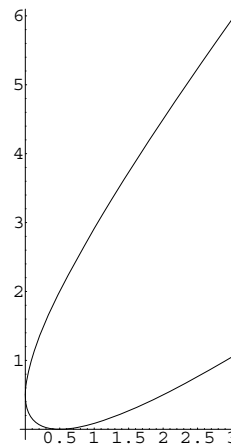
#### 問題 4.10

**1**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  のとき、 $f(x, y) = x + y$  の極値を求めよ。

**2**  $8x^2 + y^2 = 1$  のとき、 $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  の極値を求めよ。

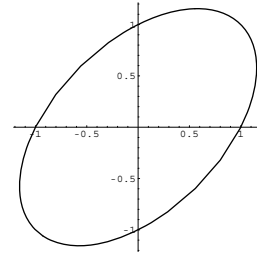
**3**  $x^2 + y^2 - 2xy - x - y + \frac{1}{4} = 0$  のとき、 $f(x, y) = xy$  の極値を求めよ。

注意.  $x^2 + y^2 - 2xy - x - y + \frac{1}{4} = -\sqrt{2}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$  は放物線の方程式である。



- 4 楕円  $\varphi(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$  上での、  
関数  $z = x + y$  の最大値, 最小値を求めよ。

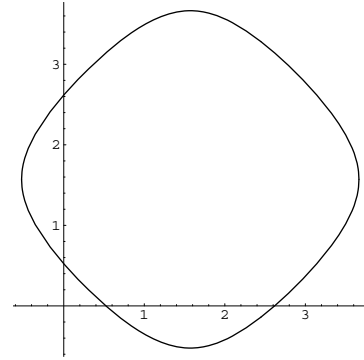
注意.  $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$  は楕円の方  
程式である。



- 5  $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}$  ( $-\frac{\pi}{6} \leq x, y \leq \frac{7\pi}{6}$ ) のとき,

関数  $z = x^2 + y^2$  の極値を求めよ。

(参考. 微分積分学 1 2.1 C.)



#### D. 条件付き極値問題

つぎのような条件付き極値問題を考える：

$f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  を  $C^1$ 級関数とし, 条件  $g(x, y, z) = 0$  の下で  $f(x, y, z)$  の極値をを求めよ。

このとき, ある未定乗数  $\lambda$  を含む未知数  $x, y, z$  の連立方程式

$$(*) \begin{cases} f_x(x, y, z) - \lambda g_x(x, y, z) = 0 \\ f_y(x, y, z) - \lambda g_y(x, y, z) = 0 \\ f_z(x, y, z) - \lambda g_z(x, y, z) = 0 \\ g_z(x, y, z) \neq 0 \end{cases}$$

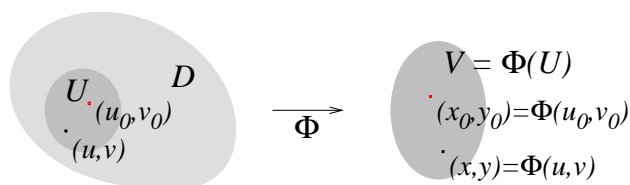
の解  $x_0, y_0, z_0$  を求めることができれば, 陰関数定理により  $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$  を満たす  $C^1$  級陰関数  $\varphi(x, y)$  が存在して

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \varphi(x, y)) \right|_{x=x_0, y=y_0} = f_x(x_0, y_0, z_0) - f_z(x_0, y_0, z_0) \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_z(x_0, y_0)} = 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, \varphi(x, y)) \right|_{x=x_0, y=y_0} = f_y(x_0, y_0, z_0) - f_z(x_0, y_0, z_0) \frac{g_y(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)} = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。特に, この条件付き極値問題が  $g_z(x, y, z) \neq 0$  を満たすある点  $(x, y, z)$  で極値  $f(x, y, z)$  をとることが (連続関数の最大値・最小値定理などを使って) 既知であるときには, この極値問題の解  $f(x_0, y_0, z_0)$  は連立方程式 (\*) のある解  $(x_0, y_0, z_0)$  から見つけれられる。

- 問  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a, b, c > 0$ ) のとき,  $xyz$  の最大値と最小値を求めよ。

## 4.11 逆写像定理



### D. 逆写像定理

**逆写像定理**  $uv$ -平面的領域  $D$  定義された  $C^1$  級変換  $\Phi: x = x(u, v), y = y(u, v)$  のヤコビアンが  $D$  上で 0 にならないとする, すなわち,  $J(u, v) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 ((u, v) \in D)$  とする.  $D$  の任意の点  $(u_0, v_0)$  とその像  $(x_0, y_0) = \Phi(u_0, v_0)$  を考えると, 点  $(u_0, v_0)$  を含む開集合  $U$  と点  $(x_0, y_0)$  を含む開集合  $V$  が存在して,  $\Phi$  は  $U$  から  $V$  の上への 1 対 1 写像である. さらに, 逆写像  $\Phi^{-1}: V \rightarrow U$  は  $C^1$  級である.

**証明** ヤコビアン  $J(u, v)$  が領域  $D$  上で 0 にならないから,  $J(u, v)$  は領域  $D$  上で定符号であるので, 今は, 正の定符号であるとする.

$D$  の任意の点  $(u_0, v_0)$  とその像  $(x_0, y_0) = \Phi(u_0, v_0)$  を考える. 点  $(u_0, v_0)$  を中心とする半径  $r$  の開円盤  $D_r(u_0, v_0)$  を閉円盤  $\bar{D}_r(u_0, v_0)$  が  $D$  に含まれるように取る;

$$\bar{D}_r(u_0, v_0) = \{(u, v) \mid (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leq r\} \subset D.$$

$J(u, v) \neq 0$  であるから,  $|J(u, v)|$  は閉円盤  $\bar{D}_r(u_0, v_0)$  の上で正の最小値  $m$  を取る;

$$m = \min\{|J(u, v)| \mid (u, v) \in \bar{D}_r(u_0, v_0)\} > 0.$$

偏導関数の連続性により, 有界閉集合  $\bar{D}_r(u_0, v_0)$  の上である正の数  $M (> 1)$  が存在して,

$$|x_u(u, v)| \leq M, \quad |x_v(u, v)| \leq M, \quad |y_u(u, v)| \leq M, \quad |y_v(u, v)| \leq M \quad ((u, v) \in \bar{D}_r(u_0, v_0))$$

が成り立つ. さて, 連続偏導関数は有界閉集合  $\bar{D}_r(u_0, v_0)$  の上で一様連続であるから,  $m$  より小さい任意の正の数  $\epsilon$  に対して  $\left(\frac{\epsilon}{2M}$  に着目して) ある正の数  $\delta$  を取ると,

任意の  $(u, v), (u', v') \in \bar{D}_r(u_0, v_0)$  に対して

$$\max\{|u - u'|, |v - v'|\} < \delta \implies \begin{cases} |x_u(u, v) - x_u(u', v')| < \frac{\epsilon}{2M}, & |x_v(u, v) - x_v(u', v')| < \frac{\epsilon}{2M} \\ |y_u(u, v) - y_u(u', v')| < \frac{\epsilon}{2M}, & |y_v(u, v) - y_v(u', v')| < \frac{\epsilon}{2M} \end{cases}$$

が成り立つ.

ここで, つぎのことに注意する: 有界閉集合  $\bar{D}_r(u_0, v_0) \times \bar{D}_r(u_0, v_0) (\subset D \times D \subset \mathbf{R}^4)$  で定義された  $C^1$  級関数  $x(u, v), y(u, v)$  から導かれる四変数関数

$$K(u_1, v_1, u_2, v_2) = x_u(u_1, v_1)y_v(u_2, v_2) - x_v(u_1, v_1)y_u(u_2, v_2)$$

に対して, つぎが成り立つ:

$$\max\{|u_1 - u_2|, |v_1 - v_2|\} < \delta \implies |K(u_1, v_1, u_2, v_2) - J(u_1, v_1)| < \epsilon.$$

何故ならば,  $\max\{|u_1 - u_2|, |v_1 - v_2|\} < \delta$  のとき

$$\begin{aligned} & |K(u_1, v_1, u_2, v_2) - J(u_1, v_1)| \\ = & |x_u(u_1, v_1)y_v(u_2, v_2) - x_v(u_1, v_1)y_u(u_2, v_2) - \{x_u(u_1, v_1)y_v(u_1, v_1) - x_v(u_1, v_1)y_u(u_1, v_1)\}| \\ = & \left| \{x_u(u_1, v_1) - x_u(u_2, v_2)\}y_v(u_2, v_2) - \{x_v(u_1, v_1) - x_v(u_2, v_2)\}y_u(u_2, v_2) \right| \\ \leq & M|x_u(u_1, v_1) - x_u(u_2, v_2)| + M|x_v(u_1, v_1) - x_v(u_2, v_2)| < M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon \end{aligned}$$

と計算できるからである. このとき, 任意の  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \overline{D}_r(u_0, v_0)$  に対して,

$$|K(u_1, v_1, u_2, v_2) - J(u_2, v_2)| < \epsilon < m \text{ より}$$

$$K(u_1, v_1, u_2, v_2) > J(u_2, v_2) - \epsilon > J(u_2, v_2) - m > 0$$

が導かれるので,  $\overline{D}_r(u_0, v_0) \times \overline{D}_r(u_0, v_0)$  で  $K(u_1, v_1, u_2, v_2) > 0$  が成り立っている.

写像  $\Phi$  が  $\overline{D}_r(u_0, v_0)$  で 1 対 1 対応であることを示そう. 今,  $\overline{D}_r(u_0, v_0)$  の二点  $(u, v), (u', v')$  で  $\Phi(u, v) = \Phi(u', v') = (x, y)$  と仮定する. このとき, ある  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D_r(u_0, v_0)$  で

$$\text{連立方程式} \quad \begin{cases} 0 = x(u', v') - x(u, v) = x_u(u_1, v_1)(u' - u) + x_v(u_1, v_1)(v' - v) \\ 0 = y(u', v') - y(u, v) = y_u(u_2, v_2)(u' - u) + y_v(u_2, v_2)(v' - v) \end{cases}$$

が解  $(u' - u, v' - v)$  持つことになるが, この連立方程式の係数行列式

$$x_u(u_1, v_1)y_v(u_2, v_2) - x_v(u_1, v_1)y_u(u_2, v_2) = K(u_1, v_1, u_2, v_2) > 0$$

が正であるから,  $(u', v) = (u, v)$  でなければならない. すなわち, 写像  $\Phi$  は  $\overline{D}_r(u_0, v_0)$  で 1 対 1 対応である. 今,  $U = D_r(u_0, v_0)$  とし,  $V = \Phi(U)$  と置く. このとき, 逆写像  $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$  が存在する.  $V$  の任意の点  $(x_1, y_1)$  を考える. 写像  $\Phi$  が  $\overline{U} = \overline{D}_r(u_0, v_0)$  で 1 対 1 対応であるから, 唯一つの点  $(u_1, v_1) \in U$  で  $(x_1, y_1) = \Phi(u_1, v_1)$  と表され

$$\rho = \frac{1}{2} \min\{\sqrt{(x(u, v) - x_1)^2 + (y(u, v) - y_1)^2} \mid (u, v) \in \partial U\} > 0$$

となる. ここで  $\partial U = \partial D_r(u_0, v_0)$  は  $(u_0, v_0)$  を中心とする半径  $r$  の円周である. 今,  $(x_1, y_1)$  を中心とする半径  $\rho$  の開円板  $D_\rho(x_1, y_1)$  を取る.  $D_\rho(x_1, y_1)$  の任意の点  $(x_2, y_2) \in D_\rho(x_1, y_1)$  を考える.  $(x_2, y_2) \notin \Phi(\partial U)$  であるから, 関数

$$\mu(u, v) = (x(u, v) - x_2)^2 + (y(u, v) - y_2)^2 \quad ((u, v) \in \overline{U})$$

は有界閉集合  $\overline{U}$  上で正の極小値  $\mu_1$  ( $\leq \mu(u_1, v_1) < \rho$ ) を取る. 故に, ある  $(u_2, v_2) \in U$  で

$$\text{連立方程式} \quad \begin{cases} x_u(u_2, v_2)(x(u_2, v_2) - x_2) + y_u(u_2, v_2)(y(u_2, v_2) - y_2) = 0 \\ x_v(u_2, v_2)(x(u_2, v_2) - x_2) + y_v(u_2, v_2)(y(u_2, v_2) - y_2) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ. この連立方程式の係数行列式

$$x_u(u_2, v_2)y_v(u_2, v_2) - x_v(u_2, v_2)y_u(u_2, v_2) = J(u_2, v_2) > 0$$

が正であるから,  $x(u_2, v_2) - x_2 = y(u_2, v_2) - y_2 = 0$  となり  $\Phi(u_2, v_2) = (x_2, y_2)$  が示される. こうして, 任意の点  $(x_1, y_1) \in V$  に対して, ある開円板  $D_\rho(x_1, y_1) \subset V = \Phi(U)$  が示された. 故に,  $V = \Phi(U)$  は開集合である. //

**問** 逆写像  $\Phi^{-1}$  を陰関数を使って表し,  $\Phi^{-1}$  が  $C^1$  級であることを示せ.





# 第5章 重積分法

## 5.1 重積分

### A. リーマン和

有界閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  で定義された関数  $f(x, y)$  を考える。関数  $f(x, y)$  は有界, すなわち, ある正の数  $M$  が在って  $R$  のどの点  $(x, y)$  でも関数値  $f(x, y)$  の絶対値は  $M$  を超えない ( $-M \leq f(x, y) \leq M$  である) とする。閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  を  $n \times m$  個の小長方形に分割する:

$$\Delta : \begin{cases} a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b \\ c = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = d. \end{cases}$$

各小長方形  $R_{i,j} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]$  から, 点  $(\xi_{ij}, \eta_{ij})$  を任意にとる (選出する):

$$\mu : \begin{cases} a_{i-1} \leq \xi_{ij} \leq a_i \\ b_{j-1} \leq \eta_{ij} \leq b_j \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

この分割  $\Delta$  と点の選出  $\mu$  によって決まる

$$R(\Delta, \mu) = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$$

を考える (リーマン和と呼ばれる)。小長方形  $R_{i,j}$  の面積の総和は長方形  $R$  の面積であるから,

$$|R(\Delta, \mu)| \leq \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})| \leq M(b-a)(d-c)$$

とわかる。今, 分割  $\Delta$  に現れる小長方形の対角線の長さの最大値を分割  $\Delta$  の細かさ

$$|\Delta| \equiv \max_{i,j} \delta_{i,j} \quad \left( \text{ここで, } \delta_{i,j} = \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + (c_j - c_{j-1})^2} \right)$$

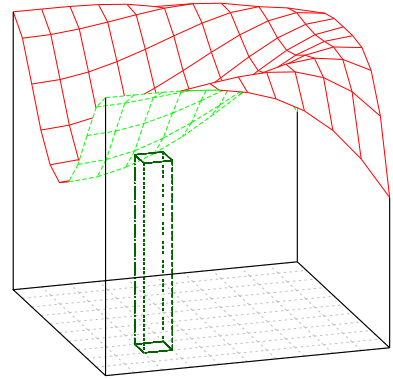
と定義する。

分割  $\Delta$  の細かさ  $|\Delta|$  を 0 に近づけると, リーマン和  $R(\Delta, \mu)$  が極限值を持つならば

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} R(\Delta, \mu) \quad (\text{関数 } f(x, y) \text{ の長方形 } R \text{ 上の重積分})$$

と定義する; このとき, 関数  $f(x, y)$  は長方形  $R$  で (重) 積分可能であるといわれる。

$f(x, y) > 0$  ( $(x, y) \in R$ ) の場合,  $\iint_R f(x, y) dx dy$  の値は曲面  $z = f(x, y)$  の下で  $R$  上にある部分の体積と考えられる。



平面上の有界集合  $D$  で定義された関数  $f(x, y)$  の二重積分を考えるには、集合  $D$  を含む閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d] (\supset D)$  をとり、関数

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

に対する二重積分

$$\iint_R f^*(x, y) dx dy$$

を考える。関数  $f^*(x, y)$  が閉長方形  $R$  で積分可能のとき、二重積分の値  $\iint_R f^*(x, y) dx dy$  は集合  $D$  を含む閉長方形  $R$  の取り方によらないことが容易に示されるので

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy$$

と定義する。このとき、関数  $f(x, y)$  は平面の集合  $D$  で積分可能といわれる。

特に、平面上の関数  $\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$  が  $D$  で積分可能、すなわち二重積分

$$\iint_D \chi_D(x, y) dx dy = \iint_R \chi_D(x, y) dx dy$$

が有限な値となるとき、集合  $D (\subset R)$  は‘面積を持つ’とか‘面積が確定する’とかいわれる。

面積 0 の集合 平面上の有界集合  $X$  が‘面積 0 の集合である’とは、つぎが成り立つことである：

集合  $X$  を含む任意の閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  の小長方形  $R_{i,j}$  への分割を  $\Delta$  とする、

$$\Delta : \begin{cases} a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b \\ c = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = d \end{cases}, \quad R_{i,j} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j].$$

$X$  と交わる小長方形  $R_{i,j}$  についての和

$$b(\Delta) = \sum_{X \cap R_{i,j} \neq \emptyset} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \quad (\geq 0)$$

に対して、 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} b(\Delta) = 0$  が成り立つ。

**定理 連続関数の積分可能性** 境界  $\partial D$  が‘面積 0 の集合である’有界閉集合  $D$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  は  $D$  で積分可能である。特に、閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  は  $R$  で積分可能である。

## B. 重積分の性質

リーマン和による重積分の定義から、つぎの定理が証明される。

**定理 1** 関数  $f(x, y), g(x, y)$  は面積が確定する集合  $D$  または  $E$  で積分可能とする。

$$(1) \quad \iint_D \{f(x, y) + g(x, y)\} dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy. \quad (\text{線形性})$$

$$(2) \quad \iint_D \alpha f(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy \quad (\alpha \text{ は実数}). \quad (\text{線形性})$$

$$(3) \quad \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

(4)  $D$  と  $E$  の共通部分  $D \cap E$  がそれぞれの境界  $\partial D$  および  $\partial E$  に含まれるとき,

$$\iint_{D \cup E} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_E f(x, y) dx dy.$$

**定理 2** 関数  $f(x, y)$  が閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  で積分可能, さらに, どの  $y (\in [c, d])$  を固定したときにも, 変数  $x$  の関数  $f(x, y)$  は  $[a, b]$  で積分可能とする.

そのとき, 変数  $y$  の関数  $\int_a^b f(x, y) dx$  は  $[c, d]$  で積分可能でつぎが成り立つ:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (\text{累次積分})$$

**定理 連続関数の積分可能性** と **定理 2** から, 積分の計算法を与える定理が得られる.

**定理 3** 二つの連続関数  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ )

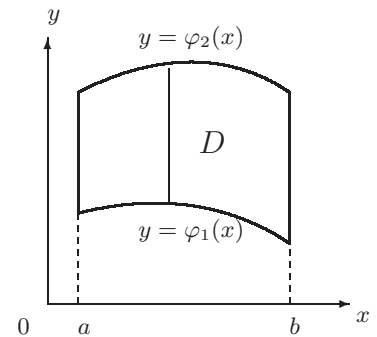
によって定義される領域

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}$$

上の連続関数  $f(x, y)$  に対して, 関数

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b) \text{ は } [a, b] \text{ で積分可能で}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \text{ が成り立つ.}$$



**定理 3'** 二つの連続関数  $\alpha_1(y) \leq \alpha_2(y)$  ( $c \leq y \leq d$ )

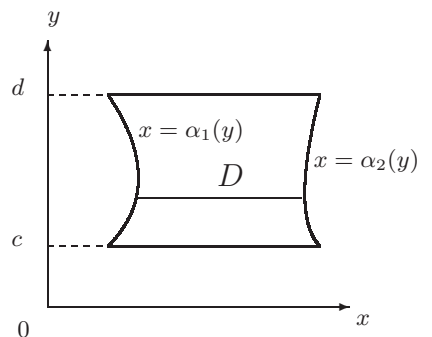
によって定義される領域

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \alpha_1(y) \leq x \leq \alpha_2(y) \right\}$$

上の連続関数  $f(x, y)$  に対して, 関数

$$\int_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} f(x, y) dx \quad (c \leq y \leq d) \text{ は } [c, d] \text{ で積分可能で}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \text{ が成り立つ.}$$



注．特に，関数  $f(x, y)$  が閉長方形  $R$  で連続のとき，

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \text{が成り立つ．}$$

#### D. 積分可能性と一様連続性

**定理 連続関数の積分可能性** の証明 有界閉領域  $D$  の境界  $\partial D$  が‘面積 0 の集合である’

とし， $D$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  を考える． $D$  を含む閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d] (\supset D)$  を

とり，関数  $f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$  を考える．

$f^*(x, y)$  の  $R$  での積分可能性を示すとは，つぎのことを示すことである：

長方形  $R$  の分割  $\Delta$  について，分割  $\Delta$  の小区間の最大の幅  $|\Delta|$  を 0 に近づけるとき， $f^*(x, y)$  に関するリーマン和  $R(\Delta, \mu)$  が収束する，すなわち  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} R(\Delta, \mu)$  が存在する．

極限值  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} R(\Delta, \mu)$  の存在をいうためには，すべてのリーマン和の集まり  $\{R(\Delta, \mu)\}_{\Delta, \mu}$  を考えて，リーマン和がつぎの (Cauchy の) 条件

$$\left( \begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，正の数 } \delta \text{ が存在してつぎが成り立つ：} \\ |\Delta|, |\Delta'| < \delta \implies |R(\Delta, \mu) - R(\Delta', \mu')| < \epsilon \end{array} \right.$$

を満たすこと，すなわち，つぎが成り立つことを示せばよい：

$$\lim_{|\Delta|, |\Delta'| \rightarrow 0} |R(\Delta, \mu) - R(\Delta', \mu')| = 0.$$

リーマン和の収束を示すためには，つぎの二つの定理が必要である．

**定理 連続関数の最大値・最小値定理**

$\mathbb{R}^2$  の有界閉集合  $K$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  は閉集合  $K$  で最大値と最小値を取る．

**定理 連続関数の一様連続性**

$\mathbb{R}^2$  の有界閉集合  $K$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  は閉集合  $K$  で一様連続である．すなわち，任意の正の数  $\epsilon$  に対して，ある正の数  $\delta$  が存在して， $(x, y), (x', y') \in K$  に対して

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta \implies |f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon$$

が成り立つ．(参考．4.11 一様連続性と逆写像)

さて、定理の証明を続けよう。

連続関数の最大値・最小値定理から、 $0 \leq M = \max_{(x,y) \in D} |f(x,y)| = \max_{(x,y) \in R} |f^*(x,y)| < \infty$

であることがわかる。

閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  を  $mn$  個の小長方形  $R_{ij} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]$  に分割する：

$$\Delta : \begin{cases} a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b \\ c = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = d. \end{cases}$$

長方形  $R$  の面積  $(b-a)(d-c)$  を  $|R|$ 、小長方形  $R_{ij}$  の面積  $(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$  を  $|R_{ij}|$

で表すことにすると、もちろん  $\sum_{i,j} |R_{i,j}| = |R|$  である。

各小長方形  $R_{ij}$  から、点  $(s_{ij}, t_{ij})$  をとる：

$$\mu : \begin{cases} a_{i-1} \leq s_{ij} \leq a_i \\ c_{j-1} \leq t_{ij} \leq c_j \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$$

$$\text{リーマン和} \quad R(\Delta, \mu) = \sum_{i,j} f^*(s_{ij}, t_{ij})(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) = \sum_{i,j} f^*(s_{ij}, t_{ij})|R_{ij}|$$

を考えると、 $\sum_{i,j} |R_{i,j}| = |R|$  からつぎが導かれる：

$$|R(\Delta, \mu)| \leq \sum_{i,j} |f^*(s_{ij}, t_{ij})| |R_{ij}| \leq \sum_{i,j} M |R_{ij}| \leq M |R|.$$

閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  で定義された関数  $f^*(x, y)$  のリーマン和の値の‘散らばり’について考えよう。リーマン和  $R(\Delta, \mu)$  において、他の点の選び方を考える：

(I) 小長方形  $R_{ij} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]$  から、点  $(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij})$  をとる：

$$\tilde{\mu} : \begin{cases} a_{i-1} \leq \tilde{s}_{ij} \leq a_i \\ c_{j-1} \leq \tilde{t}_{ij} \leq c_j \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$$

分割  $\Delta$  と点の選出  $\tilde{\mu}$  によって決まるリーマン和

$$R(\Delta, \tilde{\mu}) = \sum_{i,j} f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij})|R_{ij}|$$

を考えると、

$$\begin{aligned} R(\Delta, \tilde{\mu}) - R(\Delta, \mu) &= \sum_{i,j} (f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})) |R_{ij}| \\ &= \sum_A (f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})) |R_{ij}| \\ &\quad + \sum_B (f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})) |R_{ij}|. \end{aligned}$$

と置ける。ここで

$$\sum_A \left( f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij}) \right) |R_{ij}|$$

は  $D$  の境界  $\partial D$  と交わる小長方形  $R_{ij}$  についての和であり,

$$\sum_B \left( f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij}) \right) |R_{ij}|$$

は  $D$  の境界  $\partial D$  と交わらない小長方形  $R_{ij}$  についての和である.

有界閉集合  $D$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  の  $D$  での一様連続性により,

任意の正の数  $\epsilon (< M)$  に対して, 正の数  $\delta$  を, どの  $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$  に対しても

$$\sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2} < \delta \implies |f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| < \epsilon$$

が成り立つように選ぶことができる.

今, 分割  $\Delta$  の小区間の最大の幅を小さく  $|\Delta| < \delta$  とする.  $D$  での  $f(x, y) = f^*(x, y)$  の一

様連続性と  $D$  の外部では  $f^*(x, y) \equiv 0$  であることから,

$$|f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})| = \begin{cases} < \epsilon & (R_{ij} \subset D \text{ のとき}) \\ = 0 & (R_{ij} \cap D = \emptyset \text{ のとき}) \\ \leq M & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となっている. (例えば,  $(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) \in D, (s_{ij}, t_{ij}) \in R \setminus D$  または  $(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) \in R \setminus D, (s_{ij}, t_{ij}) \in D$

のとき,  $|f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})| \leq M$  となることに注意する.) こうして,

$$\sum_B |f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})| |R_{ij}| < \sum_B \epsilon |R_{ij}| \leq |R| \epsilon.$$

つぎに,  $\sum_A \left( f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij}) \right) |R_{ij}|$  について調べる.

$\partial D$  と交わる小長方形  $R_{ij}$  についての和については,

$$\sum_A |R_{ij}| = \sum_{R_{i,j} \cap \partial D \neq \emptyset} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) = b(\Delta)$$

が成り立っている.  $|f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})| \leq M$  であるから

$$\sum_A |f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})| |R_{ij}| \leq M \sum_A |R_{ij}| = Mb(\Delta).$$

こうして, つぎが成り立つ:

$$|R(\Delta, \tilde{\mu}) - R(\Delta, \mu)| = \left| \sum_{i,j} \left( f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) - f^*(s_{ij}, t_{ij}) \right) |R_{ij}| \right| < Mb(\Delta) + |R| \epsilon.$$

(II) 次に, 閉長方形  $[a, b] \times [c, d]$  の分割  $\tilde{\Delta}$  が分割  $\Delta$  の細分 ( $\tilde{\Delta}$  のすべての小長方形は  $\Delta$  の小長方形に含まれる) になっている場合を考える:

$$\tilde{\Delta} : \begin{cases} a = \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \tilde{a}_2 < \cdots < \tilde{a}_{p-1} < \tilde{a}_p = b \\ c = \tilde{c}_0 < \tilde{c}_1 < \tilde{c}_2 < \cdots < \tilde{c}_{q-1} < \tilde{c}_q = d \end{cases}, \quad |\tilde{\Delta}| \leq |\Delta| < \delta.$$

各小長方形  $\tilde{R}_{k,l} \equiv [\tilde{a}_{k-1}, \tilde{a}_k] \times [\tilde{c}_{l-1}, \tilde{c}_l]$  から, 点  $(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl})$  をとる:

$$\tilde{\mu} : \begin{cases} \tilde{a}_{i-1} \leq \tilde{s}_{ij} \leq \tilde{a}_i \\ \tilde{c}_{j-1} \leq \tilde{t}_{ij} \leq \tilde{c}_j \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q)$$

$\tilde{R}_{k,l}$  の面積  $(\tilde{a}_k - \tilde{a}_{k-1})(\tilde{c}_l - \tilde{c}_{l-1})$  を  $|\tilde{R}_{kl}|$  と表し, 分割  $\tilde{\Delta}$  と点の選出  $\tilde{\mu}$  によるリーマン和

$$R(\tilde{\Delta}, \tilde{\mu}) = \sum_{k,l} f^*(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl}) |\tilde{R}_{kl}|$$

を考える. 長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  の分割  $\tilde{\Delta}$  は分割  $\Delta$  の細分になっているので, リーマン和

$R(\Delta, \mu)$  は分割  $\Delta$  の小長方形ごとに分割  $\tilde{\Delta}$  の分点を繰り込んで

$$R(\Delta, \mu) = \sum_{i,j} f^*(s_{ij}, t_{ij}) (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) = \sum_{i,j} \left\{ \sum_{a_{i-1} < \tilde{a}_k \leq a_i, c_{j-1} < \tilde{c}_l \leq c_j} f^*(s_{ij}, t_{ij}) (\tilde{a}_k - \tilde{a}_{k-1})(\tilde{c}_l - \tilde{c}_{l-1}) \right\}$$

となる (分割  $\Delta$  の小長方形  $R_{ij}$  ごとに, まとめた). したがって

$$\begin{aligned} R(\tilde{\Delta}, \tilde{\mu}) - R(\Delta, \mu) &= \sum_{i,j} \left\{ \sum_{a_{i-1} < \tilde{a}_k \leq a_i, c_{j-1} < \tilde{c}_l \leq c_j} (f^*(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})) |\tilde{R}_{kl}| \right\} \\ &= \sum_A \left\{ \sum_{a_{i-1} < \tilde{a}_k \leq a_i, c_{j-1} < \tilde{c}_l \leq c_j} (f^*(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})) |\tilde{R}_{kl}| \right\} \\ &\quad + \sum_B \left\{ \sum_{a_{i-1} < \tilde{a}_k \leq a_i, c_{j-1} < \tilde{c}_l \leq c_j} (f^*(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})) |\tilde{R}_{kl}| \right\}. \end{aligned}$$

ここで  $\sum_A$  は  $D$  の境界  $\partial D$  と交わる小長方形  $R_{ij}$  についての和であり,  $\sum_B$  は  $D$  の境界  $\partial D$

と交わらない小長方形  $R_{ij}$  についての和である.

分割  $\Delta$  の幅  $|\Delta| < \delta$  であるから,  $f(x, y) = f^*(x, y)$  の  $D$  での一様連続性より 小長方形

$(\tilde{R}_{kl} \subset) R_{ij} \subset D$  のとき  $|f^*(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})| < \epsilon$  が成り立ち

$$\left| \sum_B \left\{ \sum_{a_{i-1} < \tilde{a}_k \leq a_i, c_{j-1} < \tilde{c}_l \leq c_j} |f^*(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})| |\tilde{R}_{kl}| \right\} \right| < \sum_B \epsilon |R_{ij}| \leq |R| \epsilon.$$

( $\because$  小長方形  $R_{ij}$  に含まれる小長方形  $\tilde{R}_{kl}$  の面積の和 =  $R_{ij}$  の面積.)

(I) の場合と同様に,  $|\tilde{\Delta}| \leq |\Delta| < \delta$  であるから,

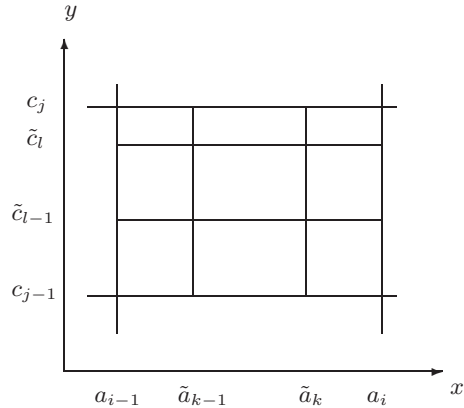
小長方形  $R_{ij} (\supset \tilde{R}_{kl})$  が  $\partial D$  と交わるとき  $|f^*(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})| \leq M$  が成り立ち

$$\begin{aligned} &\left| \sum_A \left\{ \sum_{a_{i-1} < \tilde{a}_k \leq a_i, c_{j-1} < \tilde{c}_l \leq c_j} |f^*(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl}) - f^*(s_{ij}, t_{ij})| |\tilde{R}_{kl}| \right\} \right| \\ &\leq M \left| \sum_A \left\{ \sum_{a_{i-1} < \tilde{a}_k \leq a_i, c_{j-1} < \tilde{c}_l \leq c_j} \tilde{R}_{kl} \right\} \right| \\ &\leq M \sum_A R_{ij} = Mb(|\Delta|). \end{aligned}$$

以上のことから，つぎが成り立つ：

$$\begin{aligned} |R(\tilde{\Delta}, \tilde{\mu}) - R(\Delta, \mu)| &= \sum_{i,j} f^*(\tilde{s}_{ij}, \tilde{t}_{ij}) |R_{ij}| - \sum_{k,l} f^*(\tilde{s}_{kl}, \tilde{t}_{kl}) |\tilde{R}_{kl}| \\ &< Mb(\Delta) + |R|\epsilon. \end{aligned}$$

(III) 長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  の二つの分割  $\Delta$  と  $\Delta'$  の分割の幅が  $|\Delta|, |\Delta'| < \delta$  となっている場合を考える．長方形  $R$  の二つの分割  $\Delta$  と  $\Delta'$  のすべての分点から作られる長方形  $R$  の分割  $\Delta''$  と分割  $\Delta''$  各小長方形からの点の選出  $\mu''$  に対応するリーマン和  $R(\Delta'', \mu'')$  を考える．



このとき，長方形  $R$  の分割と点の選出  $(\Delta, \mu), (\Delta', \mu')$  のそれぞれからのリーマン和  $R(\Delta, \mu), R(\Delta', \mu')$  を考えると，先の (I) と (II) で述べたことから

$$|R(\Delta, \mu) - R(\Delta', \mu')| \leq |R(\Delta, \mu) - R(\Delta'', \mu'')| + |R(\Delta'', \mu'') - R(\Delta', \mu')| \leq Mb(\Delta) + Mb(\Delta') + 2|R|\epsilon.$$

ところで， $D$  は‘面積確定’であるから， $\partial D$  と交わる小長方形  $R_{ij}$  についての和について

$$\sum_A |R_{ij}| = \sum_{R_{i,j} \cap \partial D \neq \emptyset} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) = b(\Delta) \rightarrow 0 \quad (|\Delta| \rightarrow 0)$$

が成り立っている．

(I)，(II) および (II) のいずれの場合においても，

$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} b(\Delta) = \lim_{|\Delta'| \rightarrow 0} b(\Delta') = 0$  が成り立ち，正の数  $\epsilon$  は任意に小さく取ることができるから，

$$\lim_{|\Delta|, |\Delta'| \rightarrow 0} |R(\Delta, \mu) - R(\Delta', \mu')| = 0$$

がわかる． //

**定理 2** の証明 変数  $y$  の関数  $\int_a^b f(x, y) dx$  が  $[c, d]$  で積分可能であることを示そう．

閉区間  $[c, d]$  の分割  $\Delta_y$  と点  $t_j$  の選出

$$\Delta_y : c = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = d, \quad c_{j-1} \leq t_j \leq c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

に対して， $\left| \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy - \sum_j \int_a^b f(x, t_j) dx \cdot (c_j - c_{j-1}) \right|$  を調べる．

そのために，閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  の分割  $\Delta$  (その細かさ  $|\Delta|$ ) とリーマン和  $R(\Delta, \mu)$  を考える．今，閉区間  $[c, d]$  の分割  $\Delta_y$  と点  $t_j$  の選出を考慮して

$$\Delta : \begin{cases} a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b \\ c = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = d \end{cases}$$



とし, 各小長方形  $R_{i,j} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]$  からの点  $(s_i, t_j)$  の選出

$$\mu : \begin{cases} a_{i-1} \leq s_i \leq a_i \\ c_{j-1} \leq t_j \leq c_j \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$$

に対するリーマン和  $R(\Delta, \mu) = \sum_{i,j} f(s_i, t_j)(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$  を考える.

関数  $f(x, y)$  が  $R$  上で積分可能であるから, 任意の正の数  $\epsilon$  に対して, 正の数  $\delta$  を

$$|\Delta| < \delta \implies \left| \iint_R f(x, y) dx dy - R(\Delta, \mu) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つようにとることができる. 分割  $\Delta$  を細かくして  $|\Delta| < \delta$  となるように取っておく.

このとき,

$$\begin{aligned} R(\Delta, \mu) &= \sum_{i,j} f(s_i, t_j)(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \\ &= \sum_j \int_a^b f(x, t_j) dx \cdot (c_j - c_{j-1}) \\ &\quad + \sum_j \left( \sum_i f(s_i, t_j)(a_i - a_{i-1}) - \int_a^b f(x, t_j) dx \right) (c_j - c_{j-1}) \\ &= \sum_j \int_a^b f(x, t_j) dx \cdot (c_j - c_{j-1}) + \sum_j \left( R_j - \int_a^b f(x, t_j) dx \right) (c_j - c_{j-1}), \end{aligned}$$

ただし  $R_j = \sum_i f(s_i, t_j)(a_i - a_{i-1})$ . 故に

$$\begin{aligned} &\left| \iint_R f(x, y) dx dy - \sum_j \int_a^b f(x, t_j) dx \cdot (c_j - c_{j-1}) \right| \\ &= \left| \iint_R f(x, y) dx dy - R(\Delta, \mu) + \sum_j \left( R_j - \int_a^b f(x, t_j) dx \right) (c_j - c_{j-1}) \right| \\ &\leq \left| \iint_R f(x, y) dx dy - R(\Delta, \mu) \right| + \left| \sum_j \left( R_j - \int_a^b f(x, t_j) dx \right) (c_j - c_{j-1}) \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_j \left( R_j - \int_a^b f(x, t_j) dx \right) (c_j - c_{j-1}) \right| \end{aligned}$$

が成り立っている. 今, 閉区間  $[c, d]$  の分割  $\Delta_y$  の細かさを  $|\Delta_y| = \max_j (c_j - c_{j-1}) < \frac{\delta}{2}$  と固定

する.  $|\Delta_x| = \max_i (a_i - a_{i-1})$  と置くと,  $R_j = \sum_i f(s_i, t_j)(a_i - a_{i-1})$  は閉区間  $[a, b]$  上で

積分可能な関数  $f(x, t_j)$  のリーマン和であるから, 正の数  $\epsilon$  に対して, 正の数  $\delta_x$  ( $< \frac{\delta}{2}$ ) を

$$|\Delta_x| < \delta_x \implies \left| R_j - \int_a^b f(x, t_j) dx \right| < \frac{\epsilon}{2(d-c)}$$

が成り立つようにとることができる. この場合, 閉長方形  $[a, b] \times [c, d]$  の分割の細かさ  $|\Delta|$  は

$$|\Delta| = \max_{i,j} \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + (c_j - c_{j-1})^2} < \sqrt{\delta_x^2 + \frac{\delta^2}{4}} < \delta$$

を満たしているので,  $|\Delta y| < \frac{\delta}{2}$  のとき

$$\begin{aligned} & \left| \iint_R f(x, y) dx dy - \sum_j \int_a^b f(x, t_j) dx \cdot (c_j - c_{j-1}) \right| \\ & < \frac{\epsilon}{2} + \sum_j \left| R_j - \int_a^b f(x, t_j) dx \right| (c_j - c_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2} + \sum_j \frac{\epsilon}{2(d-c)} (c_j - c_{j-1}) = \epsilon \end{aligned}$$

が導かれた. これは, 関数  $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  ( $c \leq y \leq d$ ) の  $[c, d]$  上での積分可能性と

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{|\Delta y| \rightarrow 0} \sum_j \int_a^b f(x, t_j) dx \cdot (c_j - c_{j-1}) = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

を示している. //

### 定理 3 の証明

二つの連続関数  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) によって定義される領域

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}$$

上の連続関数  $f(x, y)$  を考える. 領域  $D$  は二曲線  $C_1, C_2$  と線分  $L_a, L_b$  で囲まれている:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \varphi_1(x) \right\}, \quad C_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \varphi_2(x) \right\} \\ L_a &= \left\{ (a, y) \mid \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a) \right\}, \quad L_b = \left\{ (b, y) \mid \varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b) \right\}. \end{aligned}$$

閉区間  $[a, b]$  で定義された連続関数  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  は有界である (最大値・最小値定理) から,

$$d = \max_{a \leq x \leq b} \varphi_2(x) \geq c = \min_{a \leq x \leq b} \varphi_1(x)$$

が取れて

$$D \subset R = [a, b] \times [c, d], \quad \partial D = C_1 \cup C_2 \cup L_a \cup L_b.$$

明らかに  $D$  は有界閉領域であるから, 定理 連続関数の積分可能性 のおかげで, 定理 3 を示すためには  $D$  の境界  $\partial D$  が '面積 0 の集合である' ことを示せばよい.

連続関数  $\varphi_1(x)$  と  $\varphi_2(x)$  は閉区間  $[a, b]$  で一様連続である (定理 連続関数の一様連続性) から, 任意の正の数  $\epsilon$  に対して, ある正の数  $\delta'$  が存在して, 閉区間  $[a, b]$  のどの  $x, x'$  に対しても

$$|x - x'| < \delta' \implies |\varphi_1(x) - \varphi_1(x')| < \epsilon$$

が成り立つ. この正の数  $\epsilon$  に対して, ある正の数  $\delta''$  が存在して, 閉区間  $[a, b]$  で

$$|x - x'| < \delta'' \implies |\varphi_2(x) - \varphi_2(x')| < \epsilon$$

が成り立つ. 正の数  $\delta_1 = \min\{\delta', \delta''\}$  を取ると閉区間  $[a, b]$  のどの  $x, x'$  に対しても

$$|x - x'| < \delta_1 \implies |\varphi_1(x) - \varphi_1(x')|, |\varphi_2(x) - \varphi_2(x')| < \epsilon$$

が成り立つ.

さて、閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  の小長方形  $R_{i,j}$  への分割を  $\Delta$  とする、

$$\Delta : \begin{cases} a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b \\ c = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = d \end{cases}, \quad R_{i,j} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j].$$

$\partial D$  と交わる小長方形  $R_{i,j}$  についての和  $b(\Delta) = \sum_{R_{i,j} \cap \partial D \neq \emptyset} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \ (\geq 0)$

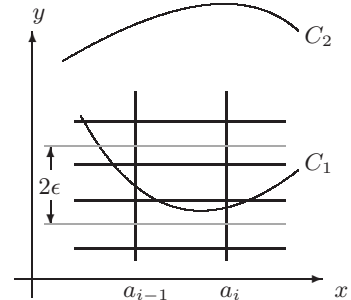
を調べる．今、分割  $\Delta$  の小区間の最大の幅をさらに小さく

$$|\Delta| < \delta = \min \left\{ \delta_1, \frac{\epsilon}{2} \right\}$$

とする．このとき、 $L_a \cup L_b$  と交わる小長方形  $R_{i,j}$  の面積

の和は、明らかに、つぎを満たす：

$$\sum_{R_{i,j} \cap (L_a \cup L_b) \neq \emptyset} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \leq 2\delta(d - c).$$



各  $i$  について、小長方形  $R_{i,j}$  と曲線  $C_1$  の共通部分が空でない ( $R_{i,j} \cap C_1 \neq \emptyset$ ) であるような

小長方形  $R_{i,j}$  の厚さの和は  $2\epsilon + 2\delta$  を超えない．このことは、つぎのように考えてわかる：

$a_{i-1} \leq x \leq a_i$  のとき、 $0 \leq a_i - a_{i-1} < \delta \leq \delta_1$  より  $|\varphi_1(x) - \varphi_1(a_{i-1})| < \epsilon$ . 故に

$$\{(x, \varphi_1(x)) \mid a_{i-1} \leq x \leq a_i\} \subset [\varphi_1(a_{i-1}) - \epsilon, \varphi_1(a_{i-1}) + \epsilon].$$

厚さ  $2\epsilon$  の小長方形  $[a_{i-1}, a_i] \times [\varphi_1(a_{i-1}) - \epsilon, \varphi_1(a_{i-1}) + \epsilon]$  が厚さ  $\delta$  以下の厚さの小長方形  $R_{i,j}$

で覆われるのであるから、その厚さは  $2\epsilon + 2\delta$  を超えない．同様に、各  $i$  について、 $R_{i,j} \cap C_2 \neq \emptyset$

であるような小長方形  $R_{i,j}$  の厚さの和も  $2\epsilon + 2\delta$  を超えない．

$$\sum_{R_{i,j} \cap (C_1 \cup C_2) \neq \emptyset} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \leq (b - a)(4\epsilon + 4\delta) = 6(b - a)\epsilon \quad (\because 2\delta \leq \epsilon)$$

以上のことから、小さい任意の正の数  $\epsilon$  に対して、正の数  $\delta$  を  $|\Delta| < \delta$  ならば

$$b(\Delta) = \sum_{R_{i,j} \cap \partial D \neq \emptyset} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \leq 2\delta(d - c) + 6(b - a)\epsilon = (6(b - a) + d - c)\epsilon$$

が成り立つように取れることがわかる．正の数  $\epsilon$  は任意に小さくしてよいから、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} b(\Delta) = 0$$

がわかる．領域  $D$  の境界の‘面積’が 0 であること ‘が示されたので、 $f^*(x, y)$  は長方形  $R$

で積分可能である．定理 2 を使って

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f^*(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad //$$

1 定理 3 の条件の下で、 $\varphi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \ (a \leq x \leq b)$  は連続である．

2 有界集合  $D$  が‘面積が確定する’集合であるとき、 $D$  の境界  $\partial D$  は‘面積 0 の集合である’ことを示せ．

## 5.2 累次積分

A. 累次積分 累次積分を次のようにも書き表す：

$$\int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy = \int_a^b \left( \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\left( \text{誤解が生じなければ, } \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left( \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy \right) dx \right),$$

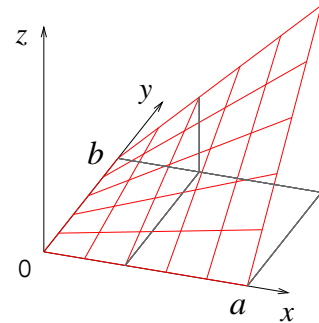
$$\int_c^d dy \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) dx = \int_c^d \left( \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\left( \text{誤解が生じなければ, } \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) dx \right) dy \right).$$

$p(x), q(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ),  $r(y), s(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ) は連続関数である.

① 次の累次積分  $\int_0^b \int_0^a xy dx dy$  を計算せよ . 解.

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a xy dx dy &= \int_0^b \left( \int_0^a xy dx \right) dy = \int_0^b \left[ \frac{x^2 y}{2} \right]_0^a dy \\ &= \int_0^b \frac{a^2 y}{2} dy = \frac{a^2}{2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^b \\ &= \frac{a^2 b^2}{4}. \quad // \end{aligned}$$

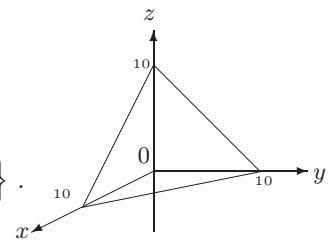


② 平面  $x=0, y=0, z=0, x+y+z=10$  によって囲まれた三角錐の体積  $V$  を重積分で求めよ .

$$V = \iint_D \{10 - x - y\} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y, 0 \leq x + y \leq 10\}.$$

解.

$$\begin{aligned} \iint_D \{10 - x - y\} dx dy &= \int_0^{10} \int_0^{10-y} \{10 - x - y\} dx dy = \int_0^{10} \left[ (10 - y)x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{10-y} dy \\ &= \int_0^{10} \left\{ (10 - y)^2 - \frac{(10 - y)^2}{2} \right\} dy = \int_0^{10} \frac{(10 - y)^2}{2} dy \\ &= \left[ \frac{-(10 - y)^3}{6} \right]_0^{10} = \frac{10^3}{6} = \frac{500}{3}. \quad // \end{aligned}$$



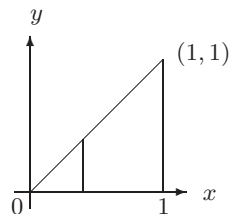
3 次の重積分を計算せよ ( $a, b > 0$ ) .

(1)  $\int_0^b \int_0^a x^2 + y^2 dx dy$     (2)  $\iint_D xy dx dy$  ,  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{bx}{a} \right\}$

(3)  $\iint_D xy dx dy$  ,  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b - \frac{bx}{a} \right\}$  .

4 つぎの累次積分  $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{x+y} dy dx$  を求めよ . 解 .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x+y} dy dx &= \int_0^1 \left[ \frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (2x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (2^{\frac{3}{2}} - 1)x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \left[ \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(2\sqrt{2} - 1) = \frac{4}{15}(2\sqrt{2} - 1) . \quad // \end{aligned}$$

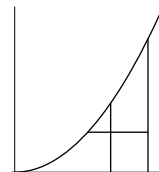


B. 累次積分の順序変更

1 積分順序の変更によって、次の式を示しなさい。  $\int_0^1 \left( \int_0^{x^2} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx \right) dy$

解.  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \right\}$  に対して、

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx dy .$$



2 累次積分の順序変更を行って、つぎの積分を求めよ .

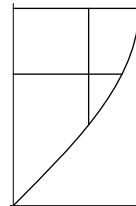
(1)  $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx dy$     (2)  $\int_0^1 \int_{\sin^{-1} x}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos y} dy dx$ .

解. (1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx dy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{x^3} dy dx = \int_0^1 [ye^{x^3}]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \left[ \frac{e^{x^3}}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}(e - 1) . \end{aligned}$$

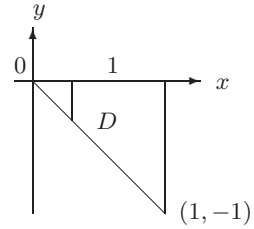
(2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sin^{-1} x}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos y} dy dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin y} e^{\cos y} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [xe^{\cos y}]_0^{\sin y} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y e^{\cos y} dy = \left[ e^{\cos y} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1 . \end{aligned}$$



3 重積分を計算しなさい.

$$\iint_D (x+y)e^y dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 0\}.$$



解.

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)e^y dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{-x}^0 (x+y)e^y dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^x te^{t-x} dt \right) dx \quad (\text{置換積分 } t = x+y) \\ &= \int_0^1 \left\{ [te^{t-x}]_0^x - \int_0^x e^{t-x} dt \right\} dx = \int_0^1 x - [e^{t-x}]_0^x dx \\ &= \int_0^1 x - 1 + e^{-x} dx = \left[ \frac{x^2}{2} - x - e^{-x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}. \quad // \end{aligned}$$

### 問題 5.2

1 次の累次積分の順序を変更しなさい.

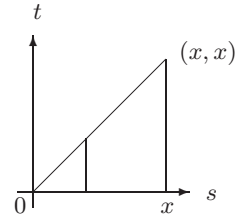
(1)  $\int_1^2 dx \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} f(x, y) dy$

(2)  $\int_0^1 dx \int_{-x}^x f(x, y) dy$

2 関数  $f(t)$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) が連続のとき,

$$\int_0^x ds \int_0^s f(t) dt = \int_0^x f(t)(x-t) dt \quad (x \in \mathbf{R})$$

が成り立つことを示せ.



3 関数  $F(x, y)$  が  $[a, b] \times [c, d]$  で  $C^2$  級とし,  $f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$  とする. このとき,

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

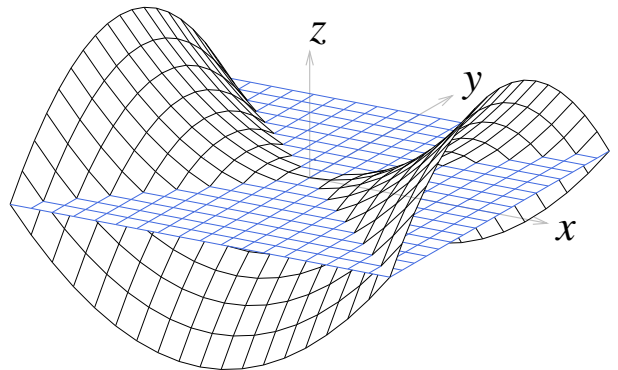
が成り立つことを示せ.

4  $R = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$   
とする.

(1) 重積分  $\iint_R \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} dx dy$  を計算しなさい.

(2)  $K = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, (x, y) \in R \right\}$

の体積を求めよ.



## 5.3 重積分の変数変換

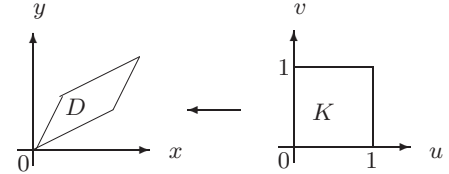
### A. 重積分の変数変換

#### 1 二重積分の変数変換

$C^1$  級変換  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  が  $uv$ -平面の (面積が確定する有界閉) 集合  $K$  を  $xy$  平面の集合  $D$  に 1 対 1 に写しているとする:  $D = \{(x(u, v), y(u, v)) \in \mathbf{R}^2 \mid (u, v) \in K\}$ . このとき,  $D$  上の連続関数  $f(x, y)$  に対し

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_K f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

が成り立つ, ここで  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  はヤコビアン の 絶対値 .



例えば,  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$  のとき, 一次変換  $x = au + bv$ ,  $y = cu + dv$  は  $uv$ -平面の正方形  $K = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$  を  $xy$  平面の平行四辺形  $D$  に 1 対 1 に

写す. この平行四辺形  $D$  の面積は  $\text{abs.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |ad - bc|$  であり (この事を示せ.), 関係式

$$\iint_D 1 dx dy = \iint_K \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint_K |ad - bc| du dv = |ad - bc|$$

が成り立っている.

**例** 極座標変換  $x(r, \theta) = r \cos \theta$ ,  $y(r, \theta) = r \sin \theta$  ( $r > 0$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$ ) に関しては,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

### B. 基本例

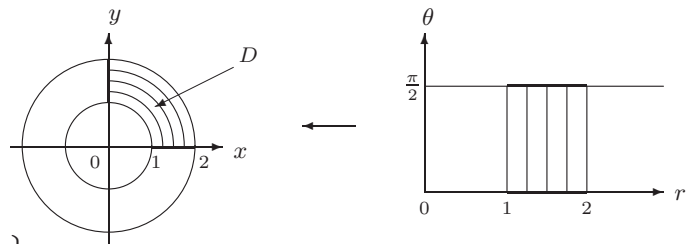
**2** 極座標系で表示される領域  $D$  上の

重積分  $\iint_D xy dx dy$ , ただし

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, y\}.$$

$D$  の極座標表示は  $D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$  であるから,

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^3 \frac{\sin 2\theta}{2} dr d\theta = \int_1^2 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[ \frac{r^4}{4} \right]_1^2 \left[ -\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$



3  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$  上の重積分  $\iint_D e^{-x-y} dx dy$  .

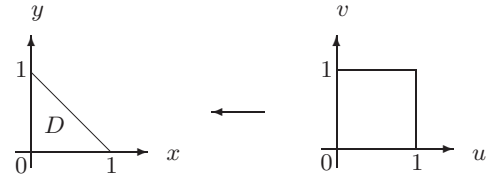
座標変換

$$x(u, v) = uv, \quad y(u, v) = u(1-v) \quad ((u, v) \in \mathbf{R}^2)$$

の下で,

$$D = \{(uv, u(1-v)) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$$

と表される.



$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u.$$

であるから,

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x-y} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 e^{-u} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_0^1 \int_0^1 e^{-u} u du dv \\ &= \int_0^1 dv \int_0^1 e^{-u} u du = \left[ -e^{-u} u \right]_0^1 - \int_0^1 e^{-u} du = -\frac{1}{e} + \left[ -e^{-u} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

4  $0 < a < 1$  と  $D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$  に対して, 二重積分  $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy$  を求めよ.

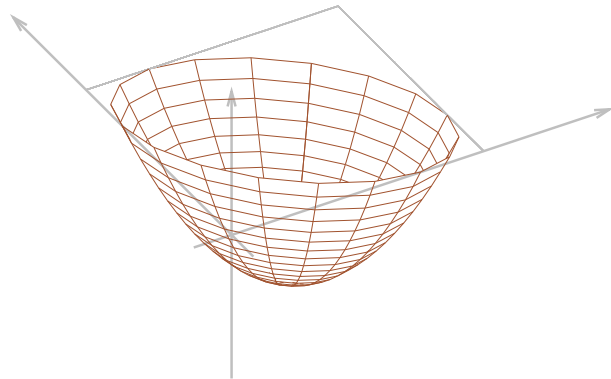
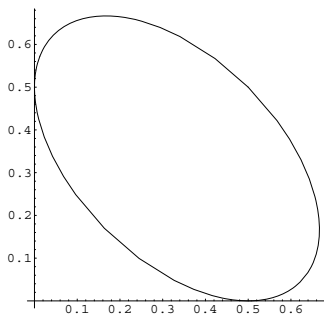
$$\alpha \neq 2 \text{ のとき, } \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_a^1 r^{1-\alpha} dr d\theta = 2\pi \left[ \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_a^1 = \frac{2\pi(1-a^{2-\alpha})}{2-\alpha}.$$

$$\alpha = 2 \text{ のとき, } \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_a^1 r^{-1} dr d\theta = 2\pi \left[ \log r \right]_a^1 = -2\pi \log a.$$

5  $f(x, y) = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 4y + 1$  のとき,

領域  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y) \leq z \leq 0\}$  の体積  $V$  を求めよ.

HINT.  $f(x, y) = 6\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0$  は楕円の方程式である.





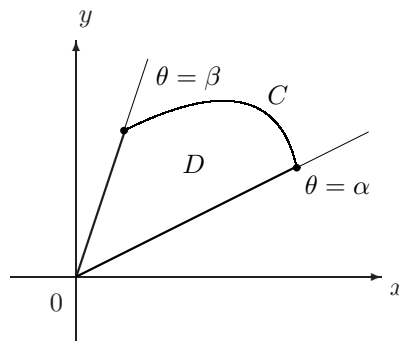
**例**  $-\pi < \alpha < \beta \leq \pi$  とする. (極座標表示)  $C^1$  級曲線

$C : r = f(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$  が与えられたとき, 領域

$$D = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta \right\}$$

の面積は

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta.$$



**証明**  $xy$  平面の領域  $D$  は  $r\theta$ -平面の領域  $K = \left\{ (r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta \right\}$

から極座標変換で得られるから, その面積は

$$\iint_D dx dy = \iint_K r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{f(\theta)} r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{f(\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta. \quad //$$

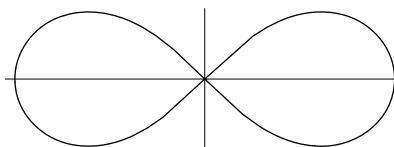
### 問題 5.3

**1** 関数  $f(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) は  $C^1$  級とする.  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f'(x^2+y^2) dx dy = \pi(f(1)-f(0))$  を示せ.

**2** Cardioid  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) の囲む領域の面積を求めよ.

**3** Lemniscate  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  ( $a > 0$ ) の囲む領域の面積を求めよ.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

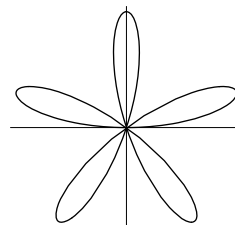


**4** バラ曲線 Rhodonea の一枚の花弁 ( $n \in \mathbf{N}, a > 0$ )

$$r = a \sin n\theta \quad \left( 0 \leq \theta < \frac{\pi}{n} \right)$$

の囲む領域の面積を求めよ.

$$r = \sin 5\theta$$



**5** 領域  $D : x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$  に対して,  $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$  を求めよ.

## 5.4 二重積分の変数変換公式の証明

### D. 二重積分の変数変換公式

**定理 二重積分の変数変換公式**  $C^1$  級変換  $\Phi : x = x(u, v), y = y(u, v)$  が  $uv$ -平面の (面積が  
 確定する有界閉) 集合  $K$  を  $xy$  平面の集合  $D$  に 1 対 1 に写し,  $K$  上で  $J(u, v) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$   
 とする;

$$D = \left\{ (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbf{R}^2 \mid (u, v) \in K \right\}.$$

このとき,  $D$  上の連続関数  $f(x, y)$  に対して, つぎが成り立つ:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_K f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

**証明**  $K$  が閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  である場合を考える.

準備

(1.1) 関数  $x(u, v)$  および  $y(u, v)$  は有界閉区間  $R$  で連続であるから, ある正の数  $L_0$  が存在して

$$|x(u, v)| < L_0, \quad |y(u, v)| < L_0 \quad ((u, v) \in R)$$

が成り立つ. このとき,  $L = L_0 + 1$  に対して閉正方形  $E = [-L, L] \times [-L, L]$  を取ると,  $D \subset E$   
 で  $D$  の境界と  $E$  の境界の間の距離は 1 より大きくなっている.

(1.2)  $D = \Phi(R)$  は, 有界閉区間  $R$  の連続写像  $\Phi$  による像であるから, 有界閉集合である.  
 変換  $\Phi : R \rightarrow D$  は  $C^1$  級 1 対 1 対応で,  $R$  の境界  $\partial R$  が  $D$  の境界  $\partial D$  に写像されて  
 $\partial D = \Phi(\partial R)$  となっている (参考: 4.11 D. **逆写像定理**).

(1.3) 任意の小さい正の数  $\alpha$  に対して, 長方形  $R_\alpha = [a + \alpha, b - \alpha] \times [c + \alpha, d - \alpha]$  ( $\subset R$ ) およ  
 びその境界  $\partial R_\alpha$  を考える. このとき,  $D_\alpha = \Phi(R_\alpha)$  の境界  $\partial D_\alpha = \Phi(\partial R_\alpha)$  と  $\partial D$  の距離  $\rho_\alpha$   
 について, 有界閉集合の共通部分  $\partial D \cap \partial D_\alpha = \emptyset$  であるから

$$\rho_\alpha = \min \left\{ \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} : (x, y) \in \partial D, (x', y') \in \partial D_\alpha \right\} > 0$$

が成り立っている.

(a) 偏導関数の連続性により, ある正の数  $M (> 1)$  に対して, つぎが成り立つ:

$$|x_u(u, v)| \leq M, \quad |x_v(u, v)| \leq M, \quad |y_u(u, v)| \leq M, \quad |y_v(u, v)| \leq M \quad ((u, v) \in R).$$

(1.4)  $R$  に含まれる閉長方形  $R' = [a', b'] \times [c', d']$  の面積を  $|R'| = (b' - a')(d' - c')$  と表す.

閉長方形  $R'$  が条件  $\frac{1}{k} < \frac{d' - c'}{b' - a'} < k$  を満たしているとき,  $\Phi(R')$  は面積  $4M^2 K |R'|$  の

正方形に含まれている, ただし  $K = k + \frac{1}{k} (\geq 2)$ .

(1.4) の証明  $K = k + \frac{1}{k} (\geq 2)$  とすると

$$\delta^2 = (b' - a')^2 + (d' - c')^2 = \left( \frac{b' - a'}{d' - c'} + \frac{d' - c'}{b' - a'} \right) |R'| \leq K |R'| \quad (\exists \delta > 0)$$

が成り立っている．  $\Phi(R')$  の広がり方について考える．各  $(u, v), (u', v') \in R'$  に対して

$$\begin{aligned} |x(u', v') - x(u, v)| &= |x(u', v') - x(u, v') + x(u, v') - x(u, v)| \\ &= |x_u(\xi, v')(u' - u) + x_v(u, \eta)(v' - v)| \quad (\exists (\xi, v'), (u, \eta) \in R') \\ &\leq |x_u(\xi, v')(u' - u)| + |x_v(u, \eta)(v' - v)| \\ &\leq 2M \sqrt{(u' - u)^2 + (v' - v)^2} \leq 2M \sqrt{\delta^2} \end{aligned}$$

が成り立つので，連続関数の最大値・最小値定理により

$$\max_{(u,v) \in R'} x(u, v) - \min_{(u,v) \in R'} x(u, v) \leq 2M \sqrt{\delta^2}.$$

が成り立つ．同様に，各  $(u, v), (u', v') \in R_{i,j}$  に対して  $|y(u', v') - y(u, v)| \leq 2M \sqrt{\delta^2}$  そして

$$\max_{(u,v) \in R'} y(u, v) - \min_{(u,v) \in R'} y(u, v) \leq 2M \sqrt{\delta^2}.$$

が成り立つ．このことから  $\Phi(R')$  が一辺  $2M \sqrt{\delta^2}$  のある正方形に含まれることがわかる．

$\delta^2 \leq K |R'|$  であるから，各  $\Phi(R')$  は面積  $4M^2 K |R'|$  のある正方形に含まれている． //

(1.5)  $R$  に含まれる閉長方形  $R_\alpha = [a + \alpha, b - \alpha] \times [c + \alpha, d - \alpha] (\subset R) (\alpha > 0)$  を考える．

$$D \setminus D_\alpha = \Phi(R) \setminus \Phi(R_\alpha) = \Phi(R \setminus R_\alpha)$$

は面積  $10M^2(R - |R_\alpha|)$  の多角形に含まれる．

(1.5) の証明 多角形  $R \setminus R_\alpha$  は四個の ( $R$  内の) 長方形  $A = [a, a + \alpha] \times [c, d]$ ,  $B = [b - \alpha, b] \times [c, d]$ ,

$C = [a + \alpha, b - \alpha] \times [c, c + \alpha]$ ,  $D = [a + \alpha, b - \alpha] \times [d - \alpha, d]$  の和集合  $R \setminus R_\alpha = A \cup B \cup C \cup D$

である．これらの長方形，例えば  $A$ ，は長辺と短辺の長さの比  $\frac{1}{2} < \frac{\text{長辺}}{\text{短辺}} < 2$  を満たす有限個の

小長方形  $A_i$  の和集合  $A = A_1 \cup \dots \cup A_{n_A}$  に分割できる．(1.4) により各  $\Phi(A_i)$  は面積

$$4M^2 \times \frac{5}{2} \times (A_i \text{の面積}) = 10M^2 \times (A_i \text{の面積})$$

の正方形に含まれるので， $\Phi(A)$  は面積  $10M^2 \times (A \text{の面積})$  の多角形に含まれる．長方形

$B, C, D$  についても同様であるから， $\Phi(R \setminus R_\alpha)$  は面積  $10M^2 \times (R \setminus R_\alpha \text{の面積})$  の多角形に

含まれることがわかる． //

長方形  $R$  の面積  $(b - a)(d - c)$  を  $|R|$ ，長方形  $R_\alpha$  の面積  $(b - a - 2\alpha)(d - c - 2\alpha)$  を  $|R_\alpha|$

で表す．上の (1.5) において， $R \setminus R_\alpha$  の面積  $= |R| - |R_\alpha| = 2\alpha(b - a + d - c - 2\alpha)$  であるから，

$$R \setminus R_\alpha \text{の面積} = 2\alpha(b - a + d - c - 2\alpha) \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow 0)$$

が成り立つ。したがって、 $D \setminus D_\alpha = \Phi(R \setminus R_\alpha)$  の面積  $\rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ) が成り立つ。

$\partial D = \Phi(\partial R) \subset \Phi(R \setminus R_\alpha)$  であるから

(1.6)  $D = \Phi(R)$  の境界  $\partial D$  は面積 0 の集合である。

関数  $f(x, y)$  は  $D$  で連続であるから、関数  $f(x, y)$  の  $D$  上から閉長方形  $E$  への拡張

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in D) \\ 0 & ((x, y) \notin D). \end{cases}$$

は  $D$  を含む閉長方形  $E$  で積分可能で、有界閉集合  $D$  上の重積分の定義より

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f^*(x, y) dx dy$$

である。(参照 5.1 A 定理 連続関数の積分可能性)。

証明の続き。閉区間  $R$  の分割を考える、 $\Delta : \begin{cases} a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b \\ c = c_0 < c_1 < \dots < c_n = d. \end{cases}$

分割  $\Delta$  の分点を  $P_{i,j} = (a_i, c_j)$  ( $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$ ) と置き、分割  $\Delta$  の細かさを

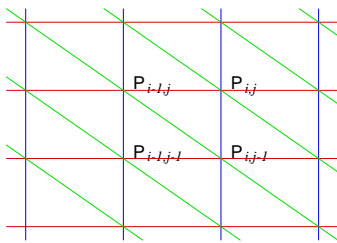
$$|\Delta| \equiv \max_{i,j} \delta_{i,j}, \quad \delta_{i,j} = \sqrt{(a_i - a_{i-1})^2 + (c_j - c_{j-1})^2}$$

とする。これらの小長方形  $R_{i,j} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]$  を対角線によって三角形へ分割する：

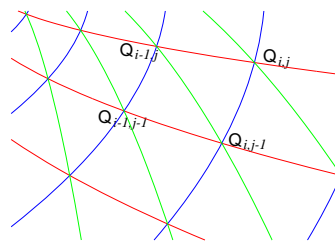
$$\begin{cases} R_{i,j}^\Delta = \text{三点 } P_{i-1,j}, P_{i-1,j-1}, P_{i,j-1} \text{ を頂点とする三角形} \\ R_{i,j}^\nabla = \text{三点 } P_{i-1,j}, P_{i,j}, P_{i,j-1} \text{ を頂点とする三角形} \end{cases}$$

と置き、 $R_{i,j} = R_{i,j}^\Delta \cup R_{i,j}^\nabla$ 。  $Q_{i,j} = \Phi(P_{i,j}) = (x(a_i, c_j), y(a_i, c_j))$  と置く。変換  $\Phi$  が  $R$  の三角形  $R_{i,j}^\Delta, R_{i,j}^\nabla$  をどのような部分領域に写すかを考えると、

$$R = \bigcup_{i,j} R_{i,j}^\Delta \cup \bigcup_{i,j} R_{i,j}^\nabla \quad \text{そして} \quad D = \Phi(R) = \bigcup_{i,j} \Phi(R_{i,j}^\Delta) \cup \bigcup_{i,j} \Phi(R_{i,j}^\nabla).$$



$\rightarrow$   
 $\Phi$



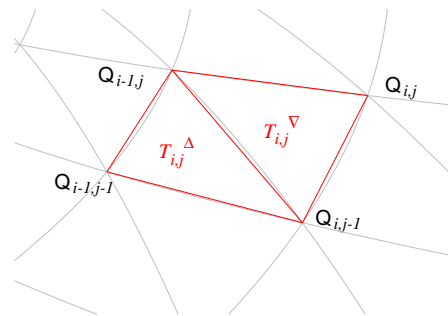
$D$  内の点  $Q_{i,j} = \Phi(P_{i,j})$  を取って

三点  $Q_{i-1,j}, Q_{i-1,j-1}, Q_{i,j-1}$  を頂点とする

三角形  $T_{i,j}^\Delta$  と三点  $Q_{i-1,j}, Q_{i,j}, Q_{i,j-1}$  を

頂点とする三角形  $T_{i,j}^\nabla$  を考え、

$T_\Delta \equiv \bigcup_{i,j} T_{i,j}^\Delta \cup \bigcup_{i,j} T_{i,j}^\nabla$  を調べる。



三角形  $T_{i,j}^\Delta$  はつぎの一次変換  $\Phi_{i,j}^\Delta$  による三角形  $R_{i,j}^\Delta$  の像である :

$$\begin{cases} x = x(a_{i-1}, c_{j-1}) + \frac{x(a_i, c_{j-1}) - x(a_{i-1}, c_{j-1})}{a_i - a_{i-1}}(u - a_{i-1}) + \frac{x(a_{i-1}, c_j) - x(a_{i-1}, c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}(v - c_{j-1}) \\ y = y(a_{i-1}, c_{j-1}) + \frac{y(a_i, c_{j-1}) - y(a_{i-1}, c_{j-1})}{a_i - a_{i-1}}(u - a_{i-1}) + \frac{y(a_{i-1}, c_j) - y(a_{i-1}, c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}(v - c_{j-1}). \end{cases}$$

$$\left( R_{i,j}^\Delta = \left\{ (u, v) \mid a_{i-1} \leq u \leq a_i, c_{j-1} \leq v \leq c_j + \frac{c_{j-1} - c_j}{a_i - a_{i-1}}(u - a_{i-1}) \right\} \right)$$

また , 三角形  $T_{i,j}^\nabla$  はつぎの一次変換  $\Phi_{i,j}^\nabla$  による三角形  $R_{i,j}^\nabla$  の像である :

$$\begin{cases} x = x(a_i, c_j) + \frac{x(a_{i-1}, c_j) - x(a_i, c_j)}{a_{i-1} - a_i}(u - a_i) + \frac{x(a_i, c_{j-1}) - x(a_i, c_j)}{c_{j-1} - c_j}(v - c_j) \\ y = y(a_i, c_j) + \frac{y(a_{i-1}, c_j) - y(a_i, c_j)}{a_{i-1} - a_i}(u - a_i) + \frac{y(a_i, c_{j-1}) - y(a_i, c_j)}{c_{j-1} - c_j}(v - c_j). \end{cases}$$

$$\left( R_{i,j}^\nabla = \left\{ (u, v) \mid a_{i-1} \leq u \leq a_i, c_j \geq v \geq c_j + \frac{c_{j-1} - c_j}{a_i - a_{i-1}}(u - a_{i-1}) \right\} \right)$$

平均値の定理によって , これらの一次変換  $\Phi_{i,j}^\Delta$  の係数は

$$\begin{cases} \frac{x(a_i, c_{j-1}) - x(a_{i-1}, c_{j-1})}{a_i - a_{i-1}} = x_u(\xi_{i,j}, c_{j-1}), & \frac{x(a_{i-1}, c_j) - x(a_{i-1}, c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}} = x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}) \\ \frac{y(a_i, c_{j-1}) - y(a_{i-1}, c_{j-1})}{a_i - a_{i-1}} = y_u(\xi'_{i,j}, c_{j-1}), & \frac{y(a_{i-1}, c_j) - y(a_{i-1}, c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}} = y_v(a_{i-1}, \eta'_{i,j}) \end{cases} \quad (\exists \xi_{i,j}, \xi'_{i,j} \in (a_{i-1}, a_i), \quad \exists \eta_{i,j}, \eta'_{i,j} \in (c_{j-1}, c_j))$$

と表わされるので ,  $\Phi_{i,j}^\Delta$  は

$$\Phi_{i,j}^\Delta : \begin{cases} x = x(a_{i-1}, c_{j-1}) + x_u(\xi_{i,j}, c_{j-1})(u - a_{i-1}) + x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j})(v - c_{j-1}) \\ y = y(a_{i-1}, c_{j-1}) + y_u(\xi'_{i,j}, c_{j-1})(u - a_{i-1}) + y_v(a_{i-1}, \eta'_{i,j})(v - c_{j-1}) \end{cases}$$

と表わされる . 同様に , 一次変換  $\Phi_{i,j}^\nabla$  は

$$\Phi_{i,j}^\nabla : \begin{cases} x = x(a_i, c_j) + x_u(\mu_{i,j}, c_j)(u - a_i) + x_v(a_i, \nu_{i,j})(v - c_j) \\ y = y(a_i, c_j) + y_u(\mu'_{i,j}, c_j)(u - a_i) + y_v(a_i, \nu'_{i,j})(v - c_j) \end{cases}$$

と表わされる , ただし  $\exists \mu_{i,j}, \mu'_{i,j} \in (a_{i-1}, a_i), \quad \exists \nu_{i,j}, \nu'_{i,j} \in (c_{j-1}, c_j)$  .

小長方形  $R_{i,j}$  の面積  $(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$  を  $|R_{i,j}|$  で表すことにする . このとき , 長方形  $R$  の面積  $(b-a)(d-c) = |R| = \sum_{i,j} |R_{i,j}|$  が成り立ち , 三角形  $R_{i,j}^\Delta$  の面積  $|R_{i,j}^\Delta| = \frac{|R_{i,j}|}{2}$  ,  $R_{i,j}^\nabla$  の面積  $|R_{i,j}^\nabla| = \frac{|R_{i,j}|}{2}$  である . 三角形  $T_{i,j}^\Delta$  の面積を  $|T_{i,j}^\Delta|$  ,  $T_{i,j}^\nabla$  の面積を  $|T_{i,j}^\nabla|$  と表す .

$D$  上の連続関数  $f(x, y)$  に対してつぎの事が成り立つ : ただし , ( 式表現を簡明にするために )  $R$  上の連続関数  $\tilde{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$  を考える (  $\therefore \tilde{f}(a_i, c_j) = f(x(a_i, c_j), y(a_i, c_j))$  ) .

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |J(a_{i-1}, c_{j-1})| |R_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |J(a_i, c_j)| |R_{i,j}^\nabla| \right\} \\
& = \iint_R f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, dudv, \\
(2) \quad & \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |T_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |T_{i,j}^\nabla| \right\} \\
& = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |J(a_{i-1}, c_{j-1})| |R_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |J(a_i, c_j)| |R_{i,j}^\nabla| \right\}, \\
(3) \quad & \text{関数 } f(x, y) \text{ は } D \text{ で積分可能で} \\
& \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |T_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |T_{i,j}^\nabla| \right\} = \iint_D f(x, y) \, dxdy.
\end{aligned}$$

これらの (1), (2), (3) を示すことができれば, 定理の証明は終わる.

(1) が成り立つこと. 関数  $\tilde{f}(u, v) |J(u, v)|$  は閉長方形  $R$  で連続であるから  $R$  で積分可能 (5.1

定理 2) である. 4.2 D. 連続性と  $\epsilon - \delta$  論法 [3] を参照すると

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |J(a_{i-1}, c_{j-1})| |R_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |J(a_i, c_j)| |R_{i,j}^\nabla| \\
= & \frac{\tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |J(a_{i-1}, c_{j-1})| + \tilde{f}(a_i, c_j) |J(a_i, c_j)|}{2} |R_{i,j}| = \tilde{f}(p_{i,j}, q_{i,j}) |J(p_{i,j}, q_{i,j})| |R_{i,j}| \quad (\exists p_{i,j}, q_{i,j} \in R_{i,j})
\end{aligned}$$

と表すことができるので, リーマン和の極限值としての積分の考えから明らかに

$$\begin{aligned}
& \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |J(a_{i-1}, c_{j-1})| |R_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |J(a_i, c_j)| |R_{i,j}^\nabla| \right\} \\
= & \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \tilde{f}(p_{i,j}, q_{i,j}) |J(p_{i,j}, q_{i,j})| |R_{i,j}| = \iint_R f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, dudv.
\end{aligned}$$

(2) を示すために,  $|T_{i,j}^\Delta|$ ,  $|T_{i,j}^\nabla|$  を調べなければならない. 変換  $\Phi = (x(u, v), y(u, v))$  が有界閉区間  $R$  で  $C^1$  級であることから, つぎのことが導かれる.

(b) 有界閉区間  $R$  で上での偏導関数の一様連続性により, 任意の正の数  $\epsilon$  に対して ( $\frac{\epsilon}{4M}$  に着目して) ある正の数  $\delta$  を取ると, 任意の  $(u, v), (u', v') \in R$  に対して

$$\max\{|u - u'|, |v - v'|\} < \delta \implies \begin{cases} |x_u(u, v) - x_u(u', v')| < \frac{\epsilon}{4M}, & |x_v(u, v) - x_v(u', v')| < \frac{\epsilon}{4M} \\ |y_u(u, v) - y_u(u', v')| < \frac{\epsilon}{4M}, & |y_v(u, v) - y_v(u', v')| < \frac{\epsilon}{4M} \end{cases}$$

が成り立つ.

**補題 1** 有界閉区間  $R$  で定義された  $C^1$  級関数  $x(u, v), y(u, v)$  から導かれる六変数関数

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) & = x_u(u_1, v)y_v(u, v_2) - x_v(u, v_1)y_u(u_2, v) \\
(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) & \in \tilde{R} \equiv [a, b] \times [a, b] \times [a, b] \times [c, d] \times [c, d] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^6
\end{aligned}$$

に対して, つぎが成り立つ:  $\max\{|u_1 - u|, |u_2 - u|, |v_1 - v|, |v_2 - v|\} < \delta$  ならば

$$|\tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) - \tilde{J}(u, u, u, v, v, v)| < \epsilon.$$

**補題 1** の証明 . 先に述べた (a) と (b) より ,

$$\begin{aligned}
& \max\{|u_1 - u|, |u_2 - u|, |v_1 - v|, |v_2 - v|\} < \delta \quad \text{ならば} \\
& \left| \tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) - \tilde{J}(u, u, u, v, v, v) \right| = \left| \tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) - J(u, v) \right| \\
& = \left| x_u(u_1, v)y_v(u, v_2) - x_v(u, v_1)y_u(u_2, v) - \left\{ x_u(u, v)y_v(u, v) - x_v(u, v)y_u(u, v) \right\} \right| \\
& = \left| x_u(u_1, v)y_v(u, v_2) - x_u(u, v)y_v(u, v) - \left\{ x_v(u, v_1)y_u(u_2, v) - x_v(u, v)y_u(u, v) \right\} \right| \\
& = \left| x_u(u_1, v)(y_v(u, v_2) - y_v(u, v)) + (x_u(u_1, v) - x_u(u, v))y_v(u, v) \right. \\
& \quad \left. - \left\{ x_v(u, v_1)(y_u(u_2, v) - y_u(u, v)) + (x_v(u, v_1) - x_v(u, v))y_u(u, v) \right\} \right| \\
& \leq M|y_v(u, v_2) - y_v(u, v)| + M|x_u(u_1, v) - x_u(u, v)| \\
& \quad + M|y_u(u_2, v) - y_u(u, v)| + M|x_v(u, v_1) - x_v(u, v)| \\
& < M\frac{\epsilon}{4M} + M\frac{\epsilon}{4M} + M\frac{\epsilon}{4M} + M\frac{\epsilon}{4M} = \epsilon \quad \text{が成り立つ .} \quad //
\end{aligned}$$

関数  $J(u, v)$  の符号に注意する :  $R$  で関数  $J(u, v) \neq 0$  であるから ,  $J(u, v)$  は  $R$  で定符号  $J(u, v) > 0$  ( $\forall (u, v) \in R$ ) または  $J(u, v) < 0$  ( $\forall (u, v) \in R$ ) であるが , 今は正定符号であるとしよう . このとき , 連続関数  $J(u, v)$  は  $R$  で正の最小値  $m$  をとる :  $m = \min_{(u, v) \in R} J(u, v) > 0$  .

さて , 任意の正の数  $\epsilon$  を十分小さく  $\epsilon < m$  を満たすようにとり , この正の数  $\epsilon$  に対して (b) における正の数  $\delta$  を取っておく . このとき , つぎが成り立つ :

$$\begin{aligned}
(c) \quad & \max\{|u_1 - u|, |u_2 - u|, |v_1 - v|, |v_2 - v|\} < \delta \quad \text{ならば} \\
& \left| \tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) - \tilde{J}(u, u, u, v, v, v) \right| < \epsilon \quad \text{かつ} \quad \tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) > 0 .
\end{aligned}$$

何故ならば , **補題 1** より ,  $\max\{|u_1 - u|, |u_2 - u|, |v_1 - v|, |v_2 - v|\} < \delta$  のとき

$$\begin{aligned}
& \tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) - \tilde{J}(u, u, u, v, v, v) > -\epsilon \geq -m \quad \text{であるから ,} \\
& \tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) > \tilde{J}(u, u, u, v, v, v) - m = J(u, v) - m \geq 0 .
\end{aligned}$$

今 , 閉長方形  $R$  の分割  $\Delta$  を  $|\Delta| < \delta$  ( $< 1$ ) となるよう細かくしておき ,

$(x_{i,j}, y_{i,j}) \equiv Q_{i,j} = \Phi(P_{i,j}) = (x(a_i, c_j), y(a_i, c_j))$  と置く .

一次変換  $\Phi_{i,j}^\Delta$  の表現から , 三角形  $T_{i,j}^\Delta$  の面積  $|T_{i,j}^\Delta|$  はつぎのようになる :

$$\begin{aligned}
|T_{i,j}^\Delta| &= \frac{1}{2} |(x_{i,j-1} - x_{i-1,j-1})(y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1}) - (x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1})(y_{i,j-1} - y_{i-1,j-1})| \\
&= \frac{1}{2} |x_u(\xi_{i,j}, c_{j-1})y_v(a_{i-1}, \eta'_{i,j}) - x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j})y_u(\xi'_{i,j}, c_{j-1})| \times (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \\
&= (x_u(\xi_{i,j}, c_{j-1})y_v(a_{i-1}, \eta'_{i,j}) - x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j})y_u(\xi'_{i,j}, c_{j-1})) \times |R_{i,j}^\Delta| \quad (\because (c')) \\
&= \tilde{J}(a_{i-1}, \xi_{i,j}, \xi'_{i,j}, c_{j-1}, \eta_{i,j}, \eta'_{i,j}) \times |R_{i,j}^\Delta| .
\end{aligned}$$

ここで ,

$$\epsilon_{i,j}^\Delta = \tilde{J}(a_{i-1}, \xi_{i,j}, \xi'_{i,j}, c_{j-1}, \eta_{i,j}, \eta'_{i,j}) - J(a_{i-1}, c_{j-1})$$

と置くと ,

$$|T_{i,j}^\Delta| = \left\{ J(a_{i-1}, c_{j-1}) + \epsilon_{i,j}^\Delta \right\} |R_{i,j}^\Delta|$$

が成り立つ。同様な主張が、三角形  $T_{i,j}^\nabla$  の面積についても成り立つ：

$$\left\{ \begin{array}{l} |T_{i,j}^\nabla| = \frac{1}{2} |(x_{i-1,j} - x_{i,j})(y_{i,j-1} - y_{i,j}) - (x_{i,j-1} - x_{i,j})(y_{i-1,j} - y_{i,j})| \\ = \frac{1}{2} |x_u(\mu_{i,j}, c_j)y_v(a_i, \nu'_{i,j}) - x_v(a_i, \nu_{i,j})y_u(\mu'_{i,j}, c_j)| \times (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \\ = \frac{1}{2} (x_u(\mu_{i,j}, c_j)y_v(a_i, \nu'_{i,j}) - x_v(a_i, \nu_{i,j})y_u(\mu'_{i,j}, c_j)) \times (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \\ = \tilde{J}(a_i, \mu_{i,j}, \mu'_{i,j}, c_j, \nu_{i,j}, \nu'_{i,j}) \times |R_{i,j}^\nabla| = \left\{ J(a_i, c_j) + \epsilon_{i,j}^\nabla \right\} |R_{i,j}^\nabla| \\ \epsilon_{i,j}^\nabla = \tilde{J}(a_i, \mu_{i,j}, \mu'_{i,j}, c_j, \nu_{i,j}, \nu'_{i,j}) - J(a_i, c_j) . \end{array} \right.$$

つぎに、 $|\epsilon_{i,j}^\Delta|$  の大きさを考えてみよう。

$a_{i-1}, \xi_{i,j}, \xi'_{i,j} \in [a_{i-1}, a_i], c_{j-1}, \eta_{i,j}, \eta'_{i,j} \in [c_{j-1}, c_j]$  が成り立つので、上の (c) より

$$\begin{aligned} |\epsilon_{i,j}^\Delta| &= \left| \tilde{J}(a_{i-1}, \xi_{i,j}, \xi'_{i,j}, c_{j-1}, \eta_{i,j}, \eta'_{i,j}) - J(a_{i-1}, c_{j-1}) \right| \\ &= \left| \tilde{J}(a_{i-1}, \xi_{i,j}, \xi'_{i,j}, c_{j-1}, \eta_{i,j}, \eta'_{i,j}) - \tilde{J}(a_{i-1}, a_{i-1}, a_{i-1}, c_{j-1}, c_{j-1}, c_{j-1}) \right| < \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に、三角形  $T_{i,j}^\nabla$  の面積に関連してつぎも成り立つ： $|\epsilon_{i,j}^\nabla| < \epsilon$ 。

さらに、つぎのことに注意する。

(d) 関数  $f(x, y)$  は有界閉集合  $D = \Phi(R)$  で連続であるから、最大絶対値  $V$  を取る：

$$(0 \leq) V = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)| < \infty .$$

こうして

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |T_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |T_{i,j}^\nabla| \right\} &= \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |J(a_{i-1}, c_{j-1})| |R_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |J(a_i, c_j)| |R_{i,j}^\nabla| \right\} \\ &+ \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) \epsilon_{i,j}^\Delta |R_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) \epsilon_{i,j}^\nabla |R_{i,j}^\nabla| \right\} \end{aligned}$$

が成り立ち、さらに

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) \epsilon_{i,j}^\Delta |R_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) \epsilon_{i,j}^\nabla |R_{i,j}^\nabla| \right\} \right| &\leq \sum_{i,j} \left\{ V |\epsilon_{i,j}^\Delta| |R_{i,j}^\Delta| + V |\epsilon_{i,j}^\nabla| |R_{i,j}^\nabla| \right\} \\ &< V \epsilon \sum_{i,j} \left\{ |R_{i,j}^\Delta| + |R_{i,j}^\nabla| \right\} = V |R| \epsilon \end{aligned}$$

がわかる。 $\epsilon > 0$  を任意に小さく取って、 $V |R| \epsilon \rightarrow 0$  とできるので

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |T_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |T_{i,j}^\nabla| \right\} \\ = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |J(a_{i-1}, c_{j-1})| |R_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |J(a_i, c_j)| |R_{i,j}^\nabla| \right\} \end{aligned}$$

が示される。つぎに (3) を示すためには、すでに (1.6) で述べたことより

$$\left( \iint_D f(x, y) dx dy \right) = \iint_E f^*(x, y) dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |T_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |T_{i,j}^\nabla| \right\}$$



を示さなければならない．ここで  $\iint_E f^*(x, y) dx dy$  を近似する上式の右辺に現れる和は閉長方形  $E$  の小長方形への分割に基づくリーマン和ではないことから，積分の定義に照らし疑問の生じない説明を求めると少し面倒である．証明を完成するために， $T_\Delta = \bigcup_{i,j} T_{i,j}^\Delta \cup \bigcup_{i,j} T_{i,j}^\nabla$  と  $D = \Phi(R) = \bigcup_{i,j} \Phi(R_{i,j}^\Delta) \cup \bigcup_{i,j} \Phi(R_{i,j}^\nabla)$  の間の位置の関係を調べる．つぎのことに注意する：変換  $\Phi: R \rightarrow D$  が  $C^1$  級で 1 対 1 対応であるから，三角形の族  $\{T_{i,j}^\Delta, T_{i,j}^\nabla\}_{i,j}$  のどの三角形も  $D = \Phi(R)$  の内部  $D \setminus \partial D = \Phi(R \setminus \partial R)$  と交わる．何故ならば， $1 < i < m, 1 < j < n$  のとき， $P_{i,j} \in R \setminus \partial R$  であるから  $Q_{i,j} = \Phi(P_{i,j}) = (x(a_i, c_j), y(a_i, c_j)) \in D \setminus \partial D$  ．

さて，平面内での (正の) 向き付けは，平面上の一次独立なベクトルによる平行四辺形の面積の行列式による公式を通して表現することができる．つぎの補題 2 は，このことを使って平面内の 4 点の配置関係を述べるものである．

**補題 2** 平面  $R^2$  内の相異なる 4 点  $A_{1,1}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{1,2}$  に対して，つぎの (1), (2), (3) が成り立つ：

(1) 三角形  $\triangle A_{1,1}A_{2,1}A_{1,2}$  と  $\triangle A_{2,2}A_{1,2}A_{2,1}$  を考える．

$$\text{ベクトル } \overrightarrow{A_{1,1}A_{2,1}} = (p_1, q_1), \quad \overrightarrow{A_{1,1}A_{1,2}} = (p_2, q_2)$$

$$\text{および } \overrightarrow{A_{2,2}A_{1,2}} = (r_1, s_1), \quad \overrightarrow{A_{2,2}A_{2,1}} = (r_2, s_2)$$

$$\text{に対して，二つの行列式 } \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} > 0$$

ならば，三角形  $\triangle A_{1,1}A_{2,1}A_{1,2}$  と  $\triangle A_{2,2}A_{1,2}A_{2,1}$  の共通部分は線分  $A_{2,1}A_{1,2}$  だけである．

(2) 三角形  $\triangle A_{2,1}A_{1,2}A_{1,1}$  と  $\triangle A_{1,2}A_{2,1}A_{2,2}$  を考える．ベクトル

$$\overrightarrow{A_{2,1}A_{1,2}} = (p_1, q_1), \quad \overrightarrow{A_{2,1}A_{1,1}} = (p_2, q_2), \quad \overrightarrow{A_{1,2}A_{2,1}} = (r_1, s_1) = (-p_1, -q_1), \quad \overrightarrow{A_{1,2}A_{2,2}} = (r_2, s_2)$$

$$\text{に対して，二つの行列式 } \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{ならば，三角形 } \triangle A_{2,1}A_{1,2}A_{1,1}$$

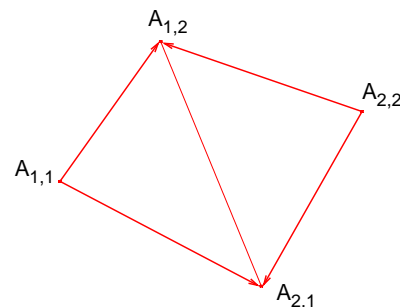
と  $\triangle A_{1,2}A_{2,1}A_{2,2}$  の共通部分は線分  $A_{2,1}A_{1,2}$  だけである．

(3) 三角形  $\triangle A_{1,2}A_{1,1}A_{2,1}$  と  $\triangle A_{2,1}A_{2,2}A_{1,2}$  を考える．ベクトル

$$\overrightarrow{A_{1,2}A_{1,1}} = (p_1, q_1), \quad \overrightarrow{A_{1,2}A_{2,1}} = (p_2, q_2), \quad \overrightarrow{A_{2,1}A_{2,2}} = (r_1, s_1), \quad \overrightarrow{A_{2,1}A_{1,2}} = (r_2, s_2) = (-p_2, -q_2)$$

$$\text{に対して，二つの行列式 } \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{ならば，三角形 } \triangle A_{1,2}A_{1,1}A_{2,1}$$

と  $\triangle A_{2,1}A_{2,2}A_{1,2}$  の共通部分は線分  $A_{2,1}A_{1,2}$  だけである．



ところで， $|\Delta| < \delta$  を満たしているから

$$\tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) > 0 \quad (\max\{|u_1 - u|, |u_2 - u|, |v_1 - v|, |v_2 - v|\} < |\Delta|)$$

が成り立つという (c) のおかげで，これらの三角形の面積が

$$\left\{ \begin{array}{l} |T_{i,j}^\Delta| = \tilde{J}(a_{i-1}, \xi_{i,j}, \xi'_{i,j}, c_{j-1}, \eta_{i,j}, \eta'_{i,j}) \times |R_{i,j}^\Delta| \\ \quad = \frac{1}{2} \{ (x_{i,j-1} - x_{i-1,j-1})(y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1}) - (x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1})(y_{i,j-1} - y_{i-1,j-1}) \} > 0 \\ |T_{i,j}^\nabla| = \tilde{J}(a_i, \mu_{i,j}, \mu'_{i,j}, c_j, \nu_{i,j}, \nu'_{i,j}) \times |R_{i,j}^\nabla| \\ \quad = \frac{1}{2} \{ (x_{i-1,j} - x_{i,j})(y_{i,j-1} - y_{i,j}) - (x_{i,j-1} - x_{i,j})(y_{i-1,j} - y_{i,j}) \} > 0 \end{array} \right.$$

と表されることから，どの三角形も他の三角形に包含されることはなく，相異なる二つの三角形が交わる場合の共通部分は補題 3 により辺または頂点だけであることが導かれる．したがって，

$$T_\Delta = \bigcup_{i,j} T_{i,j}^\Delta \cup \bigcup_{i,j} T_{i,j}^\nabla \text{ は有限個の三角形の和集合で， } T_\Delta \text{ の面積} = \sum_{i,j} \{ |T_{i,j}^\Delta| + |T_{i,j}^\nabla| \} \text{ と}$$

なっている．さらに，多角形  $T_\Delta$  の境界  $\partial T_\Delta$  は  $D$  の境界  $\partial D$  上の点を結ぶ折れ線

$$P_{1,1} P_{2,1} \cdots P_{m,1} P_{m,2} \cdots P_{m,n} P_{m-1,n} \cdots P_{1,n} P_{1,n-1} \cdots P_{1,1}$$

であり， $\bigcup_{1 < i < m, 1 < j < n} (T_{i,j}^\Delta \cup T_{i,j}^\nabla)$  は  $T_\Delta$  の内部  $T_\Delta \setminus \partial T_\Delta$  に含まれる．

$D$  の境界  $\partial D$  が多角形  $T_\Delta$  の境界  $\partial T_\Delta$  からどれだけ離れているかを調べてみよう．

$$\partial D = \Phi(\partial R) \subset \bigcup_{i=1, \dots, m} \Phi(R_{i,1}) \cup \bigcup_{j=1, \dots, n} \Phi(R_{m,j}) \cup \bigcup_{i=1, \dots, m} \Phi(R_{i,n}) \cup \bigcup_{j=1, \dots, n} \Phi(R_{1,j})$$

であるから，境界  $\partial D = \Phi(\partial R)$  の点  $(x, y)$  は長方形  $R$  の境界  $\partial R$  を構成しているある小長方形  $R_{i,j}$  内の  $(u, v) \in R_{i,j} \cap \partial R$  の像  $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (x, y)$  である．

$(u, v) \in R_{i,j}^\Delta \cap \partial R$  または  $(u, v) \in R_{i,j}^\nabla \cap \partial R$  に応じて  $(x', y') = \Phi_{i,j}^\Delta(u, v) \in \partial T_\Delta$  または

$(x', y') = \Phi_{i,j}^\nabla(u, v) \in \partial T_\Delta$  を考える．どちらの場合でも同様に考えられるので， $(u, v) \in R_{i,j}^\Delta \cap \partial R$

とする． $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (x, y)$  は，ある  $r_{i,j}, r'_{i,j} \in (a_{i-1}, a_i)$  と  $s_{i,j}, s'_{i,j} \in (c_{j-1}, c_j)$

を取ると

$$\begin{cases} x = x(u, v) = x(a_{i-1}, c_{j-1}) + x_u(r_{i,j}, s_{i,j})(u - a_{i-1}) + x_v(r_{i,j}, s_{i,j})(v - c_{j-1}) \\ y = y(u, v) = y(a_{i-1}, c_{j-1}) + y_u(r'_{i,j}, s'_{i,j})(u - a_{i-1}) + y_v(r'_{i,j}, s'_{i,j})(v - c_{j-1}) \end{cases}$$

と表すことができるので，

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) - \Phi_{i,j}^\Delta(u, v) &= \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_u(r_{i,j}, s_{i,j}) - x_u(\xi_{i,j}, c_{j-1}) & x_v(r_{i,j}, s_{i,j}) - x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}) \\ y_u(r'_{i,j}, s'_{i,j}) - y_u(\xi'_{i,j}, c_{j-1}) & y_v(r'_{i,j}, s'_{i,j}) - y_v(a_{i-1}, \eta'_{i,j}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - a_{i-1} \\ v - c_{j-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ。(b) が成り立っているので、 $(|\Delta| < \delta$  であるから)

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \frac{\epsilon}{4M} \sqrt{(u-a_{i-1})^2 + (v-c_{j-1})^2} \leq \frac{\epsilon}{4M} \delta_{i,j} \left( \leq \frac{\epsilon|\Delta|}{4M} \right).$$

これは、 $\epsilon < 1$  ならば  $\partial T_\Delta$  の任意の点から  $\partial D$  への最短距離は  $|\Delta|$  ( $< \delta < 1$ ) より小さいことを示している。したがって、 $D$  の境界と  $E$  の境界間の最短距離は 1 より大きいから  $T_\Delta \subset E$  となる。

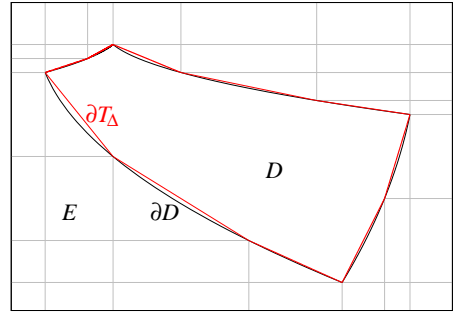
最後に、 $D \setminus T_\Delta$  の面積を評価しよう。ここで、小さい任意の正の数  $\alpha$  に対して、正の数  $\delta$  を  $\delta < \rho_\alpha$  を満たすように取っておく。(1.3)における長方形  $R_\alpha = [a+\alpha, b+\alpha] \times [c-\alpha, d-\alpha]$  ( $\subset R$ ) の像  $D_\alpha = \Phi(R_\alpha)$  の境界  $\partial D_\alpha = \Phi(\partial R_\alpha)$  から  $\partial D$  への最短距離  $\rho_\alpha$  が  $\partial T_\Delta$  の任意の点から  $\partial D$  への距離より大きいので  $\partial T_\Delta \cap \partial D_\alpha = \emptyset$ 、さらに、 $D_\alpha \subset T_\Delta$  が成り立つ。したがって、 $D \setminus T_\Delta \subset D \setminus D_\alpha$  となり  $D \setminus T_\Delta$  の面積は  $D \setminus D_\alpha = \Phi(R \setminus R_\alpha)$  の面積以下である。

したがって、 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} D \setminus D_\alpha$  の面積 = 0 より

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} D \setminus T_\Delta \text{ の面積} = 0.$$

$E \setminus T_\Delta$  を長方形  $E$  の辺に平行かつその長さが  $|\Delta|$  より短い線分で有限個の三角形と四角形  $E_s$  に分割する：

$$E \setminus T_\Delta = \bigcup_s E_s.$$



各  $E_s$  の面積を  $|E_s|$  と表す。各  $E_s$  から任意の点  $(x_s, y_s) \in E_s$  を取って有限和  $\sum_s f^*(x_s, y_s) |E_s|$  を考えると、

$$\sum_s f^*(x_s, y_s) |E_s| + \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |T_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |T_{i,j}^\nabla| \right\}$$

は  $f^*(x, y)$  の  $E$  でのリーマン和と考えられる。関数  $f^*(x, y)$  は  $E \setminus D$  で恒等的に 0、さらに、 $D$  上で有界かつ  $\partial D$  の面積は 0 (実は、 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \{D \setminus T_\Delta \text{ の面積} \} = 0$ ) であることから、

$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_s f^*(x_s, y_s) |E_s| = 0$  が容易に示される。したがって

$$\begin{aligned} \iint_E f^*(x, y) dx dy &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_s f^*(x_s, y_s) |E_s| + \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |T_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |T_{i,j}^\nabla| \right\} \\ &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\{ \tilde{f}(a_{i-1}, c_{j-1}) |T_{i,j}^\Delta| + \tilde{f}(a_i, c_j) |T_{i,j}^\nabla| \right\} \end{aligned}$$

が成り立ち、定理が成り立っている。

一般の場合を考える、すなわち、 $K$  を面積の確定する有界閉集合とする。この場合、 $D = \Phi(K)$  は有界閉集合である。さらに、 $C^1$  級変換  $\Phi$  は有界閉集合  $K$  を含む開集合で定義されているので、 $K$  を含む有界開集合  $\Omega$  を  $C^1$  級変換  $\Phi$  は有界閉集合  $\bar{\Omega}$  を含む開集合で定義されているように取ることができる。こうして、 $K \subset \Omega \subset \bar{\Omega}$ 。

偏導関数の連続性により，ある正の数  $M (> 1)$  に対して，つぎが成り立っている：

$$|x_u(u, v)| \leq M, \quad |x_v(u, v)| \leq M, \quad |y_u(u, v)| \leq M, \quad |y_v(u, v)| \leq M \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}).$$

$\bar{\Omega}$  に含まれる任意の閉長方形  $A = [p, q] \times [r, s]$  の面積  $(q-p)(s-r)$  を  $|A|$  で表す．(1.4) での議論から，閉長方形  $A$  が条件  $\frac{1}{k} < \frac{s-r}{q-p} < k$  を満たしているならば， $\Phi(A)$  は面積

$4M^2K|A|$  の正方形に含まれていることがわかる，ただし  $K = k + \frac{1}{k} (\geq 2)$  ．

さて，有界集合  $K$  が‘面積の確定する集合である’から， $\partial K$  は面積 0 の集合である．したがって有界閉集合  $K$  を含む閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  の小長方形  $R_{i,j}$  への分割

$$\Delta : \begin{cases} a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b \\ c = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = d \end{cases}, \quad R_{i,j} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]$$

から決まる  $b(\Delta) = \sum_{\partial K \cap R_{i,j} \neq \emptyset} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) (\geq 0)$  について  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} b(\Delta) = 0$  が

成り立つ． $R$  の境界  $\partial R$  は変換  $\Phi$  によって  $D$  の境界  $\partial D$  に写像されて

$$\partial D = \Phi(\partial R) \subset \bigcup_{\partial K \cap R_{i,j} \neq \emptyset} \Phi(R_{i,j})$$

となっているので，各小長方形の辺の長さの比を  $\frac{1}{2} < \frac{c_j - c_{j-1}}{a_i - a_{i-1}} < 2 (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$

を満たすように取ると， $\partial D$  は総面積  $10M^2 b(\Delta)$  の有限個の正方形に含まれるから  $\partial D$  は面積 0 の集合で，有界閉集合  $D$  は‘面積の確定する集合である’ことがわかる．したがって

$D$  上の連続関数  $f(x, y)$  の ( $D$  を含む) 閉長方形  $E$  への拡張

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ((x, y) \in D) \\ 0 & ((x, y) \notin D) \end{cases}.$$

は  $D$  を含む閉長方形  $E$  で有界かつ積分可能で， $\iint_E f^*(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy$  .

今， $D_{i,j} = \Phi(R_{i,j}) (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$  と置くと， $D = \bigcup_{i,j} D_{i,j}$  で

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \left\{ \sum_{\partial D \cap D_{i,j} \neq \emptyset} \iint_{D_{i,j}} f(x, y) dx dy + \sum_{D_{i,j} \subset D} \iint_{D_{i,j}} f(x, y) dx dy \right\} \\ &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{R_{i,j} \subset K} \iint_{R_{i,j}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \iint_K f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \end{aligned}$$

が成り立ち，定理は証明される． //

## 5.5 広義重積分

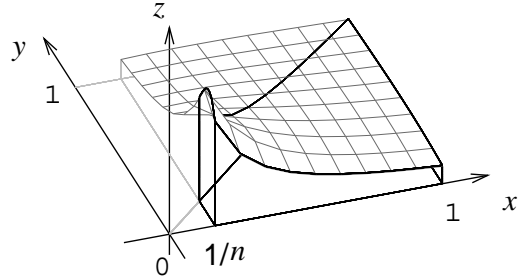
無限領域  $D$  上での広義重積分や有界領域  $D$  上での非有界関数の広義重積分については、集合  $D$  を取りつくす (すなわち  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$  が成り立つ)  $D$  内の有界閉領域  $D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) での重積分の値の (単調に増大する  $D_n$  に伴う) 極限值に基づいて計算する。(参考: 問題 5.5 [2])

### C. 巧妙な計算

[1] 次の広義重積分を計算しなさい。

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy,$$

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$



略解. 閉領域  $D_n = \{(x, y) \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を考える. このとき,

各  $n = 1, 2, \dots$  について  $D_n = D_{\frac{1}{n}}$  と置くと,  $D_n \subset D_{n+1}$  また  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$  が成り立つ.

$$\iint_{D_n} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_0^x \left( \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dy.$$

$$\int_0^x \frac{x}{x^2+y^2} dy = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^x \frac{y}{x^2+y^2} dy = \left[ \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \right]_0^x = \frac{1}{2} \log 2. \quad \text{従って}$$

$$\iint_{D_n} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 \right\} dx = \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 \right) \left( 1 - \frac{1}{n} \right). \quad \text{このとき}$$

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 \right) \frac{n-1}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2. //$$

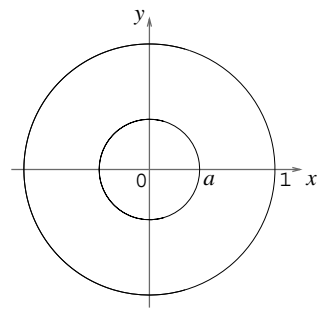
[2] つぎの二重積分  $I_a$  ( $0 < a$ ) を求め, これを利用して広義二重積分  $I$  を求めよ.

$$I_a = \iint_{D_a} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} dx dy, \quad D_a : a^2 \leq x^2+y^2 \leq 1$$

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} dx dy, \quad D : 0 < x^2+y^2 \leq 1$$

$$\text{略解. } I_a = \iint_{D_a} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} dx dy$$

$$= \int_a^1 \int_0^{2\pi} r^{-\frac{2}{3}} r dr d\theta = 2\pi \left[ \frac{3}{4} r^{\frac{4}{3}} \right]_a^1 = \frac{3\pi}{2} (1 - a^{\frac{4}{3}}).$$



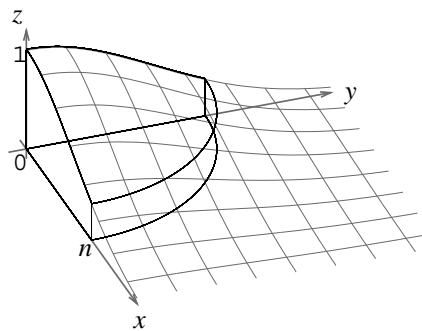
このとき, 
$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} dx dy = \lim_{a \rightarrow 0} I_a = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{3\pi}{2} (1 - a^{\frac{4}{3}}) = \frac{3\pi}{2}. \quad //$$

#### D. 技法 Technics

確率積分  $\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$  の計算を考えてみよう.

1 閉領域  $D_n = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq n^2\}$

上で重積分  $\iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy$  を計算する:



任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $D_n^\epsilon = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$  と置く. そのとき,

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{D_n^\epsilon} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_\epsilon^n e^{-r^2} r dr d\theta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_\epsilon^n e^{-r^2} r dr \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_\epsilon^n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi (e^{-\epsilon^2} - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}). \end{aligned}$$

このことから,

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq n^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-n^2}) = \pi.$$

2 閉領域  $E_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$  で,

関係  $\iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2$  が成り

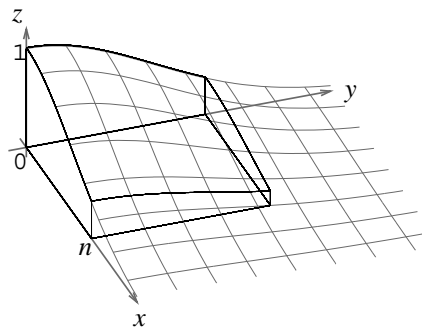
立っている. というのは,

$$\begin{aligned} \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^n \int_0^n e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^n \int_0^n e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_0^n \left( e^{-y^2} \int_0^n e^{-x^2} dx \right) dy = \int_0^n e^{-y^2} dy \int_0^n e^{-x^2} dx = \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

3 上のことから, 確率積分  $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  が示される. 何故ならば,

$$\begin{aligned} \pi &= \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{|x|, |y| \leq n} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

が成り立つからである.

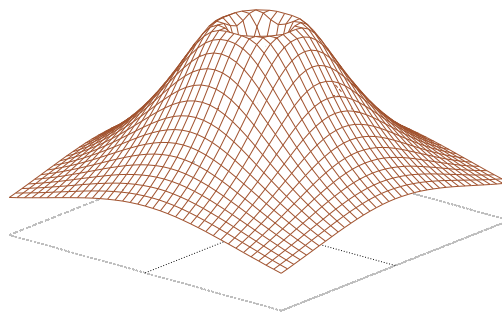


4  $\sigma > 0$  と  $\mu \in \mathbf{R}$  に対して,

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(x^2+y^2)}^\sigma} e^{-\frac{(\log \sqrt{x^2+y^2}-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx dy$$

を計算せよ.

右図は  $z = \frac{1}{\sqrt{2\pi(x^2+y^2)}} e^{-\frac{(\log \sqrt{x^2+y^2}-2)^2}{2}}$   
 $(-20 < x < 20, -20 < y < 20)$  .



**Gamma 関数と Beta 関数**

さて, Gamma 関数と Beta 関数との間には, つぎの関係が成り立つ:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y).$$

何故ならば, 置換積分  $t = u^2$ ,  $dt = 2u du$  を考えると  $\Gamma$  関数  $\Gamma(x)$  は

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \quad \text{と表され,}$$

置換積分  $t = \cos^2 \theta$ ,  $dt = -2 \cos \theta \sin \theta$  を考えると Beta 関数  $B(x, y)$  は

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \quad \text{と表されるから,}$$

1 と 2 の閉領域  $D_n$  と  $E_n$  を使って表すと

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2y-1} dv = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} e^{-u^2-v^2} u^{2x-1} v^{2y-1} dudv \\ &= 4 \iint_{u \geq 0, v \geq 0} e^{-u^2-v^2} u^{2x-1} v^{2y-1} dudv \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{-r^2} r^{2x+2y-1} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2x+2y-1} dr = B(x, y)\Gamma(x+y). \quad // \end{aligned}$$

**問題 5.5**

1 Gamma 関数と Beta 関数の関係式から, つぎの計算を導け.

(1)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$     (2)  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$     (3)  $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$  ( $a > 0$ ) .

2 非有界集合  $D$  上での広義重積分や有界集合  $D$  上での非有界関数の広義重積分については, 集合  $D$  を取りつくす (すなわち  $\bigcup_{n=1}^\infty D_n = D$  が成り立つ)  $D$  内の有界閉領域  $D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 上での重積分の値の極限值に基づいて定義する. ただし, 有界閉領域  $D_n$  の列  $\{D_n\}_{n=1}^\infty$  がつぎの条件を満たしているものとする: 集合  $D$  の内部としての領域  $D^i$  と有界閉領域  $D_n$  の内部

としての有界開領域  $D_n^i$  の列  $\{D_n^i\}_{n=1}^\infty$  に対して, (1)  $D_n \subset D_{n+1}$ , (2)  $\bigcup_{n=1}^\infty D_n^i = D^i$ .  
 $D$  上の非負値連続関数  $f(x, y)$  に対して, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$  の一意性を示せ.

## 5.6 三重積分と体積

### A. 三重積分

さて, 5.1 重積分 で述べられた重積分の考えは 3 次元空間  $\mathbf{R}^3$  の領域  $V$  で定義された連続関数  $f(x, y, z)$  に対しても同様に定義することができ, 三重積分  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  の値を計算するために累次積分を行うことができることも同様である.

すでに見てきたことからわかるように, 平面領域  $D$  が与えられたとき,  $D$  での二重積分  $\iint_D dx dy$  は領域  $D$  の面積を与えている. 空間  $\mathbf{R}^3$  の領域  $V$  が与えられたとき,  $V$  での三重積分

$$\iiint_V dx dy dz$$

は領域  $V$  の体積を与える.

**例 1** 半径 1 の球  $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  の体積は三重積分

$$\begin{aligned} \iiint_B dx dy dz &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right\} dy \right\} dx \\ &= \int_{-1}^1 \pi(1-x^2) dx = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

**体積**  $\mathbf{R}^3$  の有界領域  $D$  が与えられたとき, 平面  $z = c$  ( $c \in \mathbf{R}$ ) による ( $D$  の) 断面を

$$D_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x, y, c) \in D\}$$

とする. (有限個の滑らかな曲面で囲まれた) 有界領域  $D$  が  $D = \bigcup_{a \leq c \leq b} D_c$  ( $-\infty < a < b < \infty$ )

と表されているとき, 断面  $D_z$  の面積  $A(z) = \iint_{D_z} dx dy$  ( $a \leq z \leq b$ ) に対して

$$D \text{ の体積 } V = \iiint_D dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{D_z} dx dy \right) dz = \int_a^b A(z) dz.$$

### B. 体積の計算

**例 2** 立体  $K = \{(x, y, z) \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\}$  の体積を求めよ ( $a > 0$ ).



**解**  $z \in [0, a]$  を固定したときの  $xy$  平面のアステロイド  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{2}{3}}$  の面積は  
微分積分学 1 3.11 面積と体積と長さ B **例** での計算より,

$$\iint_{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{2}{3}}} 1 \, dxdy = \frac{3}{8}\pi(a^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{2}{3}})^3$$

である. 立体  $K$  の対称性から, その体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K 1 \, dxdydz = 2 \int_0^a \left\{ \iint_{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{2}{3}}} 1 \, dxdy \right\} dz = 2 \int_0^a \frac{3}{8}\pi(a^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{2}{3}})^3 dz \\ &\quad (z = a \sin^3 t \text{ として置換積分}) \\ &= \frac{3\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \sin^2 t)^3 (3a \sin^2 t \cos t) dt = \frac{9\pi}{4} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t \sin^2 t dt \\ &= \frac{9\pi}{4} a^3 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 t dt \right) = \frac{9\pi}{4} a^3 \left( \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \right) = \frac{4}{35} \pi a^3. \quad // \end{aligned}$$

### 回転体の体積

$xy$  平面上の曲線  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) が  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積  $V$  は

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

**例 3**  $xy$  平面内の円  $x^2 + (y - a)^2 = R^2$  ( $a > R > 0$ ) を  $x$  軸の周りに回転してできる

円環体(トーラス)の体積  $V$  を求めよう. 明らかに, 半円  $y = a + \sqrt{R^2 - x^2}$  ( $-R \leq x \leq R$ ) の

$x$  軸の周りの回転体の体積から半円  $y = a - \sqrt{R^2 - x^2}$  ( $-R \leq x \leq R$ ) の  $x$  軸の周りの回転

体の体積を取り去ったものが求める体積である. したがって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (a + \sqrt{R^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-R}^R (a - \sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 4\pi a \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= 4\pi a \left[ \frac{1}{2} \left( x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \sin^{-1} \frac{x}{R} \right) \right]_{-R}^R = 4\pi a \frac{\pi R^2}{2} = 2\pi^2 R^2 a. \end{aligned}$$

### C. 三重積分の変数変換

一般に,  $n$  変数関数に対する  $n$  重積分の場合にも, 変数変換公式が成り立ちます. 三変数関数の場合は次のようになります:

#### 1 三重積分の変数変換

$C^1$  級変換  $\Phi : x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3), x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3), x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$  が  $\mathbf{R}^3$  の集合  $K$  を  $\mathbf{R}^3$  の集合

$$D = \left\{ (x_1(u_1, u_2, u_3), x_2(u_1, u_2, u_3), x_3(u_1, u_2, u_3)) \in \mathbf{R}^3 \mid (u_1, u_2, u_3) \in K \right\}$$

に1対1に写しているとする。このとき,

$$\iiint_D f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_K \tilde{f}(u_1, u_2, u_3) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 du_2 du_3$$

が成り立つ, ただし

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u_1, u_2, u_3) &= f(x_1(u_1, u_2, u_3), x_2(u_1, u_2, u_3), x_3(u_1, u_2, u_3)) \\ \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} \quad (\Phi \text{ のヤコビアン (Jacobian, 関数行列式)}) \end{aligned}$$

**例 3** 空間の極座標 (球座標) 系について考える:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (r > 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in \mathbf{R}).$$

$$(1) \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \quad \text{を確かめよう.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta \left\{ -\sin \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} - \cos \varphi \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} \right\} \\ &= r^2 \sin \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

(2)  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq x, y, z\}$  上での 三重積分

$$\begin{aligned} \iiint_D x \, dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \sin \theta \cos \varphi) r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^2 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \\ &= \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^2 \left[ \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sin \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \pi. \end{aligned}$$

### 問題 5.6

**1** 半径  $a (> 0)$  の円柱  $x^2 + y^2 = a^2$  と  $y^2 + z^2 = a^2$  で囲まれた領域の体積を求めよ.

- 2] 原点を中心とする半径  $a$  の球と円柱  $x^2 + y^2 = ax$  ( $a > 0$ ) で囲まれた領域の体積を求めよ .
- 3] 回転放物面  $z = x^2 + y^2$  と角柱  $|x| = |y| = a$  ( $a > 0$ ) と平面  $z = 0$  で囲まれた領域の体積を求めよ .
- 4] 回転放物面  $z = x^2 + y^2$  と円柱  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) と平面  $z = 0$  で囲まれた領域の体積を求めよ .
- 5] 円錐面  $z^2 = x^2 + y^2$  と円柱  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) と平面  $z = 0$  で囲まれた領域の体積を求めよ .
- 6] Cardioid  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ .

- 7] つぎの重積分の値を求めよ ( $p > 0$ ) .
- (1)  $\iiint_{\mathbf{R}^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{p^2}} dx dy dz$
- (2)  $\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 + p^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy$       (3)  $\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{p^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + p^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy dz$
- (4)  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2 + y^2 + z^2)^p dx dy dz$       (5)  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dx dy dz$

- 8]  $R > 0$  のとき  $a \in \mathbf{R}$  対して , つぎのことを示せ :

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{x-a}{((a-x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz = \begin{cases} -\frac{4\pi R^3}{3a^2} & (R \leq a) \\ -\frac{4\pi a}{3} & (0 \leq a < R). \end{cases}$$

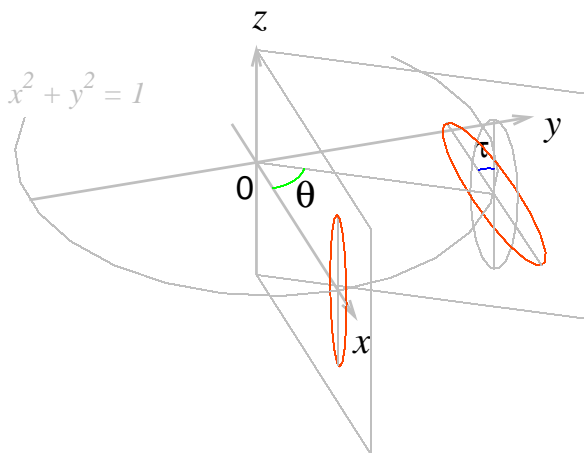
- 9]  $\mathbf{R}^3$  の円柱座標系  $(r, \theta, z)$  で , 平面  $\theta = u$  内の楕円  $\frac{(r-1)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  をこの平面内で点  $(r, \theta, z) = (1, u, 0)$  を中心として  $\tau = \frac{u}{2}$  回転した楕円からなる曲面  $S$  を考える ( $0 \leq u < 2\pi$ ) . (この曲面  $S$  の形は '微分積分学 2' および '微分積分学 1' の表紙を参照せよ .)

曲面  $S$  の ( $\mathbf{R}^3$  の  $xyz$  座標系に関しての) パラメータ表示は

$$\begin{cases} x = \left(1 + a \cos \rho \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \rho \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta \\ y = \left(1 + a \cos \rho \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \rho \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \\ z = a \cos \rho \sin \frac{\theta}{2} + b \sin \rho \cos \frac{\theta}{2} \\ (0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \rho < 2\pi). \end{cases}$$

である .

$0 < a < b < a + b < 1$  のとき , 曲面  $S$  で囲まれた領域  $\Omega$  の体積を求めよ .



## 5.7 曲面の面積

### A. 平面上の図形の面積

$\mathbf{R}^3$  の平面上の図形とその  $xy$  平面への射影について、面積の関係を考える。

$\mathbf{R}^3$  の平面  $\pi : ax + by + cz = d$  ( $c \neq 0$ ) 上の面積のある図形 (例えば、長方形)  $T$  を考える。

図形  $T$  の面積を  $A(T)$  ,  $xy$  平面への正射影  $K$  の面積を  $A(K)$  とすると、それらの間には

$$A(T) \cos \gamma = A(K)$$

という関係がある：ここで  $\gamma$  は平面  $\pi$  が  $xy$  平面となす角である。平面  $\pi$  の法線ベクトル

$$\mathbf{N} = (a, b, c)$$

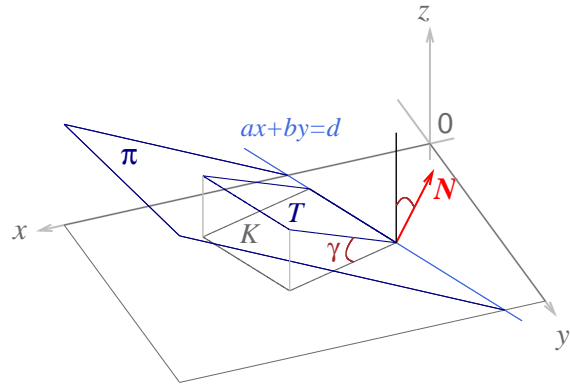
平面  $\pi$  が  $xy$  平面となす角  $\gamma$  は、平面  $\pi$  の

法線ベクトル  $\mathbf{N}$  が  $z$  軸となす角に等しい。

従って、長さ 1 のベクトル  $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)$  を

考えると ( $c \neq 0$  のとき) 角  $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$  で

$$\begin{cases} \cos \gamma = \frac{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\nu}}{\|\mathbf{N}\| \cdot \|\boldsymbol{\nu}\|} = \frac{c}{\|\mathbf{N}\|} \\ (\|\mathbf{N}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) \\ A(T) = \frac{A(K)}{\cos \gamma} = \frac{\|\mathbf{N}\|}{|c|} A(K). \end{cases}$$



$c \neq 0$  のとき、平面  $\pi : z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$  上の図形  $T$  の面積  $A(T)$  は、その  $xy$  平面への正射影  $K$  での二重積分

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{|c|} \iint_K 1 \, dx dy = \iint_K \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dx dy$$

に等しいことがわかる ( $\because A(K) = \iint_K 1 \, dx dy$ ) .

空間  $\mathbf{R}^3$  の一次独立なベクトル  $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$  ,  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$  と点  $\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{R}^3$

によって、平面  $\pi$  上の点  $X = (x, y, z)$  がつぎのようにパラメータ表示されているとする：

$$x = a_1 u + b_1 v + c_1, \quad y = a_2 u + b_2 v + c_2, \quad z = a_3 u + b_3 v + c_3 \quad (u, v \in \mathbf{R}).$$

平面  $\pi$  の法線ベクトルは  $\mathbf{N} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$  である：

$$\text{この場合、平面 } \pi \text{ の方程式は } \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (x - c_1) - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (y - c_2) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (z - c_3) = 0.$$

平面  $\pi$  の法線ベクトル  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  ことから、成分  $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$  の場合を考える (他の成分が 0 でない場合も同様に考えられる) . 平面  $\pi$  上の図形  $T$  が

$$T = \{ \mathbf{X}(u, v) = u\mathbf{A} + v\mathbf{B} + \mathbf{C} \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d \}$$

である場合，図形  $T$  の  $xy$  平面への正射影

$$K = \{(ua_1 + vb_1 + c_1, ua_2 + vb_2 + c_2) \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$$

は一次変換  $x = a_1u + b_1v, y = a_2u + b_2v$  による長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  の ( $\mathbf{R}^2$  における) 像

$$K_0 = \{(ua_1 + vb_1, ua_2 + vb_2) \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$$

の平行移動であるから，面積  $A(K)$  は平行四辺形  $K_0$  の面積に等しく  $A(K) = |a_1b_2 - a_2b_1||R|$

である；ここで  $|R| = (b-a)(d-c)$  は長方形  $R$  の面積（参考. 5.3 重積分の変数変換 A. 1）. 平面  $\pi$  の法線ベクトル  $N$  は

$$N = X_u \times X_v = A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

であるから

$$A(T) = \frac{\|A \times B\|}{|a_1b_2 - a_2b_1|} A(K) = \|A \times B\| \cdot |R| = \iint_R \|X_u \times X_v\| \, dudv.$$

### 曲面の面積の公式

空間  $\mathbf{R}^3$  にある曲面  $S$  の (1対1に対応する) パラメータ表示  $\Phi$  を考える：

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbf{R}^3 \quad ((u, v) \in D), \quad \text{ただし}$$

$x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  ( $u, v \in D$ ) は平面領域  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  で定義された  $C^1$  級関数で

$$\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v) = \begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

$S$  上の図形  $T$  が  $D$  の面積を持つ領域  $R$  の像  $T = \Phi(R)$  である時， $T$  の面積は二重積分

$$A(T) = \iint_R \|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| \, dudv \quad \dots \quad (*)$$

で求められることが発見された，ここで

$$\|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u(u, v) & z_v(u, v) \\ x_u(u, v) & x_v(u, v) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix}^2}.$$

特に， $z = f(x, y)$  が平面  $\mathbf{R}^2$  の開集合  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  で定義された  $C^1$  級関数であるとき， $\Phi(x, y, f(x, y))$  ( $(x, y) \in D$ ) は曲面  $S : z = f(x, y)$  のパラメータ表示となるから

$$\|\Phi_x(x, y) \times \Phi_y(x, y)\| = \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1}$$

である．曲面  $S$  上の図形  $T$  の面積  $A(T)$  はその  $xy$  平面への正射影  $K$  での二重積分

$$A(T) = \iint_K \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} \, dxdy$$

で与えられる．

## B. 基本例

1 上半球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  の表面積  $S$  , およびこの上半球面内の領域で

$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$  上にある部分の表面積  $S_D$  を求めよ .

解 .  $z_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$  ,  $z_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$  であるから ,

$\sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$  となる . 故に , 表面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\ &= 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^a d\theta = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

同様に ,  $S_D = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta$

$$= 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{\frac{a}{2}} d\theta = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) d\theta = (2 - \sqrt{3})\pi a^2. \quad //$$

## C. 巧妙な計算

2 半球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  の領域  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq ax \right\}$  上の表面積を求めよ .

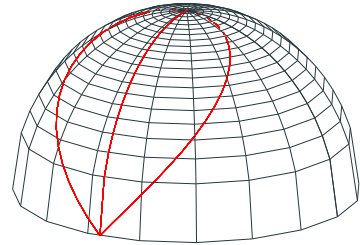
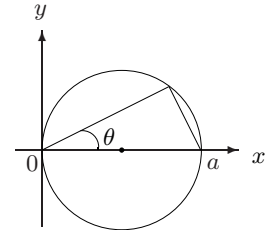
解 .  $z_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$  ,  $z_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$  であるから ,

$\sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$  となる .

領域  $D = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}, r \leq a \cos \theta \right\}$

と表されるので ,

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\ &= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a \cos \theta} d\theta = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin \theta|) d\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = (\pi - 2)a^2. \quad //$$



3 回転放物面  $z = x^2 + y^2$  の領域  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$  上の表面積を求めよ .

解 .  $\sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$  であるから , 面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \left[ \frac{2}{3 \cdot 8} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \quad //$$

#### D. 曲面の面積の公式の説明

曲面  $S$  のパラメータ表示は  $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbf{R}^3$  ( $(u, v) \in D$ ) である.

図形  $T$  が閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d] (\subset D)$  の像, すなわち  $T = \Phi(R)$  である場合を考える.

長方形  $R$  の小長方形  $R_{i,j} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]$  への分割

$$\Delta : \begin{cases} a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b \\ c = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = d \end{cases} \text{の分点 } P_{i,j} = (a_i, c_j)$$

に基づいて  $R$  を三角形へ分割する:

$$\begin{cases} R_{i,j}^\Delta = \text{三点 } P_{i-1,j}, P_{i-1,j-1}, P_{i,j-1} \text{を頂点とする三角形} \\ R_{i,j}^\nabla = \text{三点 } P_{i-1,j}, P_{i,j}, P_{i,j-1} \text{を頂点とする三角形} \end{cases}$$

を考えると  $R_{i,j} = R_{i,j}^\Delta \cup R_{i,j}^\nabla$  かつ  $R = \bigcup_{i,j} R_{i,j}$ .

曲面  $T$  上の点  $Q_{i,j} = \Phi(a_i, c_j)$  を取って

$$\begin{cases} T_{i,j}^\Delta = \text{三点 } Q_{i-1,j}, Q_{i-1,j-1}, Q_{i,j-1} \text{を頂点とする三角形} \\ T_{i,j}^\nabla = \text{三点 } Q_{i-1,j}, Q_{i,j}, Q_{i,j-1} \text{を頂点とする三角形} \end{cases}$$

を考える. 小長方形  $R_{i,j}$  の面積  $(a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1})$  を  $|R_{i,j}|$  で表すことにする. そのとき,

長方形  $R$  の面積は  $|R| = \sum_{i,j} |R_{i,j}|$  で, 三角形  $R_{i,j}^\Delta$  の面積  $|R_{i,j}^\Delta| = R_{i,j}^\nabla$  の面積  $|R_{i,j}^\nabla| = \frac{|R_{i,j}|}{2}$ .

(空間  $\mathbf{R}^3$  内の) 三角形  $T_{i,j}^\Delta$  の面積を  $A(T_{i,j}^\Delta)$ ,  $T_{i,j}^\nabla$  の面積を  $A(T_{i,j}^\nabla)$  と表す. 曲面  $S$  のパラメータ表示  $\Phi$  が 1 対対応 1 であるから, 三角形  $T_{i,j}^\Delta$  と  $T_{i,j}^\nabla$  がつぶれていることはなく, 面積  $A(T_{i,j}^\Delta) > 0$  および  $A(T_{i,j}^\nabla) > 0$  である. 三角形  $T_{i,j}^\Delta$  と  $T_{i,j}^\nabla$  のすべての和集合である二次元複体

$$T_\Delta = \bigcup_{i,j} T_{i,j}^\Delta \cup \bigcup_{i,j} T_{i,j}^\nabla$$

を考えるとその面積  $A(T_\Delta)$  は, それぞれの三角形の面積の和であるから,

$$A(T_\Delta) = \sum_{i,j} \left\{ A(T_{i,j}^\Delta) + A(T_{i,j}^\nabla) \right\}$$

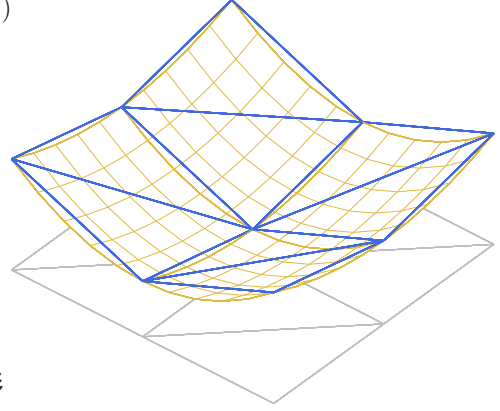
となる. ここで,

三角形  $T_{i,j}^\Delta$  はつぎの線形写像  $(x, y, z) = \Phi_{i,j}^\Delta(u, v)$  による  $R_{i,j}^\Delta$  の像であることに注意する:

$$\Phi_{i,j}^\Delta(u, v) = \Phi(a_{i-1}, c_{j-1}) + \frac{\Phi(a_i, c_{j-1}) - \Phi(a_{i-1}, c_{j-1})}{a_i - a_{i-1}}(u - a_{i-1}) + \frac{\Phi(a_{i-1}, c_j) - \Phi(a_{i-1}, c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}(v - c_{j-1}).$$

すなわち,

$$\begin{cases} x = x(a_{i-1}, c_{j-1}) + \frac{x(a_i, c_{j-1}) - x(a_{i-1}, c_{j-1})}{a_i - a_{i-1}}(u - a_{i-1}) + \frac{x(a_{i-1}, c_j) - x(a_{i-1}, c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}(v - c_{j-1}) \\ y = y(a_{i-1}, c_{j-1}) + \frac{y(a_i, c_{j-1}) - y(a_{i-1}, c_{j-1})}{a_i - a_{i-1}}(u - a_{i-1}) + \frac{y(a_{i-1}, c_j) - y(a_{i-1}, c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}(v - c_{j-1}) \\ z = z(a_{i-1}, c_{j-1}) + \frac{z(a_i, c_{j-1}) - z(a_{i-1}, c_{j-1})}{a_i - a_{i-1}}(u - a_{i-1}) + \frac{z(a_{i-1}, c_j) - z(a_{i-1}, c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}(v - c_{j-1}). \end{cases}$$



また，三角形  $T_{i,j}^\nabla$  はつぎの線形写像  $(x, y, z) = \Phi_{i,j}^\nabla(u, v)$  による  $R_{i,j}^\nabla$  の像である：

$$\Phi_{i,j}^\nabla(u, v) = \Phi(a_i, c_j) + \frac{\Phi(a_{i-1}, c_j) - \Phi(a_i, c_j)}{a_{i-1} - a_i}(u - a_i) + \frac{\Phi(a_i, c_{j-1}) - \Phi(a_i, c_j)}{c_{j-1} - c_j}(v - c_j).$$

三角形  $T_{i,j}^\Delta$  の面積  $A(T_{i,j}^\Delta)$  を調べてみよう．線形写像  $(x, y, z) = \Phi_{i,j}^\Delta(u, v)$  は，平均値の定理を使うと，ある  $\xi_{i,j}^1, \xi_{i,j}^2, \xi_{i,j}^3 \in (a_{i-1}, a_i)$  と  $\eta_{i,j}^1, \eta_{i,j}^2, \eta_{i,j}^3 \in (c_{j-1}, c_j)$  によって

$$\begin{cases} x = x(a_{i-1}, c_{j-1}) + x_u(\xi_{i,j}^1, c_{j-1})(u - a_{i-1}) + x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^1)(v - c_{j-1}) \\ y = y(a_{i-1}, c_{j-1}) + y_u(\xi_{i,j}^2, c_{j-1})(u - a_{i-1}) + y_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^2)(v - c_{j-1}) \\ z = z(a_{i-1}, c_{j-1}) + z_u(\xi_{i,j}^3, c_{j-1})(u - a_{i-1}) + z_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^3)(v - c_{j-1}) \end{cases}$$

と表されるから， $A(T_{i,j}^\Delta) = \|N_{i,j}^\Delta\| \cdot |R_{i,j}^\Delta|$  と表わされる．ここで

$$N_{i,j}^\Delta = \begin{pmatrix} y_u(\xi_{i,j}^2, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^2) & z_u(\xi_{i,j}^3, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^3) & x_u(\xi_{i,j}^1, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^1) \\ z_u(\xi_{i,j}^3, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^3) & x_u(\xi_{i,j}^1, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^1) & y_u(\xi_{i,j}^2, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^2) \end{pmatrix},$$

$$\|N_{i,j}^\Delta\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_u(\xi_{i,j}^2, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^2) \\ z_u(\xi_{i,j}^3, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^3) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u(\xi_{i,j}^3, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^3) \\ x_u(\xi_{i,j}^1, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^1) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u(\xi_{i,j}^1, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^1) \\ y_u(\xi_{i,j}^2, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^2) \end{vmatrix}^2}.$$

つぎに， $\|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| =$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} y_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \\ z_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \\ x_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \\ y_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \end{vmatrix}^2}.$$

に着目して， $\|N_{i,j}^\Delta\| - \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\|$  について考える．関数  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$

は  $C^1$  級であるから，それらの偏導関数は閉長方形  $R$  で一様連続である（参考．5.1 D. 積分可能性と一様連続性）．このことから，つぎの事実が導かれる．

任意の小さい正の数  $\epsilon$  に対してある正の数  $\delta$  が存在して，閉長方形  $R$  の分割  $\Delta$  を分割の細かさ  $|\Delta| < \delta$  となるよう細かくするとつぎが成り立つ：

$$-\epsilon < \|N_{i,j}^\Delta\| - \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| < \epsilon.$$

**問** 上のことを証明せよ（参考．問題 略解 5.7 **問**）．

このとき，三角形  $T_{i,j}^\Delta$  の面積  $A(T_{i,j}^\Delta) = \|N_{i,j}^\Delta\| \cdot |R_{i,j}^\Delta| > 0$  に対してつぎのことが成り立つ：

$$-\epsilon \cdot |R_{i,j}^\Delta| < A(T_{i,j}^\Delta) - \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| \cdot |R_{i,j}^\Delta| < \epsilon \cdot |R_{i,j}^\Delta|.$$

三角形  $T_{i,j}^\nabla$  の面積  $A(T_{i,j}^\nabla)$  についても同様のことが成り立つ．線形写像  $(x, y, z) = \Phi_{i,j}^\nabla(u, v)$  は，

ある  $\alpha_{i,j}^1, \alpha_{i,j}^2, \alpha_{i,j}^3 \in (a_{i-1}, a_i)$  と  $\beta_{i,j}^1, \beta_{i,j}^2, \beta_{i,j}^3 \in (c_{j-1}, c_j)$  によって

$$\begin{cases} x = x(a_i, c_j) + x_u(\alpha_{i,j}^1, c_{j-1})(u - a_i) + x_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^1)(v - c_j) \\ y = y(a_i, c_j) + y_u(\alpha_{i,j}^2, c_{j-1})(u - a_i) + y_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^2)(v - c_j) \\ z = z(a_i, c_j) + z_u(\alpha_{i,j}^3, c_{j-1})(u - a_i) + z_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^3)(v - c_j) \end{cases}$$

と表されるから，三角形  $T_{i,j}^\nabla = \Phi_{i,j}^\nabla(R_{i,j}^\nabla)$  の面積は  $A(T_{i,j}^\nabla) = \|N_{i,j}^\nabla\| \cdot |R_{i,j}^\nabla|$  と表わされて



次が成り立つ：

$$\begin{aligned} N_{i,j}^\nabla &= \left( \begin{array}{cc} \left| y_u(\alpha_{i,j}^2, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^2) \right| & \left| z_u(\alpha_{i,j}^3, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^3) \right| & \left| x_u(\alpha_{i,j}^1, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^1) \right| \\ \left| z_u(\alpha_{i,j}^3, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^3) \right| & \left| x_u(\alpha_{i,j}^1, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^1) \right| & \left| y_u(\alpha_{i,j}^2, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^2) \right| \end{array} \right), \\ \|N_{i,j}^\nabla\| &= \sqrt{\left| y_u(\alpha_{i,j}^2, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^2) \right|^2 + \left| z_u(\alpha_{i,j}^3, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^3) \right|^2 + \left| x_u(\alpha_{i,j}^1, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, \beta_{i,j}^1) \right|^2} \\ &\quad - \epsilon \cdot |R_{i,j}^\nabla| < A(T_{i,j}^\nabla) - \|\Phi_u(a_i, c_j) \times \Phi_v(a_i, c_j)\| \cdot |R_{i,j}^\nabla| < \epsilon \cdot |R_{i,j}^\nabla|. \end{aligned}$$

さて，連続関数関数  $\|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| ((u, v) \in R)$  は長方形  $R_{i,j}$  内での二点での値の間  
間値を  $R_{i,j}$  内のある点で必ず取る (参考 . 4.2 二変数関数の極限值と連続性 D. 3) ので，

ある  $(\mu_{i,j}, \nu_{i,j}) \in R_{i,j}$  で

$$\frac{\|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| + \|\Phi_u(a_i, c_j) \times \Phi_v(a_i, c_j)\|}{2} = \|\Phi_u(\mu_{i,j}, \nu_{i,j}) \times \Phi_v(\mu_{i,j}, \nu_{i,j})\|$$

(左辺は  $\|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\|$  と  $\|\Phi_u(a_i, c_j) \times \Phi_v(a_i, c_j)\|$  の中間値)

なることがわかる．したがって

$$\begin{aligned} &\|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| \cdot |R_{i,j}^\Delta| + \|\Phi_u(a_i, c_j) \times \Phi_v(a_i, c_j)\| \cdot |R_{i,j}^\nabla| \\ &= \frac{\|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| + \|\Phi_u(a_i, c_j) \times \Phi_v(a_i, c_j)\|}{2} \cdot |R_{i,j}| \\ &= \|\Phi_u(\mu_{i,j}, \nu_{i,j}) \times \Phi_v(\mu_{i,j}, \nu_{i,j})\| \cdot |R_{i,j}| \end{aligned}$$

となるので，以下の評価式が容易に導かれる (左側の不等号  $<$  も同様に導かれる！)：

$$\begin{aligned} -\epsilon |R| &< A(T_\Delta) - \sum_{i,j} \|\Phi_u(\mu_{i,j}, \nu_{i,j}) \times \Phi_v(\mu_{i,j}, \nu_{i,j})\| \cdot |R_{i,j}| \\ &= A(T_\Delta) - \sum_{i,j} \left\{ \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| \cdot |R_{i,j}^\Delta| + \|\Phi_u(a_i, c_j) \times \Phi_v(a_i, c_j)\| \cdot |R_{i,j}^\nabla| \right\} \\ &= \sum_{i,j} \left\{ A(T_{i,j}^\Delta) - \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| \cdot |R_{i,j}^\Delta| \right\} \\ &\quad + \sum_{i,j} \left\{ A(T_{i,j}^\nabla) - \|\Phi_u(a_i, c_j) \times \Phi_v(a_i, c_j)\| \cdot |R_{i,j}^\nabla| \right\} \\ &< \sum_{i,j} \epsilon |R_{i,j}^\Delta| + \sum_{i,j} \epsilon |R_{i,j}^\nabla| = \epsilon \sum_{i,j} |R_{i,j}| = \epsilon |R|. \end{aligned}$$

ここで，閉長方形  $R$  で定義された二変数連続関数  $\|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| ((u, v) \in R)$  に対する  
リーマン和の  $R$  の分割  $\Delta$  の細かさ  $|\Delta|$  を 0 に近づけるときの極限值を考えると

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \|\Phi_u(\mu_{i,j}, \nu_{i,j}) \times \Phi_v(\mu_{i,j}, \nu_{i,j})\| \cdot |R_{i,j}| = \iint_R \|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| dudv$$

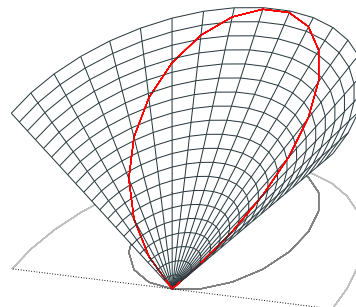
が成り立っているから，  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} A(T_\Delta) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i,j} \|\Phi_u(\mu_{i,j}, \nu_{i,j}) \times \Phi_v(\mu_{i,j}, \nu_{i,j})\| \cdot |R_{i,j}|$  .

$$\therefore \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} A(T_\Delta) = \iint_R \|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| dudv \quad (= A(T)).$$

曲面  $T$  の面積は ( $T$  のパラメータ表示から決まる) 三角形の面の複合である二次元複体  $T_\Delta$  の面積の極限值である. どのような曲面が面積を持つのかという問題は, 面積を持つ領域  $D$  上でのどんな (曲面を与える) パラメータ表示  $\Phi(u, v)$  に対して, 重積分  $\iint_D \|\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| \, dudv$  が計算され得るのかという問題であると考えることができる.

### 問題 5.7

- 1 円錐面  $z^2 = x^2 + y^2$  の  
領域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2ax\}$   
上の表面積を求めよ ( $a > 0$ ).



- 2 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  内にある円柱  
 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq ax\}$   
の表面積を求めよ ( $a > 0$ ).

- 3 回転面の表面積  $C^1$  級関数  $y = f(x) \geq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) のグラフを  $x$  軸のまわりに一回  
転してできる回転面の表面積は  $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$  で与えられることを示せ.

- 4 関数  $y = \frac{1}{x}$  ( $x \geq 1$ ) のグラフを  $x$  軸のまわりに一回転してできる回転面  $T$  (Gabriel's  
Horn) の表面積は無限大であることを示せ. また回転面  $T$  と平面  $x = 1$  で囲まれた領域の体積  
を求めよ.

- 5  $xy$  平面内の円  $x^2 + (y - a)^2 = R^2$  ( $a > R > 0$ ) を  $x$  軸の周りに回転してできる円環体  
(トーラス) の表面積を求めよ.

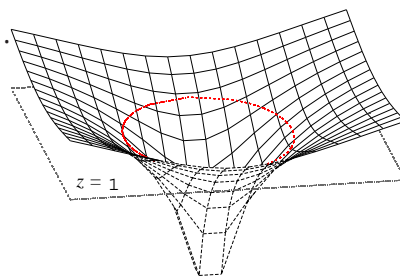
- 6 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  を  $x$  軸のまわりに一回転してできる回転面の表面積は,  $a > b$  のとき  
 $2\pi b \left( b + a \frac{\sin^{-1} e}{e} \right)$  であることを示せ. ただし  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ .

7 関数  $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ) を考える.

(1) 領域  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y) \leq z \leq 1\}$  の体積  $V$  を求めよ.

(2)  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) \leq 1\}$  ( $\subset \mathbf{R}^2$ ) とするとき,

曲面  $z = f(x, y)$  の  $D$  ( $\subset \mathbf{R}^2$ ) 上の表面積  $S$  を求めよ.

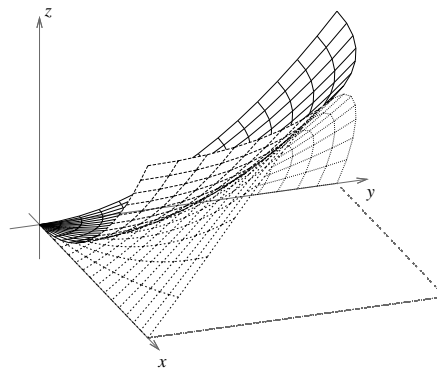


8 二次曲面  $z = 2xy$  の領域  $D$  ( $\subset \mathbf{R}^2$ ) 上の表面積と

回転放物面  $z = x^2 + y^2$  の領域  $D$  上の表面積は等しい.

注. この二次曲面  $z = 2xy = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2$  は双曲放物面  $z = -x^2 + y^2$  を  $z$  軸の周りに角  $-\frac{\pi}{4}$  回転した曲面である.

右の図は上の二次曲面と回転放物面の部分図である.



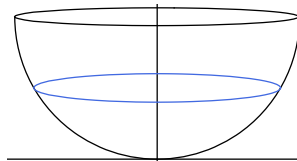
9 点  $(0, 0, 1)$  を中心とする半径 1 の下半球面  $S^-$  を考える:

$$S^- = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$0 \leq h \leq 1$  のとき, 下半球面  $S^-$  の部分

$$S_h = \{(x, y, z) \in S^- \mid 0 \leq z \leq h\}$$

の表面積  $S(h)$  を計算しなさい. また  $S(h) = \frac{S(1)}{2}$  となる  $h$  を求めよ.



## 5.8 積分と関数表現

### D. 積分によって得られる不等式また等式

**[1]** 平面の有界領域  $D$  で連続な関数  $f(x, y), g(x, y)$  ( $(x, y) \in D$ ) を考える .

$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  のとき , つぎの Hölder の不等式が成り立つ :

$$\iint_D |f(x, y)g(x, y)| \, dx dy \leq \left( \iint_D |f(x, y)|^p \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \iint_D |g(x, y)|^q \, dx dy \right)^{\frac{1}{q}} .$$

**[証明]** すべての負でない数  $a, b (\geq 0)$  に対して , ヤング (Young) の不等式  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$  が成り立っていることに注意する . さて ,

$$\|f\|_p = \left( \iint_D |f(x, y)|^p \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{および} \quad \|g\|_q = \left( \iint_D |g(x, y)|^q \, dx dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

と置く . 関数  $f(x, y) \equiv 0$  または  $g(x, y) \equiv 0$  の場合には , 主張は明らかである .

$f(x, y) \not\equiv 0$  かつ  $g(x, y) \not\equiv 0$  の場合には ,  $\|f\|_p = \|g\|_q \neq 0$  であるから ,  $D$  上の連続関数

$$a(x, y) = \frac{|f(x, y)|}{\|f\|_p}, \quad b(x, y) = \frac{|g(x, y)|}{\|g\|_q}$$

を考慮することができる . ヤングの不等式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \left| \iint_D f(x, y)g(x, y) \, dx dy \right| &\leq \iint_D \frac{|f(x, y)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x, y)|}{\|g\|_q} \, dx dy \\ &= \iint_D a(x, y)b(x, y) \, dx dy \\ &\leq \iint_D \frac{1}{p} a(x, y)^p + \frac{1}{q} b(x, y)^q \, dx dy \\ &= \iint_D \frac{1}{p} \left( \frac{|f(x, y)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left( \frac{|g(x, y)|}{\|g\|_q} \right)^q \, dx dy \\ &= \frac{1}{p \|f\|_p^p} \iint_D |f(x, y)|^p \, dx dy + \iint_D \frac{1}{q \|g\|_q^q} |g(x, y)|^q \, dx dy \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

こうして

$$\iint_D |f(x, y)g(x, y)| \, dx dy \leq \|f\|_p \|g\|_q = \left( \iint_D |f(x, y)|^p \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \iint_D |g(x, y)|^q \, dx dy \right)^{\frac{1}{q}}. \quad //$$

**[2]** 半径  $R > 0$  の閉円板  $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  と閉じた上半球  $\bar{B}_+ =$

$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$  を考える . 閉上半球  $\bar{B}_+$  を含む領域  $V$  で  $C^1$  級の関数  $f(x, y, z)$  に対して , つぎの等式が成り立つ :

$$\iint_{\bar{D}} \frac{x f(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy = \iiint_{\bar{B}_+} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

**証明** 閉円板  $\bar{D}$  を閉じた右半円  $\bar{D}_+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0\}$  と左半円

$\bar{D}_- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \leq 0\}$  にわける．閉じた半円

$\bar{U}_+ = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq R^2, v \geq 0\}$  から  $\bar{D}_+$  への変換  $\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \\ y = u. \end{cases}$  を考

える． $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} & -\frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$  であるから，

重積分の変数変換の公式により

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{D}_+} \frac{xf(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy &= \iint_{\bar{U}_+} \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{v} f(\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, u, v) \times \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv \\ &= \iint_{\bar{U}_+} f(\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, u, v) dudv. \end{aligned}$$

同様に，閉じた半円  $\bar{U}_+$  から  $\bar{D}_-$  への変換  $\begin{cases} x = -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \\ y = u. \end{cases}$  を考えて，

$$\iint_{\bar{D}_-} \frac{xf(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = - \iint_{\bar{U}_+} f(-\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, u, v) dudv$$

得られるので，

$$\begin{aligned} &\iint_{\bar{D}} \frac{xf(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_{\bar{D}_+} \frac{xf(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy + \iint_{\bar{D}_-} \frac{xf(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_{\bar{U}_+} f(\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, u, v) dudv - \iint_{\bar{U}_+} f(-\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, u, v) dudv \\ &= \iint_{\bar{U}_+} \left\{ \int_{-\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}^{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \frac{\partial}{\partial x} f(x, u, v) dx \right\} dudv = \iiint_{\bar{B}_+} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dx dy dz. \quad // \end{aligned}$$

### 問題 5.8

**1** 平面的有界領域  $D$  で連続な関数  $f(x, y)$  に対して，つぎの等式が成り立つ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \iint_D |f(x, y)|^n dx dy \right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|.$$

**2**  $f(x), g(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) を単調増加連続関数とする．つぎの不等式が成り立つことを示せ：

$$\int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Hint.  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  上で  $\{f(x) - f(y)\}\{g(x) - g(y)\} \geq 0$  である．

## 5.9 微分と積分の順序変更

### C. 微分と積分の順序変更

**定理 1** 関数  $f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  は閉長方形  $[a, b] \times [c, d]$  で連続とする. そのとき

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (x \in [a, b])$$

が成り立つ.

最初に, 関数  $\int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  ( $a \leq x \leq b$ ) の連続性を示すために, つぎの定理を準備する:

(参考. 5.1 重積分 D **定理 連続関数の一様連続性**)

閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  で定義された連続関数  $f(x, y)$  は, 閉長方形  $R$  で一様連続である, すなわち

$$(*) \quad \left( \begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して, ある正の数 } \delta \text{ が存在して,} \\ \text{閉区間 } R \text{ のどの } (x, y), (x', y') \text{ に対しても} \\ \sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2} < \delta \implies |f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon \end{array} \right)$$

が成り立つ.

任意の正の数  $\epsilon$  に対して, ある正の数  $\delta$  を一様連続性の条件 (\*) が成り立つように選ぶと,  $a \leq x, x' \leq b$  で  $|x - x'| < \delta$  のとき

$$\left| \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy - \int_c^d \frac{\partial f(x', y)}{\partial x} dy \right| \leq \int_c^d \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x', y)}{\partial x} \right| dy \leq \int_c^d \epsilon dy = \epsilon(d - c).$$

これは, 関数  $\int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  ( $a \leq x \leq b$ ) の連続性を示している.

このとき, 関数  $\int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  ( $a \leq x \leq b$ ) の不定積分を考えると

$$\int_a^x dt \int_c^d \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy = \int_c^d dy \int_a^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt = \int_c^d \{f(x, y) - f(a, y)\} dy \quad (x \in [a, b])$$

故に,

$$\int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy = \frac{d}{dx} \int_a^x dt \int_c^d \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy = \frac{d}{dx} \int_c^d \{f(x, y) - f(a, y)\} dy = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy. //$$

関数  $f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  は領域  $[a, b] \times [c, \infty)$  で連続とし, 広義積分

$$\int_c^\infty f(x, y) dy, \quad \int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (x \in [a, b])$$

があるとする.

広義積分に関するの‘微分と積分の順序変更’

$$\int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy = \frac{d}{dx} \int_c^\infty f(x, y) dy$$

はどんな条件で成り立つだろうか. 定理 1 の証明にならうときは,

関数  $\int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  ( $a \leq x \leq b$ ) の連続性を示すことが重要である. そのため

$\int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  ( $a \leq x \leq b$ ) は閉区間  $[a, b]$  で一様収束している, すなわち

$$\left( \begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して, ある正の数 } M_0 > c \text{ が存在して, すべての } x \in [a, b] \text{ に対して} \\ M \geq M_0 \implies \left| \int_M^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \right| < \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つとする.

この一様性条件は, 閉区間  $[a, b]$  上の連続関数  $\int_c^M \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  が  $M \rightarrow \infty$  のとき  $[a, b]$  上  $\int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  へ一様収束していることを意味しているから, その極限関数  $\int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$

は連続である (微分積分学 1 3.15 関数列と積分 定理 1).

このとき, 関数  $\int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  ( $a \leq x \leq b$ ) の不定積分を考えると

$$\begin{aligned} \int_a^x dt \int_c^\infty \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy &= \int_a^x dt \int_c^M \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy + \int_a^x dt \int_M^\infty \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy \\ &= \int_c^M dy \int_a^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt + \int_a^x dt \int_M^\infty \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy \\ &= \int_c^M \{f(x, y) - f(a, y)\} dy + \int_a^x dt \int_M^\infty \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy \end{aligned} \quad (x \in [a, b]).$$

$$\left| \int_a^x dt \int_M^\infty \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy \right| \leq \int_a^x dt \left| \int_M^\infty \frac{\partial f(t, y)}{\partial x} dy \right| \leq \epsilon(b-a) \longrightarrow 0 \quad (M \longrightarrow \infty)$$

であるから,  $\int_a^x dt \int_c^\infty \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy = \int_c^\infty \{f(x, y) - f(a, y)\} dy$ .

故に  $\int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy = \frac{d}{dx} \int_c^\infty f(x, y) dy$  が成り立つ.

**定理 2** 関数  $f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  は領域  $[a, b] \times [c, \infty)$  で連続とし, 広義積分

$$\int_c^\infty f(x, y) dy, \quad \int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (x \in [a, b])$$

があるとする.

$\int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  ( $a \leq x \leq b$ ) は閉区間  $[a, b]$  で一様収束している, すなわち

$$\left( \begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して, ある正の数 } M_0 > c \text{ が存在して, すべての } x \in [a, b] \text{ に対して} \\ M \geq M_0 \implies \left| \int_M^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \right| < \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つとする.

そのとき

$$\frac{d}{dx} \int_c^\infty f(x, y) dy = \int_c^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (x \in [a, b])$$

が成り立つ.

**定理 3** 関数  $f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  は領域  $[a, b] \times (c, d]$  で連続とし, (広義) 異常積分

$$\int_c^d f(x, y) dy, \quad \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (x \in [a, b])$$

があるとする.

関数  $\int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy$  ( $a \leq x \leq b$ ) が閉区間  $[a, b]$  で連続のとき,

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy \quad (x \in [a, b])$$

が成り立つ.

### 問題 5.9

**1** Gamma 関数の導関数  $\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \log t dt$  ( $x > 0$ ) を示せ.

一般に  $\frac{d^n}{dx^n} \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\log t)^n dt$  ( $x > 0$ ) が成り立つ.



# 第6章 ベクトル場と微分形式

## 6.1 面積分

### D. 面積分と法線面積分

前章 5.7 曲面の面積 で曲面の面積をその法線ベクトルの長さについての積分 ( p.85 公式 (\*) ) で計算することを述べたが, 曲面のパラメータ表示が取り代えられた場合にも同一の面積が計算されるだろうか.

空間  $\mathbf{R}^3$  にある曲面  $S$  の  $C^1$  級パラメータ表示を考える:

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \quad ((u, v) \in D),$$

ただし  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) は平面領域  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  で定義された  $C^1$  級関数. 曲面  $S$  上の点  $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  ( $(u, v) \in D$ ) での法線ベクトル

$$N = N(u, v) = \Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} y_u & y_v & z_u & z_v & x_u & x_v \\ z_u & z_v & x_u & x_v & y_u & y_v \end{array} \right) \text{ の長さ } \|N(u, v)\| \text{ は}$$

$$\|N(u, v)\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u(u, v) & z_v(u, v) \\ x_u(u, v) & x_v(u, v) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix}^2}.$$

今, 曲面  $S$  のもう一つの  $C^1$  級パラメータ表示を考える:

$$\tilde{\Phi}(s, t) = (\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t)) \in S \quad ((s, t) \in E),$$

ただし  $\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t)$  ( $(s, t) \in E$ ) は平面領域  $E(\subset \mathbf{R}^2)$  で定義された  $C^1$  級関数. さらに,  $D$  から  $E$  への  $C^1$  級同型 (全単射) 写像  $(\varphi, \psi) : D \rightarrow E$  が存在して

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) = \tilde{\Phi}(s, t) &= \tilde{\Phi}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\ (s, t) &= (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \end{aligned}$$

が成りたっているとする (曲面の微分可能性を損なわないように).

曲面  $S$  上の点  $\tilde{\Phi}(s, t) = (\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t))$  ( $(s, t) \in E$ ) での法線ベクトル

$$\tilde{N}(s, t) = \tilde{\Phi}_s(s, t) \times \tilde{\Phi}_t(s, t) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} \tilde{y}_s & \tilde{y}_t & \tilde{z}_s & \tilde{z}_t & \tilde{x}_s & \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_s & \tilde{z}_t & \tilde{x}_s & \tilde{x}_t & \tilde{y}_s & \tilde{y}_t \end{array} \right) \text{ の長さ } \|\tilde{N}(s, t)\| \text{ は}$$

$$\|\tilde{N}(s, t)\| = \sqrt{\begin{vmatrix} \tilde{y}_s(s, t) & \tilde{y}_t(s, t) \\ \tilde{z}_s(s, t) & \tilde{z}_t(s, t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \tilde{z}_s(s, t) & \tilde{z}_t(s, t) \\ \tilde{x}_s(s, t) & \tilde{x}_t(s, t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \tilde{x}_s(s, t) & \tilde{x}_t(s, t) \\ \tilde{y}_s(s, t) & \tilde{y}_t(s, t) \end{vmatrix}^2}.$$

4.5 合成関数の偏微分 B. 基本事項 定理 3 により

$$\begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_s(s, t) & \tilde{x}_t(s, t) \\ \tilde{y}_s(s, t) & \tilde{y}_t(s, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{pmatrix}$$

が成り立つので，行列式をとって

$$\begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{x}_s(s, t) & \tilde{x}_t(s, t) \\ \tilde{y}_s(s, t) & \tilde{y}_t(s, t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{vmatrix}.$$

同様に，

$$\begin{vmatrix} y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{y}_s(s, t) & \tilde{y}_t(s, t) \\ \tilde{z}_s(s, t) & \tilde{z}_t(s, t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} z_u(u, v) & z_v(u, v) \\ x_u(u, v) & x_v(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{z}_s(s, t) & \tilde{z}_t(s, t) \\ \tilde{x}_s(s, t) & \tilde{x}_t(s, t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{vmatrix}$$

が成り立つことから，

$$\begin{cases} \mathbf{N}(u, v) = \tilde{\mathbf{N}}(s, t) \begin{vmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{vmatrix}, \\ \|\mathbf{N}(u, v)\| = \|\tilde{\mathbf{N}}(s, t)\| \operatorname{Abs} \left( \begin{vmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{vmatrix} \right). \end{cases} \quad (\operatorname{Abs}(\cdot) \text{ は絶対値をとる関数})$$

重積分の変数変換の公式から

$$\iint_D \|\mathbf{N}(u, v)\| \, dudv = \iint_E \|\tilde{\mathbf{N}}(s, t)\| \, dsdt$$

が成り立つ．結論として，曲面の面積はパラメータ表示によらないことがわかる（曲面の微分可能性を損なわない  $C^1$  級パラメータ表示を考える限りでのことである）．

例 原点を中心とする半径  $R(> 0)$  の球面  $S$  を考える．球面  $S$  のパラメータ表示として極座標表示  $x = R \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = R \cos \theta$  ( $0 \leq \theta < \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) を考えると， $(x, y, z) \in S$  での法線ベクトル  $\mathbf{N}$  は

$$\mathbf{N}(\theta, \varphi) = \left( \begin{vmatrix} y_\theta & y_\varphi \\ z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_\theta & z_\varphi \\ x_\theta & x_\varphi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_\theta & x_\varphi \\ y_\theta & y_\varphi \end{vmatrix} \right) = R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

と計算されるので， $\|\mathbf{N}(s, t)\| = R^2 \sin \theta$ ．このことから，球面の面積が計算される：

$$\int_S 1 \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \|\mathbf{N}(\theta, \varphi)\| \, d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

さて，上における議論と結論から，空間  $\mathbf{R}^3$  にある曲面  $S$  上で定義された連続関数  $f(x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in S$ ) に対して，二重積分  $\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\mathbf{N}(u, v)\| \, dudv$  の値が

曲面  $S$  の ( $C^1$  級である) パラメータ表示によらずに決まることがわかる . すなわち

$$\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|N(u, v)\| du dv = \iint_D f(\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t)) \|\tilde{N}(s, t)\| ds dt$$

が成り立つのである . この積分を面積分と呼び  $\int_S f(x, y, z) dS$  と表し  $dS = \|N(u, v)\| du dv$  を面素と呼ぶ . すなわち

**定義**      面積分  $\int_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|N(u, v)\| du dv .$

面積分 (の値) は曲面の ( $C^1$  級である限り) パラメータ表示によらない .

さて , 面素の概念のほかにも , 曲面  $S$  のパラメータ表示に依存しない数学的 ' 量 ' に対する曲面  $S$  上での積分が考えられる . このような例を挙げるために , ベクトル場という考えを説明しておこう . 平面上のある集合の各点にベクトルが対応している状況は , しばしば下の図のように表現される . この図は平面上のある流体の軌跡 (流線) を表すために , 流線に沿って流れる流体の速度ベクトルを表そうとしている . 平面上の各点  $p$  での流体の速度ベクトル  $V(p)$  を各点を始点とする位置ベクトルとして考えるのである . 速度ベクトルを  $\mathbb{R}^2$  の数ベクトルであると考え , 右の図は位置  $p$  と数ベクトル  $V(p)$  の組  $(p, V(p))$

と見なされるだろう . この対応  $p \rightarrow (p, V(p))$  が流体の速度ベクトル場である . 一般に , ある集合  $X$  の各点に  $\mathbb{R}^n$  の要素がベクトルとして対応している状況は ,  $\mathbb{R}^n$  の数ベクトルを値にとるベクトル値関数  $F(p)$  ( $p \in X$ ) を使って対応 (写像)

$$\gamma : p \rightarrow (p, F(p))$$

によって表すことができる . ベクトルの分布を与えているこの対応はベクトル場  $\gamma$  と呼ばれる . このベクトル場  $\gamma$  のイメージとして , ベクトル 値関数  $F(p)$  ( $p \in X$ ) のグラフ

$$\{(p, F(p)) \in X \times \mathbb{R}^n \mid p \in X\}$$

を考えることもできる . 明らかに , このベクトル場  $\gamma$  はベクトル値関数  $F(p)$  ( $p \in X$ ) によって決まるので , ベクトル場を指示するためにベクトル値関数だけであることがしばしばあり , ベクトル場  $F$  とも表される .

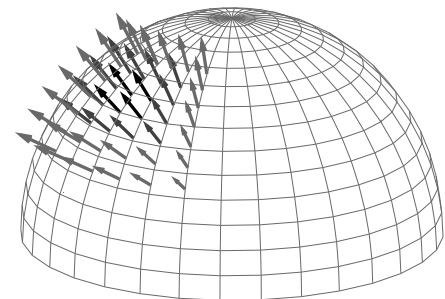
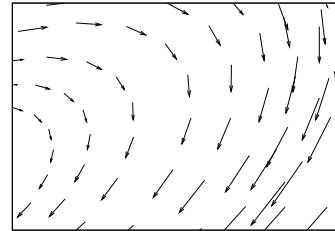
例えば ,

空間  $\mathbb{R}^3$  にある曲面  $S$  の法線ベクトル  $N$

(4.4 D. パラメータ表示された曲面)

を指し示すベクトル値関数  $N_P$  ( $P \in S$ )

は曲面  $S$  上のベクトル場を与えている .



さて、空間  $\mathbb{R}^3$  にある曲面  $S$  上で定義される ( $\mathbb{R}^3$  の数ベクトルを値にとる) ベクトル場  $V$  は  $S$  で定義された連続関数  $f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)$  によって

$$V(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) \quad ((x, y, z) \in S)$$

と表されているものとする - このようなベクトル場  $V$  は連続ベクトル場といわれる。

$S$  の法線ベクトル  $N$  に関する  $V$  の法線成分  $V \cdot N$  は、ベクトル場  $V$  を

$$V(u, v) = (f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), h(x(u, v), y(u, v), z(u, v))) \quad ((u, v) \in D)$$

と  $D$  上の表示に関して表すとき、

$$\begin{aligned} (V \cdot N)(u, v) &= V(u, v) \cdot N(u, v) \\ &= f(u, v) \begin{vmatrix} y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} + g(u, v) \begin{vmatrix} z_u(u, v) & z_v(u, v) \\ x_u(u, v) & x_v(u, v) \end{vmatrix} + h(u, v) \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

ここで、ベクトル場  $V$  を  $E$  上の表示に関して

$$\tilde{V}(s, t) = (f(\tilde{x}(s, t)), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t)), g(\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t)), h(\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t))) \quad ((s, t) \in E)$$

と考えると、つぎが成り立つ：

$$V(u, v) \cdot \frac{N(u, v)}{\|N(u, v)\|} = \pm \tilde{V}(s, t) \cdot \frac{\tilde{N}(s, t)}{\|\tilde{N}(s, t)\|}.$$

曲面  $S$  のパラメータの変換が向きを保つとき、すなわち  $\frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{vmatrix} > 0$  のとき、積分

$$\begin{aligned} \int_D V(u, v) \cdot N(u, v) \, dudv &= \int_D V(u, v) \cdot \frac{N(u, v)}{\|N(u, v)\|} \|N(u, v)\| \, dudv \\ &= \int_E \tilde{V}(s, t) \cdot \frac{\tilde{N}(s, t)}{\|\tilde{N}(s, t)\|} \|\tilde{N}(s, t)\| \, dsdt = \int_E \tilde{V}(s, t) \cdot \tilde{N}(s, t) \, dsdt \end{aligned}$$

の値を法線面積分と呼んで  $\int_S V \cdot n \, dS$  と表す。ここで  $n = \frac{N(u, v)}{\|N(u, v)\|}$  は曲面  $S$  の単位法線ベクトルである。

**定義**      法線面積分       $\int_S V \cdot n \, dS = \iint_D V(u, v) \cdot N(u, v) \, dudv$  .

法線面積分は ( $C^1$  級である限り) 曲面の向きを保つパラメータ表示によらない。

### 問題 6.1

**1** 曲面 Helicoid の一部 (参考. 4.4 接平面と法線 問題 4.4 **1**)

$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = 2v \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi)$  の面積を求めよ。

## 6.2 発散 (量) 定理 (Divergence Theorem)

### D. 発散定理 (Divergence Theorem)

**Divergence Theorem** 空間  $\mathbf{R}^3$  にある (有限個の) 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $\Omega$  を考える . 領域  $\Omega$  の境界  $S$  を含めた  $\bar{\Omega}$  で定義された  $C^1$  級ベクトル場 (関数  $f, g, h$  が  $C^1$  級である)

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) \quad ((x, y, z) \in \bar{\Omega})$$

が与えられたとき , 曲面  $S$  の外向きの単位 (長さ 1 の) 法線ベクトル場  $\mathbf{n}$  に対して

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz \\ \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \quad (\text{ベクトル場の発散}). \end{array} \right.$$

**説明** 発散定理は、ベクトル場  $\mathbf{A}$  の発散の領域  $\Omega$  での体積分と、ベクトル場  $\mathbf{A}$  (によって表されている流れ) の領域  $\Omega$  の境界面  $S$  上での面積分を関連付けるものである . その証明は微分積分学の基本定理に基づいている . この定理からはつぎの事が容易に導かれる :

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \begin{cases} 0 & (\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \text{ のとき}) \\ > 0 & (\operatorname{div} \mathbf{A} > 0 \text{ のとき}) \\ < 0 & (\operatorname{div} \mathbf{A} < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ベクトル場  $\mathbf{A}$  が領域  $\Omega$  を含む範囲での流れを表していると考えるとき , 積分値  $\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$  は領域  $\Omega$  の境界面  $S$  上での  $\Omega$  からの流出と  $\Omega$  への流入の総和 , すなわち 発散量 , の表現であると考えられるので , つぎのように捉えられる :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \text{ のとき , 領域 } \Omega \text{ 内で発散がない場合で } \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0 .$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} > 0 \text{ のとき , 領域 } \Omega \text{ 内で湧きだしている場合で } \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS > 0 .$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} < 0 \text{ のとき , 領域 } \Omega \text{ 内で沈み込んでいる場合で } \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS < 0 .$$

**証明** (1)  $\Omega$  上のベクトル場  $\mathbf{A}$  は三つのベクトル場

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), 0, 0) , \quad \mathbf{G}(x, y, z) = (0, g(x, y, z), 0) , \quad \mathbf{H}(x, y, z) = (0, 0, h(x, y, z))$$

の和として  $\mathbf{A} = \mathbf{F} + \mathbf{G} + \mathbf{H}$  と表されることと積分の線形性から ,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\mathbf{F} + \mathbf{G} + \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS$$

また

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz &= \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{F} + \mathbf{G} + \mathbf{H}) dx dy dz \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{G} dx dy dz + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{H} dx dy dz \end{aligned}$$

が成り立つので，ベクトル場  $A = F$  (または  $G$  や  $H$ ) の場合に証明すれば十分である．

(2) 領域  $\Omega$  の境界が二枚の殻と見なされるようなつぎの条件 (三方向条件) を持っている場合について調べる：

三方向条件

領域  $\Omega$  は，平面  $\mathbf{R}^2$  内の領域  $D_1$  で定義される二つの  $C^1$  級関数  $\phi_1(y, z) \leq \psi_1(y, z)$  のグラフで挟まれた横線領域

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \phi_1(y, z) < x < \psi_1(y, z), \quad (y, z) \in D_1 \subset \mathbf{R}^2 \right\}$$

と考えることができるだけでなく，平面  $\mathbf{R}^2$  内の領域  $D_2$  で定義される二つの  $C^1$  級関数  $\phi_2(x, z) \leq \psi_2(x, z)$  のグラフで挟まれた横線領域

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \phi_2(x, z) < y < \psi_2(x, z), \quad (x, y) \in D_2 \subset \mathbf{R}^2 \right\}$$

とも，平面  $\mathbf{R}^2$  内の領域  $D_3$  で定義される二つの  $C^1$  級関数  $\phi_3(x, y) \leq \psi_3(x, y)$  のグラフで挟まれた縦線領域

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \phi_3(x, y) < z < \psi_3(x, y), \quad (x, y) \in D_3 \subset \mathbf{R}^2 \right\}$$

とも考えることができる．

空間  $\mathbf{R}^3$  の開直方体や開球はこのような例である．さらに空間  $\mathbf{R}^3$  の有界凸領域  $D$  もこのような条件を満たす例 (滑らかな境界を持つ場合等) である；空間  $\mathbf{R}^3$  の領域  $D$  が凸領域であるとは， $D$  の任意の二点を結ぶ線分が常に領域  $D$  内にあることであると定義する．

さて，上の (1) の検討を踏まえて  $A = F$  である場合を考える．

領域  $\Omega$  は，平面  $\mathbf{R}^2$  内の領域  $D_1$  で定義される二つの  $C^1$  級関数  $\phi_1(y, z) \leq \psi_1(y, z)$  のグラフで挟まれた横線領域

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \phi_1(y, z) < x < \psi_1(y, z), \quad (y, z) \in D_1 \subset \mathbf{R}^2 \right\}$$

と考えることができるので， $\Omega$  の境界  $S$  は 2 枚の曲面

$$S_l = \left\{ (x, y, z) \mid x = \phi_1(y, z), \quad (y, z) \in D_1 \right\}, \quad S_r = \left\{ (x, y, z) \mid x = \psi_1(y, z), \quad (y, z) \in D_1 \right\}$$

と領域  $D_1$  の境界  $\partial D_1$  上の管

$$S_t = \left\{ (x, y, z) \mid \phi_1(y, z) < x < \psi_1(y, z), \quad (y, z) \in \partial D_1 \right\}$$

からなっている．向かい合う二面  $S_l$  と  $S_r$  での法線ベクトルは

$$S_r \text{ 上で } N = \left( \begin{vmatrix} y_y & y_z \\ z_y & z_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_y & z_z \\ x_y & x_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_y & x_z \\ y_y & y_z \end{vmatrix} \right) = (1, -x_y, -x_z) \in \mathbf{R}^3$$

$$S_l \text{ 上で } N = - \left( \begin{vmatrix} y_y & y_z \\ z_y & z_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_y & z_z \\ x_y & x_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_y & x_z \\ y_y & y_z \end{vmatrix} \right) = (-1, x_y, x_z) \in \mathbf{R}^3$$

と計算されるから,

$$\begin{aligned} \int_{S_t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{D_1} -f(\phi_1(y, z), y, z) dydz + \iint_{D_1} f(\psi_1(y, z), y, z) dydz \\ &= \iint_{D_1} \left\{ \int_{\phi_1(y, z)}^{\psi_1(y, z)} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right\} dydz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz. \end{aligned}$$

が成り立つ. 管  $S_t$  上での法線ベクトル  $\mathbf{N}$  の  $x$  方向成分は 0 でなければならないから,

$$\int_{S_t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_t} 0 dS = 0$$

である. 従って

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S_t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz \end{aligned}$$

が成り立った. 領域  $\Omega$  の境界が三方向条件を満たしている場合, 同様に考えて

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{G} dx dy dz, \quad \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{H} dx dy dz$$

も示されるので, 境界が三方向条件を満たす領域  $\Omega$  では発散定理が成り立つ.

(3) 領域  $\Omega$  が曲面  $S_0 (\subset \Omega)$  によって, 発散定理が成り立っている二つの領域  $\Omega_1$  と領域  $\Omega_2$  に分割される場合, すなわち, 二つの領域  $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  から領域  $\Omega$  がつぎのようにして生じている場合を考える:  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  (空集合),  $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S_0 = \Omega$ . さらに, 領域  $\Omega_1$  の境界  $S_1$  は曲面  $S_{10}$  と  $S_0$  から, また領域  $\Omega_2$  の境界  $S_2$  は曲面  $S_{20}$  と  $S_0$  からなり, 領域  $\Omega$  の境界は  $S = S_{10} \cup S_{20}$  かつ  $S_{10} \cap S_{20} = \emptyset$  となっている. このとき, 領域  $\Omega_1$  の境界  $S_1$  の一部である曲面  $S_0$  上の単位法線ベクトル場  $\mathbf{n}_1$  と領域  $\Omega_2$  の境界  $S_2$  の一部である曲面  $S_0$  上の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_2$  が互いに反対の向きのベクトル場であることから

$$\int_{S_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 = - \int_{S_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2$$

となる. このとき, 領域  $\Omega$  で発散定理の成り立つことがつぎの計算からわかる:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S_{10} \cup S_{20}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_{10}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 + \int_{S_{20}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 \\ &= \int_{S_{10}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 + \int_{S_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 + \int_{S_{20}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 - \int_{S_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 \\ &= \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 \\ &= \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz. \end{aligned}$$

さらに, 発散定理が成り立つ有限個の領域に分割され得る領域  $\Omega$  にたいしても発散定理が成り立つことが帰納的に示される. //

**例** 空間  $\mathbf{R}^3$  の球座標系  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$  ( $0 < r$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

$0 \leq \varphi < 2\pi$  の下で, 原点を中心とする半径  $R(> 0)$  の球  $B_R$  とその境界である半径  $R$  の球面  $S_R$  を考える.  $(x, y, z) \in S_R$  での外向き法線ベクトル  $N$  は (6.1 D 例) でも示したように)

$$N = R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \in \mathbf{R}^3.$$

$\mathbf{R}^3$  上のベクトル場  $\hat{r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$  と関数  $\alpha(r, \theta, \varphi)$  から定義されるベクトル場  $\alpha \hat{r}$  を考えると

$$\alpha \hat{r} = \alpha(r, \theta, \varphi) \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right), \quad \operatorname{div} \alpha \hat{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha z}{r}\right)$$

である. そのとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha x}{r}\right) &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{x}{r} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha y}{r}\right) &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{y}{r} + \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha z}{r}\right) &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \cdot \frac{z}{r} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{z}{r} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

ここで, (4.6 C. 3) を参照して)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{z}{r}\right) \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{xz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{r} + \frac{yz}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{r} + \frac{-\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} \cdot \frac{z}{r}\right) = 0 \end{aligned}$$

また

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{z}{r}\right) = \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \cdot \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{r} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{r}\right) = 0.$$

そして

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{x}{r} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{y}{r} + \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} \cdot \frac{z}{r} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r}\right) \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r} + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{y}{r} + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{z}{r} + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right) \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{2\alpha}{r} \quad \text{であるから} \quad \operatorname{div} \alpha \hat{r} = \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{2\alpha}{r} \end{aligned}$$

となる. このとき,  $\operatorname{div} \alpha \hat{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \{\alpha(r, \theta, \varphi) r^2\}$  と書き表すことができるので

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \alpha \hat{r} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_D \alpha(R, \theta, \varphi) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int_D \left(\int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \{\alpha(r, \theta, \varphi) r^2\} dr\right) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \int_D \left(\int_0^R (\operatorname{div} \alpha \hat{r}) r^2 dr\right) \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{D \times (0, R]} (\operatorname{div} \alpha \hat{r}) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_{B_R} \operatorname{div} \alpha \hat{r} dx dy dz \quad (\text{ただし, } D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)). \end{aligned}$$

□ ベクトル場  $\hat{r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$  と  $\hat{\theta} = \left(\frac{xz}{r\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{yz}{r\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}\right)$  および

$\hat{\varphi} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0\right)$  の発散を求めよ, ただし  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .



**例**  $\Omega$  が原点から半径  $R(>0)$  の上半球  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$  の場合を考える.  $\Omega$  の境界  $S$  は原点から半径  $R(>0)$  の閉円板  $D = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  と上半球面  $S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 < z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$  からなる. また  $(x, y, z) \in S^+$  で法線ベクトルは上半球面  $S^+$  のパラメータ表示  $x, y, z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  ( $(x, y) \in D$ ) を考えて,  $(x, y, z) \in S^+$  での外向き法線ベクトル

$$\mathbf{N} = \left( \begin{vmatrix} y_x & y_y \\ z_x & z_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_x & z_y \\ x_x & x_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_x & x_y \\ y_x & y_y \end{vmatrix} \right) = \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right) \in \mathbf{R}^3$$

と計算される. したがって  $\Omega$  上のベクトル場  $\mathbf{A} = (f, g, h)$  に対して

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S^+} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_D \frac{xf(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \frac{yg(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &\quad + \iint_D h(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) dx dy - \iint_D h(x, y, 0) dx dy. \end{aligned}$$

$$\text{明らかに } \iint_D h(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) dx dy - \iint_D h(x, y, 0) dx dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial z} dx dy dz$$

であるから, 5.8 D. **[2]** より

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial y} dx dy dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial z} dx dy dz = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz.$$

**[2]**  $\Omega$  が直方体の場合と球の場合に, 発散定理の証明を確かめよ.

## 問題 6.2

**[1]** 空間  $\mathbf{R}^3$  上のベクトル場  $\mathbf{r}$  をつぎのように決める:

$$\mathbf{r}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) = (x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3).$$

$\mathbf{R}^3$  の原点  $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$  からの距離を  $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  とする. つぎのことを示せ:

(1) 空間  $\mathbf{R}^3$  にある (有限個の) 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $\Omega$  において,

$$\frac{1}{3} \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} dx dy dz \quad (\Omega \text{ の体積}).$$

(2) 曲面  $S$  が原点  $\mathbf{O}$  を中心とする球面  $S$  である場合  $\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi$ .

(3)  $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ .

(4) 空間  $\mathbf{R}^3$  にある (有限個の) 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $\Omega$  において,

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} \, dS = \begin{cases} 0 & (\mathbf{O} \notin \overline{\Omega} \text{のとき}) \\ 1 & (\mathbf{O} \in \Omega \text{のとき}) \end{cases}.$$

**例** 空間における荷電物体を考える. 3次元空間の原点  $\mathbf{O}$  に電荷  $q$  が在るとして, 空間内の任意の点  $P = (x, y, z)$  にある単位電荷に働く力  $E(x, y, z)$  を考える. クーロン (Coulomb) の法則による斥力である場合, 力の大きさは  $\frac{kq}{r^2}$  で, ベクトル場として

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{r^2} \cdot \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \left( \frac{kqx}{r^3}, \frac{kqy}{r^3}, \frac{kqz}{r^3} \right) = kq \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

と表される, ただし  $k$  は単位系に依存する比例定数であるので  $k = 1$  とする.

空間  $\mathbf{R}^3$  内の (有限個の滑らかな曲面  $S$  で囲まれた) 領域  $\Omega$  内の電荷を  $Q$  とし空間内の点  $P = (x, y, z)$  にある単位電荷に働く力  $E(x, y, z)$  とすると, 力の和はベクトル和として計算されることと上の **1** (4) からつぎが成り立つことがわかる:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = Q.$$

空間内の点  $P = (x, y, z)$  における電荷の密度分布を  $\rho(x, y, z)$  とすると, 領域  $\Omega$  内の電荷は  $Q = \int_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx dy dz$  で与えられるから,

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx dy dz \quad (\text{Gauss の法則})$$

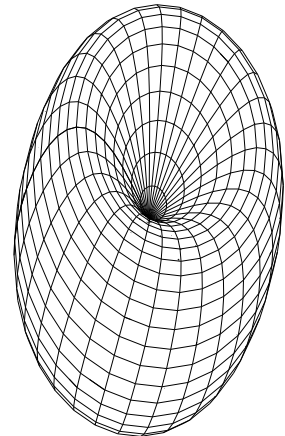
が成り立つ. 重力を考える場合も同様である. 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $\Omega$  の点  $P = (x, y, z)$  での質量の密度分布を  $\rho(x, y, z)$  とし, 重力定数を  $G$  とする. 単位質量に働く力を表すベクトル場  $\mathbf{F} = -G \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  を考えるとつぎが成り立つ:

$$-\frac{1}{4\pi G} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx dy dz.$$

**2**  $a > 0$  とする.  $f(x, y) = 4x^4 - 4a^2x^2 + a^2y^2 = 0$ ,  $f_y(x, y) \neq 0$  によって定義される曲線  $C$  (問題 4.9 **2** 図参照) はパラメータ表示

$$x = \cos u, \quad y = \sin 2u \quad \left( -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

を持つ. 曲線  $C$  を  $y$  軸の周りに回転してできる回転面を  $S$ , 回転面  $S$  の内部を領域  $\Omega$  とする.  $\mathbf{R}^3$  で発散が恒等的に 1 であるベクトル場  $\mathbf{Y} = (0, y, 0)$  に対して,  $\int_S \mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} \, dS$  を計算して  $\Omega$  の体積を求めよ.



## 6.3 線積分

### D. 曲線の長さ と 線積分

微分積分学 1 3.11 面積と体積と長さ において曲線の長さを計算することについて述べたが、  
曲線のパラメータ表示が取り換えられた場合にも同一の長さが計算されるだろうか。

空間  $\mathbb{R}^3$  にある曲線  $C$  のパラメータ表示を考える：

$$\Phi(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in C \quad (t \in I),$$

ただし  $x(t), y(t), z(t)$  は閉区間  $I \subset \mathbb{R}$  で定義された  $C^1$  級関数．この曲線の長さ  $L_C$  は定積分の値

$$L_C = \int_I \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

で計算される．曲線  $C$  の接ベクトル  $\mathbf{T}_C(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  ( $t \in I$ ) に着目すると

$$L_C = \int_I \|\mathbf{T}_C\| dt$$

と表される．また  $C$  の単位接ベクトル  $\mathbf{t}_C = \frac{\mathbf{T}_C}{\|\mathbf{T}_C\|} = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}$  ( $t \in I$ )

を使って弧長  $s$  についての積分として  $L_C = \int_C 1 ds$  と表すこともできる． $ds = \|\mathbf{T}_C\| dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$  は線素と呼ばれている．

今、曲線  $C$  のもう一つのパラメータ表示を考える：

$$\tilde{\Phi}(u) = (\tilde{x}(u), \tilde{y}(u), \tilde{z}(u)) \in C \quad (u \in J),$$

ただし  $\tilde{x}(u), \tilde{y}(u), \tilde{z}(u)$  は閉区間  $J \subset \mathbb{R}$  で定義された  $C^1$  級関数．このパラメータ表示に関する接ベクトルを  $\tilde{\mathbf{T}}_C(u) = \left( \frac{d\tilde{x}}{du}, \frac{d\tilde{y}}{du}, \frac{d\tilde{z}}{du} \right)$  と表そう．さらに、 $I$  から  $J$  への  $C^1$  級同型 (全単射) 写像  $\varphi: I \rightarrow J$  が存在して

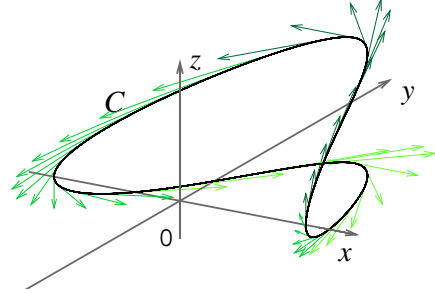
$$\Phi(t) = \tilde{\Phi}(u) = \tilde{\Phi}(\varphi(t)) \quad (u = \varphi(t))$$

が成りたっているとする．このとき、曲線  $C$  上の点  $\Phi(t) = \tilde{\Phi}(u)$  での接ベクトル  $\mathbf{T}_C(t)$  と  $\tilde{\mathbf{T}}_C(u)$  について、合成関数の微分法則から

$$\begin{cases} \mathbf{T}_C(t) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \left( \frac{d\tilde{x}}{du}, \frac{d\tilde{y}}{du}, \frac{d\tilde{z}}{du} \right) \cdot \frac{du}{dt} = \tilde{\mathbf{T}}_C(u) \cdot \frac{du}{dt}, \\ \|\mathbf{T}_C(t)\| = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{d\tilde{x}}{du} \right)^2 + \left( \frac{d\tilde{y}}{du} \right)^2 + \left( \frac{d\tilde{z}}{du} \right)^2} \left| \frac{du}{dt} \right| = \|\tilde{\mathbf{T}}_C(u)\| \left| \frac{du}{dt} \right|. \end{cases}$$

が成り立つことから、置換積分の公式を使って

$$L_C = \int_I \|\mathbf{T}_C(t)\| dt = \int_J \|\tilde{\mathbf{T}}_C(u)\| du$$



が成り立つ。すなわち，曲線の長さ  $L_C$  は曲線のパラメータ表示によらないことがわかる。

明らかに，曲線  $C$  上で定義された連続関数  $f(x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in C$ ) に対して，積分

$$\int_I f(\Phi(t)) \cdot \|\mathbf{T}_C(t)\| dt$$

の値が曲線  $C$  の向きを保つパラメータ表示によらずに決まることがわかる。すなわち，

$\frac{du}{dt} > 0$  ( $t \in I$ ) ならば

$$\int_I f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{T}_C(t)\| dt = \int_J f(\tilde{x}(u), \tilde{y}(u), \tilde{z}(u)) \|\tilde{\mathbf{T}}_C(u)\| du$$

が成り立つのである。この積分を線積分と呼び  $\int_C f(x, y, z) ds$  と表す， $ds = \|\mathbf{T}_C(t)\| dt$  は

線素である。さらに， $I$  から  $J$  への  $C^1$  級同型 (全単射) 写像  $\varphi: I \rightarrow J$  が向きを保たないと

ときには，すなわち， $\frac{du}{dt} < 0$  ( $t \in I$ ) ならば

$$\int_I f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{T}_C(t)\| dt = - \int_J f(\tilde{x}(u), \tilde{y}(u), \tilde{z}(u)) \|\tilde{\mathbf{T}}_C(u)\| du$$

**定義**      線積分  $\int_C f(x, y, z) ds = \int_C f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \|\mathbf{T}_C(t)\| dt$  .

線積分 (の値) は曲線の向きを保つパラメータ表示によらない。

例えば，曲線  $C$  上のベクトル場  $\mathbf{X}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$  ( $(x, y, z) \in C$ )

に注目するときには， $ds = \|\mathbf{T}_C\| dt$  であるから

$$\int_C \mathbf{X} \cdot \mathbf{t}_C ds = \int_a^b \mathbf{X} \cdot \mathbf{T}_C dt = \int_a^b \{f(x, y, z)x' + g(x, y, z)y' + h(x, y, z)z'\} dt$$

は接線方向成分の大きさの積分と考えられる。

**例**       $\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界閉領域とし，その境界  $\partial\Omega$  は有限個の区分的に滑らかな曲線からなる閉曲線であるとする。  $\mathbf{A}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  を  $\Omega$  上の  $C^1$  級ベクトル場とする。曲線  $\partial\Omega$  の正の (領域  $\Omega$  の内部を左に見て進む) 向きのパラメータ表示が  $x = x(t), y = y(t)$  ( $a \leq t \leq b$ )

であるとき，曲線  $\partial\Omega$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, (y'(t), -x'(t))$  を考えると

$$\begin{aligned} \text{線積分 } \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_{\partial\Omega} \left\{ f(x, y) \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - g(x, y) \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right\} ds \\ &= \int_a^b \left\{ f(x, y) \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - g(x, y) \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right\} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \\ &= \int_a^b \{f(x, y)y' - g(x, y)x'\} dt \end{aligned}$$

が成り立つ，ただし境界  $\partial\Omega$  に沿っての線積分は正の (領域  $\Omega$  の内部を左に見て進む) 向きに積分する。

D. 一次微分形式の線積分 曲線上沿っての線積分を一次微分形式に関連して表現することは、曲面上での線積分と面積分の関係を示す Stokes の定理を理解するためにも重要である。

空間  $\mathbb{R}^3$  のある領域で定義された関数  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$ ,  $h(x, y, z)$  とこの領域内にある滑らかな曲線

$$C : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

を考える。ここで曲線が滑らかとは、関数  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  が  $C^1$  級であるという意味である。定積分

$$\int_a^b \left\{ f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + g(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + h(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right\} dt$$

を曲線  $C$  に沿っての一次微分形式  $\omega = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$  の線積分といい

$$\int_C \omega \quad \text{または} \quad \int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$$

と表す。曲線  $C$  に沿っての一次微分形式  $\omega$  の線積分について、曲線  $C$  上の (一次微分形式  $\omega$  に付随する) ベクトル場

$$\mathbf{X}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) \quad ((x, y, z) \in C)$$

に注目するときには、

$$\int_C \mathbf{X} \cdot \mathbf{t}_C ds = \int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz = \int_C \omega$$

が成り立っている。

(一次微分形式の) 線積分の性質：

一次微分形式  $\omega = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$  を考える。

(1) 曲線  $C$  の向きを変えないパラメータの変換

$$t = \varphi(\tau) \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta) \quad (\varphi'(\tau) > 0 \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta), \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta))$$

を行っても線積分の値は変わらない。すなわち

$$C : \tilde{x}(\tau) = x(\varphi(\tau)), \quad \tilde{y}(\tau) = y(\varphi(\tau)), \quad \tilde{z}(\tau) = z(\varphi(\tau)) \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta)$$

に対して、

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \\ &= \int_a^b \left\{ f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + g(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + h(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right\} dt \\ &= \int_\alpha^\beta \left\{ f(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{z}(\tau)) \tilde{x}'(\tau) + g(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{z}(\tau)) \tilde{y}'(\tau) + h(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{z}(\tau)) \tilde{z}'(\tau) \right\} d\tau \end{aligned}$$

(2) 曲線  $C$  の向きを変えるパラメータの変換

$$t = \varphi(\tau) \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta) \quad (\varphi'(\tau) < 0 \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta), \quad b = \varphi(\alpha), \quad a = \varphi(\beta))$$

を行うと線積分の値は  $-1$  倍される．すなわち，曲線  $C$  の向きを変えたものを  $-C$  と表すと

$$-C : \quad \tilde{x}(\tau) = x(\varphi(\tau)), \quad \tilde{y}(\tau) = y(\varphi(\tau)), \quad \tilde{z}(\tau) = z(\varphi(\tau)) \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta)$$

に対して，
$$-\int_C \omega = \int_{-C} \omega.$$

(3) 曲線  $C$  が二つの曲線 
$$\begin{cases} C_1 : x = x_1(t), y = y_1(t), z = z_1(t) & (a \leq t \leq c) \\ C_2 : x = x_2(t), y = y_2(t), z = z_2(t) & (c \leq t \leq b) \end{cases}$$

に (互いに重ならないように) 分割されるとき 
$$\int_C \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega.$$

(4) 一次微分形式についての線形性

二つの一次微分形式 
$$\begin{cases} \omega_1 = f_1(x, y, z) dx + g_1(x, y, z) dy + h_1(x, y, z) dz \\ \omega_2 = f_2(x, y, z) dx + g_2(x, y, z) dy + h_2(x, y, z) dz \end{cases}$$

に対して

$$\begin{aligned} \omega_1 + \alpha \omega_2 &= \{f_1(x, y, z) + \alpha f_2(x, y, z)\} dx + \{g_1(x, y, z) + \alpha g_2(x, y, z)\} dy \\ &\quad + \{h_1(x, y, z) + \alpha h_2(x, y, z)\} dz \end{aligned}$$

と定義するとき

$$\int_C \{\omega_1 + \alpha \omega_2\} = \int_C \omega_1 + \alpha \int_C \omega_2 \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

線積分  $\int_C \omega$  は空間  $\mathbf{R}^3$  上の座標系の取り方によらない (すなわち  $C^1$  級座標変換に対して不変である) .

**問** 滑らかな平面曲線  $C : x = x(t), y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$  は自然に空間曲線  $\tilde{C} : x = x(t), y = y(t), z = 0 \quad (a \leq t \leq b)$  と見なせる．また，平面上で定義された二変数関数  $f(x, y)$  も自然に空間で定義された連続関数  $\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y)$  と考えることができるので，平面上の二変数連続関数によって定義される一次微分形式  $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$  が与えられた場合に，空間上の一次微分形式  $\tilde{\omega} = \tilde{f}(x, y, z) dx + \tilde{g}(x, y, z) dy + 0 dz$  が自然に考えられる．

このことから，平面曲線  $C$  と平面上の二変数連続関数によって定義される一次微分形式  $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$  が与えられた場合に，平面  $\mathbf{R}^2$  上の線積分をつぎの関係式

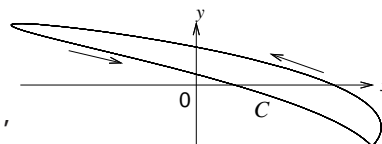
$$\int_C \omega = \int_{\tilde{C}} \tilde{\omega}$$

を通して定義することができる．

このとき，平面  $\mathbf{R}^2$  上の線積分  $\int_C \omega$  が座標系の取り方によらないことを示せ．

## 6.4 Green の定理

面積分の計算を通して発散 (量) 定理が得られたが, 平面上で滑らかな曲線で囲まれた領域に関する類似の結果を説明するにあたっては, 平面上での曲線に沿っての線積分の考えを使う.



平面  $\mathbf{R}^2$  のある領域で定義された関数  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  とこの領域内にある滑らかな曲線

$$C : x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

を考える. ここで曲線が滑らかとは, 関数  $x(t), y(t)$  が  $C^1$  級であるという意味である. 曲線  $C$  に添っての一次微分形式  $f(x, y) dx + g(x, y) dy$  の線積分は

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_a^b \{f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)\} dt$$

である.

6.3 線積分 D. (一次微分形式の) 線積分の性質 から, つぎの性質は明らかに成り立つ:

(1) 曲線  $C$  の向きを変えないパラメータの変換を行っても

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

線積分の値は変わらない.

(2) 曲線  $C$  の向きを変えるパラメータの変換を行うと線積分の値は  $-1$  倍される. すなわち, 曲線  $C$  の向きを変えたものを  $-C$  と表すと

$$-\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_{-C} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

(3) 曲線  $C$  が二つの曲線

$$C_1 : x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq c), \quad C_2 : x = x(t), \quad y = y(t) \quad (c \leq t \leq b)$$

に (互いに重ならないように) 分割されるとき

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_{C_1} f(x, y) dx + g(x, y) dy + \int_{C_2} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

(4) 一次微分形式についての線形性

二つの一次微分形式  $f_1(x, y) dx + g_1(x, y) dy$  と  $f_2(x, y) dx + g_2(x, y) dy$  について

$$\begin{aligned} & \int_C f_1(x, y) dx + g_1(x, y) dy + \alpha \int_C f_2(x, y) dx + g_2(x, y) dy \\ &= \int_C \{f_1(x, y) + \alpha f_2(x, y)\} dx + \{g_1(x, y) + \alpha g_2(x, y)\} dy \quad (\alpha \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

### C. Green の定理

**Green の定理**  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^2$  の有界閉領域とし, その境界  $\partial\Omega$  は有限個の区分的に滑らかな曲線からなる閉曲線であるとする. 関数  $f(x, y), g(x, y)$  が  $\Omega$  で  $C^1$  級るとき,

$$\int_{\partial\Omega} -g(x, y) dx + f(x, y) dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy$$

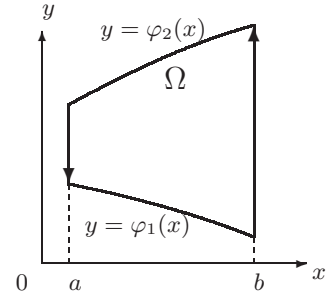
が成り立つ, ただし 境界  $\partial\Omega$  に沿っての線積分は正の (領域  $\Omega$  の内部を左に見て進む) 向きに積分する.

**証明** 二つの連続関数  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) によって定義される領域

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}$$

上の連続関数  $f(x, y)$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} -g(x, y) dx &= \int_a^b -g(x, \varphi_1(x)) dx + \int_a^b g(x, \varphi_2(x)) dx \\ &= \int_a^b g(x, \varphi_2(x)) - g(x, \varphi_1(x)) dx \\ &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial g}{\partial y} dy dx = \iint_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$



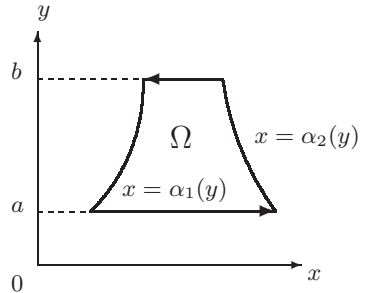
つぎに, 二つの連続関数  $\alpha_1(y) \leq \alpha_2(y)$  ( $a \leq y \leq b$ )

によって定義される領域

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq y \leq b, \alpha_1(y) \leq x \leq \alpha_2(y) \right\}$$

上の連続関数  $f(x, y)$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f(x, y) dy &= -\int_a^b f(\alpha_1(y), y) dy + \int_a^b f(\alpha_2(y), y) dy \\ &= \int_a^b -f(\alpha_1(y), y) + f(\alpha_2(y), y) dy = \int_a^b \int_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy. \end{aligned}$$



故に, 領域  $\Omega$  が縦線領域かつ横線領域であるときには,

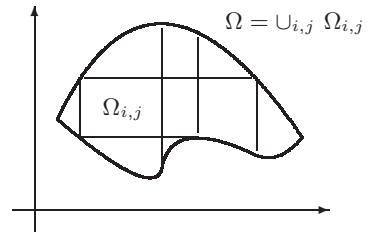
$$\int_{\partial\Omega} -g(x, y) dx + f(x, y) dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy$$

が成り立つ.

Green の定理 における有界領域  $\Omega$  は縦線かつ横線領域

$\Omega_{i,j}$  の和に分割されることに注意する. このとき,

領域  $\Omega$  の内部にある  $\partial\Omega_{i,j}$  の境界上では, 隣りあう領域の境界  $\partial\Omega_{i',j'}$  と向きが反対である





から線積分の値は互いに消しあって  $\partial\Omega$  上の線積分の値が残る .

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} -g(x, y)dx + f(x, y)dy &= \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega_{i,j}} -g(x, y)dx + f(x, y)dy \\ &= \sum_{i,j} \iint_{\Omega_{i,j}} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

が成り立つ , ただし 境界  $\partial\Omega$  に沿っての線積分は正の ( 領域  $\Omega$  の内部を左に見て進む ) 向きに積分する . //

#### D. 発散定理としての Green の定理

Green の定理はつぎのように発散 ( 量 ) 定理と解釈することができることを注意する .

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界閉領域とし , その境界  $\partial\Omega$  は有限個の区分的に滑らかな曲線からなる閉曲線であるとする .  $A(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  を  $\Omega$  上の  $C^1$  級ベクトル場とする . そのとき曲線  $\partial\Omega$  のパラメータ表示を  $x = x(t), y = y(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) とすると , 6.3 [例] により

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial\Omega} -g(x, y)dx + f(x, y)dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy$$

が成り立つ , ただし 境界  $\partial\Omega$  に沿っての線積分は正の ( 領域  $\Omega$  の内部を左に見て進む ) 向きに積分する . これは , 発散定理としての Green の定理

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \int_V \operatorname{div} A dx dy \\ \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad (\text{ベクトル場の発散}) . \end{array} \right.$$

が成り立つことを意味している .

**定理 1**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界領域とし , その境界  $\partial\Omega$  は有限個の区分的に滑らかな曲線からなる閉曲線であるとする . このとき , 発散が恒等的に 1 であるベクトル場として  $\mathbf{X} = (x, 0)$  や  $\mathbf{Y} = (0, y)$  および  $\mathbf{A} = \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right)$  をとると

$$\Omega \text{ の面積} = \iint_{\Omega} 1 dx dy = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial\Omega} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial\Omega} x dy \\ \int_{\partial\Omega} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial\Omega} -y dx \\ \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} -y dx + x dy , \end{array} \right.$$

ただし 境界  $\partial\Omega$  に沿っての線積分は正の ( 領域  $\Omega$  の内部を左に見て進む ) 向きに積分する .

**問**  $-\pi < \alpha < \beta \leq \pi$  とする . ( 極座標表示 )  $C^1$  級曲線  $C : r = f(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) が与え

られたとき，領域  $D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$  の面積は

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

で与えられることを確かめよ．

#### D. 一次微分形式と領域の単連結性

平面  $\mathbf{R}^2$  の領域  $D$  の凸性：領域  $D$  が凸領域であるとは， $D$  の任意の二点を結ぶ線分が常に領域  $D$  内にあることであると定義される．例えば，開円板は凸領域である．

平面内の凸領域は単純閉曲線上の線積分に関して，好都合な条件‘単連結性’を備えている．

さて，平面  $\mathbf{R}^2$  における曲線  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  が単純閉曲線であるとは，曲線  $\gamma$  が連続で性質

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad (a \leq t_1 < t_2 < b) \quad \text{かつ} \quad \gamma(a) = \gamma(b)$$

が成り立つことである．そして  $\mathbf{R}^2$  の領域  $\Omega$  が単連結であるとは， $\Omega$  内の任意の単純閉曲線に囲まれた領域は  $\Omega$  に含まれるという性質を持つことである．

凸領域  $D$  が単連結であるという事実はつぎのように考えてわかる： $D$  内の任意の単純閉曲線  $\gamma$  に囲まれた点  $P$  を考える．点  $P$  を通る直線  $l$  は必ず点  $P$  を挟む（直線  $l$  上の）二点  $Q$  および  $R$  で単純閉曲線  $\gamma$  と交わる．二点  $Q, R \in \gamma \subset D$  であるから，領域  $D$  の凸性により点  $P$  は領域  $D$  内の点でなければならない．

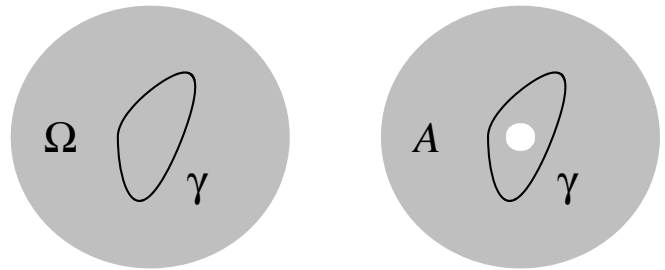
例として，開円板

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 100\}$$

は単連結であるが，穴の開いた円環

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 100\}$$

は単連結ではない．



$\mathbf{R}^2$  の領域  $\Omega$  上の一次微分形式

$$\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy \quad (p(x, y), \quad q(x, y) \text{ は } \Omega \text{ で連続})$$

が領域  $\Omega$  上の  $C^1$  級関数  $f(x, y)$  の微分形式

$$df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

と一致する（すなわち， $\omega = df$  である）とき，一次微分形式  $\omega$  は完全 (exact) であると言われる．

**定理 2** 領域  $\Omega$  上の一次微分形式

$$\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy \quad (p(x, y), q(x, y) \text{ は } \Omega \text{ で } C^1 \text{ 級})$$

が領域  $\Omega$  で完全 (exact), すなわち, 領域  $\Omega$  上の  $C^1$  級関数  $f(x, y)$  の微分形式であるとき,

$$\Omega \text{ 内の滑らかな曲線 } C : x = x(t), y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

に添っての線積分  $\int_C \omega$  の値は曲線  $C$  の端点だけで決定される:

$$\int_C \omega = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)).$$

**証明**  $\omega = df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$  となっているから,

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_a^b \{f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)\} dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) dt \\ &= [f(x(t), y(t))]_a^b = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) = 0. \quad // \end{aligned}$$

**系 3** 領域  $\Omega$  上の一次微分形式  $\omega$  が領域  $\Omega$  で完全 (exact) のとき,  $\Omega$  内の滑らかな閉曲線

$C$  に添っての線積分  $\int_C \omega = 0$ .

**定理 4**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の領域で単連結なものとする. 領域  $\Omega$  上の一次微分形式

$$\omega = p(x, y)dx + q(x, y)dy \quad (p(x, y), q(x, y) \text{ は } \Omega \text{ で } C^1 \text{ 級})$$

が領域  $\Omega$  で完全 (exact) であるためには,  $\Omega$  で

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$$

が成り立つことが必要充分条件である.

**証明** (必要性)  $\omega = df$  となるとき,

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

が成り立つから,  $p(x, y) = f_x(x, y)$ ,  $q(x, y) = f_y(x, y)$  となる. このとき 偏導関数の連続性から

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$$

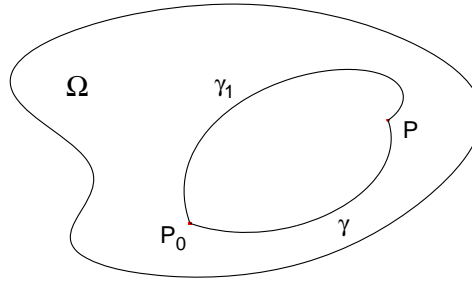
が成り立つ.

(充分性)  $\Omega$  で条件  $\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$  が成り立っているとす.

領域  $\Omega$  の一点  $P_0 = (x_0, y_0)$  を固定し,  $\Omega$  の任意の点  $P = (x, y)$  と結ぶ滑らかな曲線

$$\begin{cases} \gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega \\ \gamma(0) = P_0, \quad \gamma(1) = P \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} \gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \Omega \\ \gamma_1(0) = P_0, \quad \gamma_1(1) = P \end{cases}$$

を考えると,



Green の定理 から

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} p(x, y)dx + q(x, y)dy - \int_{\gamma_1} p(x, y)dx + q(x, y)dy &= \iint_{\gamma - \gamma_1} p(x, y)dx + q(x, y)dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = 0, \end{aligned}$$

ただし 曲線  $\gamma - \gamma_1$  は曲線  $\gamma$  に引き続いて曲線  $\gamma_1$  をたどる曲線

$$(\gamma - \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_1(2-t) & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

を表し,  $D$  はこの閉曲線  $\gamma - \gamma_1$  で囲まれた領域である.

これは 領域  $\Omega$  の一点  $P_0$  と  $\Omega$  の任意の点  $P$  と結ぶ滑らかな曲線  $\gamma$  に添ったの線積分

$$\int_{\gamma} p(x, y)dx + q(x, y)dy$$

の値が曲線  $\gamma$  の取り方に依存せず, 領域  $\Omega$  の点  $P_0$  と  $P$  だけで決まることを示している. こ

のことから  $\Omega$  の任意の点  $P_0$  を固定して,  $\Omega$  上の関数  $f(x, y)$  を

$$\begin{cases} f(x, y) = \int_{\gamma} p(x, y) dx + q(x, y) dy \\ \gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega \text{ は } P_0 = (x_0, y_0) \text{ と } P = (x, y) \text{ を結ぶ滑らかな曲線} \end{cases}$$

と定義できる.

このとき  $p(x, y) = f_x(x, y)$ ,  $q(x, y) = f_y(x, y)$  が成り立つ. これを示そう.

領域  $\Omega$  の点  $P = (x, y)$  の近くで,  $|h|$  が十分小さいとき

線分  $l_h : [0, 1] \longrightarrow l_h(t) = (x + th, y) \in \Omega$  を考える. 領域  $\Omega$  の点  $P_0 = (x_0, y_0)$  と  $P = (x, y)$

を結ぶ滑らかな曲線  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega$  を考えると,

$$f(x, y) = \int_{\gamma} p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

$$f(x+h, y) = \int_{\gamma+l_h} p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

$$(\gamma+l_h)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ l_h(t-1) & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

故に

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_{\gamma+l_h} p(x, y) dx + q(x, y) dy - \int_{\gamma} p(x, y) dx + q(x, y) dy \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_{l_h} p(x, y) dx + q(x, y) dy \right\} = \frac{1}{h} \int_0^1 p(x+th, y) h dt \\ &= \int_0^1 p(x+th, y) dt = p(x, y) + \int_0^1 \{p(x+th, y) - p(x, y)\} dt \\ &\longrightarrow p(x, y) \quad (h \longrightarrow 0). \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^1 \{p(x+th, y) - p(x, y)\} dt \longrightarrow 0 \quad (h \longrightarrow 0)$$

を示す必要があるが、読者に残して置こう。こうして  $p(x, y) = f_x(x, y)$  が示された。同様に

$q(x, y) = f_y(x, y)$  も示される。 //

注意. 定理 4 で  $\omega = df$  となる  $f(x, y)$  の存在を示すためには、 $C^2$  級関数

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx \quad \text{と} \quad G(x, y) = \int \left( q(x, y) - \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) dy$$

が存在すればよい。というのは、そのとき

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = p(x, y), \quad \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = q(x, y) - \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

が成り立ち  $f(x, y) = F(x, y) + G(x, y)$  に対して、

$$\begin{aligned} df(x, y) &= \left\{ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \int \left( q_x(x, y) - \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \right) dy \right\} dx + \left\{ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + q(x, y) - \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right\} dy \\ &= \left\{ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \int \left( q_x(x, y) - p_y(x, y) \right) dy \right\} dx + q(x, y) dy \\ &= p(x, y) dx + q(x, y) dy \end{aligned}$$

となるだろうからである。

注意. 定理 4 の状況の下で存在する

$$\begin{cases} f_x(x, y) = p(x, y) \\ f_y(x, y) = q(x, y) \end{cases}$$

を満たす関数  $f(x, y)$  ( $(x, y) \in \Omega$ ) によって定義される曲線

$$f(x, y) = c \quad (\exists c \in \mathbf{R})$$

は微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

の解曲線を与えている．というのは，そのとき

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$$

が成り立っているから．

#### 問題 6.4

①  $\mathbf{R}^2$  上の一次微分形式  $\omega = (x^3 + xy^2 + y)dx + (x^2y + x)dy$  が完全 (exact) であるかどうか調べ，完全な場合は  $\omega = df$  となる関数  $f(x, y)$  を求めよ．

②  $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$  上の関数

$$p(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

によって定義される一次微分形式

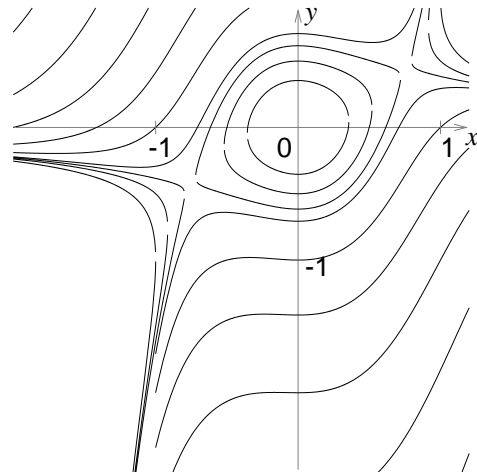
$$\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

が  $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$  上完全 (exact) でないことを示せ．

③ つぎの微分方程式を解け:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3x^2y}{x^3 - y}$$

右図は解曲線の族



### 6.5 Green の恒等式

ここでは，発散 (量) 定理 から Green の恒等式 (Green の公式) を導く．

空間  $\mathbf{R}^3$  の領域  $V$  で定義された  $C^1$  級関数  $f(x, y, z)$  を考えると，付随して  $f(x, y, z)$  の勾配とよばれる  $V$  上のベクトル場

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right)$$

が定義される．勾配  $\text{grad } f$  は  $\nabla f$  とも書かれる．関数  $f(x, y, z)$  が  $C^2$  級のときには

$$\text{div}(\text{grad } f)(x, y, z) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} = \Delta f(x, y, z)$$

が成り立つ．さらに  $g(x, y, z)$  も  $C^1$  級関数であるとするとき，関数の積の微分法則から

$$\begin{aligned} \text{div}(g \text{ grad } f) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( g \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( g \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( g \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + g \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \\ &= (\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g) + g \Delta f \end{aligned}$$

となる．関数  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  がともに  $C^2$  級のときには

$$\begin{cases} \text{div}(g \text{ grad } f) &= (\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g) + g \Delta f \\ \text{div}(g \text{ grad } f - f \text{ grad } g) &= g \Delta f - f \Delta g \end{cases}$$

が成り立つことがわかる．

空間  $\mathbf{R}^3$  にある (有限個の) 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  を考える．領域  $V$  の境界  $S$  を含めた  $\bar{V}$  で定義された  $C^2$  級関数  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  が与えられたとき，曲面  $S$  の外向きの単位法線ベクトル場  $\mathbf{n}$  に対して

$$\text{(Green)} \quad \begin{cases} \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS &= \int_V [f \Delta g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] dx dy dz \\ \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} dS &= \int_V [f \Delta g - g \Delta f] dx dy dz, \end{cases}$$

ここで  $\frac{\partial f}{\partial n} = (\text{grad } f) \cdot \mathbf{n}$  や  $\frac{\partial g}{\partial n} = (\text{grad } g) \cdot \mathbf{n}$  は境界  $S$  の法線方向の微分係数といわれる．

注． $\frac{\partial f}{\partial n}(x_0, y_0, z_0)$  は点  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  を通る直線内に制限して関数  $f(x, y, z)$  を考えた場合における，つぎの極限值である：

$$\frac{\partial f}{\partial n}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + h\mathbf{n}) - f(P_0)}{h}.$$

**証明** 曲面  $S$  の外向きの単位法線ベクトル場  $\mathbf{n}$  に対して，発散定理から

$$\begin{aligned} \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS &= \int_S (f \text{ grad } g) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_V \text{div}(f \text{ grad } g) dx dy dz = \int_S (\text{grad } g) \cdot (\text{grad } f) + f \Delta g dx dy dz \\ &= \int_V [(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \Delta g] dx dy dz. \end{aligned}$$

**系** (有限個の) 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $\bar{V}$  上の  $C^2$  級関数  $f(x, y, z)$  に対して

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_V \Delta f dx dy dz$$

が成り立つ．

**例**  $V$  が原点から半径  $R(> 0)$  の球  $\bar{B} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$  の場合を考える.  $\bar{B}$  の境界  $S$  は原点から半径  $R(> 0)$  の球面である.

$S$  のパラメータ表示として 極座標表示

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta \quad (0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

を考えると,  $(x, y, z) \in S$  での外向きの法線ベクトル  $N$  は

$$N = R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = R \sin \theta (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

と表わされる(参照 6.1 面積分 D. **例**) ので,  $\bar{B}$  上の  $C^2$  級関数  $f(x, y, z)$  に対して

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{grad } f \cdot N \, d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right\} R \sin \theta \, d\theta d\varphi \\ &= \int_V \Delta f \, dx dy dz \end{aligned}$$

が成り立つ.

### 問題 6.5

**1**  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  ( $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ) とする.

(1) 関数  $r$ ,  $\log r$  と  $\frac{1}{r}$  について, それぞれの  $\text{grad}$  および  $\text{div grad}$  を求めよ.

(2)  $\Phi(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{4\pi R^3}{3r} & (R \leq r) \\ -2\pi R^2 + \frac{2\pi r^2}{3} & (0 \leq r < R) \end{cases}$  の勾配  $\text{grad } \Phi$  を求めよ (定数  $R > 0$ ).

## 6.6 曲面上での Stokes の定理

6.4 Green の定理 では, 平面内の有界閉領域とその境界である単純閉曲線上で定義された一次微分形式に付随するベクトル場を使って, 平面上のベクトル場の発散 (量) 定理として Green の定理を示した. ここでは, 空間  $\mathbf{R}^3$  のある領域で定義されたベクトル場について, (この領域内の) 曲面  $S$  上の単純閉曲線  $C$  に沿う線積分と  $C$  を境界とする ( $S$  内の) 閉領域 ( $C$ ) での面積分との関係を与える Stokes の定理を証明する.

**D. Stokes の定理** (Green の定理の一般化)

空間  $\mathbf{R}^3$  にある曲面  $S$  のパラメータ表示を考える:

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \quad ((u, v) \in D),$$

ただし  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) は平面領域  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  で定義された  $C^1$  級関数.



曲面  $S$  上の点

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

での法線ベクトル

$$\mathbf{N} = N(u, v) = \varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v) = \left( \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right) \quad \text{の長さ}$$

$$\|N(u, v)\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u(u, v) & z_v(u, v) \\ x_u(u, v) & x_v(u, v) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix}^2}$$

を使って, 曲面  $S$  上の任意の連続関数  $p(x, y, z)$  に対して面積分

$$\int_S p(x, y, z) dS = \iint_D p(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|N(u, v)\| du dv$$

が計算される.

さて, 曲面  $S$  上の滑らかなベクトル場

$$\mathbf{X}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) \quad ((x, y, z) \in S)$$

(関数  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$ ,  $h(x, y, z)$  は曲面  $S$  の近傍で定義されて  $C^1$  級) と曲面  $S$  上にある滑らかな単純閉曲線  $C$  を考える. 閉曲線  $C$  のパラメータ表示は曲面  $S$  のパラメータ表示と領域  $D$  の滑らかな単純閉曲線  $\gamma$  のパラメータ表示から

$$\begin{cases} C : x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t)), z = z(u(t), v(t)) \\ \gamma : [a, b] \rightarrow (u(t), v(t)) \in D \quad \text{は } C^1 \text{ 級} \\ (u(a), v(a)) = (u(b), v(b)) \in D \end{cases}$$

によって得られているとし, 領域  $D$  内で単純閉曲線  $\gamma$  に囲まれた内部領域を  $(\gamma)$  と現すとき, 単純閉曲線  $\gamma$  の向きは正 (領域  $(\gamma)$  の内部を左に見て進む) とする. そのとき, 線積分

$$\int_C \mathbf{X} \cdot \mathbf{t}_C ds = \int_C \omega = \int_C f(x, y, z) dx + \int_C g(x, y, z) dy + \int_C h(x, y, z) dz$$

が成り立つ, ここで  $\omega = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$  はベクトル場  $\mathbf{X}$  に付随する一次微分形式である. さて, 線積分の各項はつぎのように計算される:

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) dx &= \int_a^b f(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \cdot \frac{d}{dt} x(u(t), v(t)) dt \\ &= \int_a^b f(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \\ &\quad \times (x_u(u(t), v(t))u'(t) + x_v(u(t), v(t))v'(t)) dt \\ &= \int_\gamma f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) x_u(u, v) du \\ &\quad + f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) x_v(u, v) dv \\ &= \int_{(\gamma)} \left\{ -\frac{\partial}{\partial v} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) x_u(u, v) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) x_v(u, v) \right\} du dv \quad (\text{Green の定理}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(\gamma)} \left\{ -(f_x x_v x_u + f_y y_v x_u + f_z z_v x_u) - f x_{uv} \right\} dudv \\
&\quad + \int_{(\gamma)} \left\{ (f_x x_u x_v + f_y y_u x_v + f_z z_u x_v) + f x_{vu} \right\} dudv \\
&= \int_{(\gamma)} \left\{ f_y (-y_v x_u + y_u x_v) + f_z (z_u x_v - z_v x_u) \right\} dudv .
\end{aligned}$$

同様の計算から

$$\begin{aligned}
\int_C g(x, y, z) dy &= \int_{(\gamma)} \left\{ g_z (-z_v y_u + z_u y_v) + g_x (x_u y_v - x_v y_u) \right\} dudv , \\
\int_C h(x, y, z) dz &= \int_{(\gamma)} \left\{ h_x (-x_v z_u + x_u z_v) + h_y (y_u z_v - y_v z_u) \right\} dudv .
\end{aligned}$$

こうして

$$\begin{aligned}
\int_C \omega &= \int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \\
&= \int_{(\gamma)} \left\{ f_y (-y_v x_u + y_u x_v) + f_z (z_u x_v - z_v x_u) \right\} dudv \\
&\quad + \int_{(\gamma)} \left\{ g_z (-z_v y_u + z_u y_v) + g_x (x_u y_v - x_v y_u) \right\} dudv \\
&\quad + \int_{(\gamma)} \left\{ h_x (-x_v z_u + x_u z_v) + h_y (y_u z_v - y_v z_u) \right\} dudv \\
&= \int_{(\gamma)} \left\{ (h_y - g_z)(y_u z_v - y_v z_u) + (f_z - h_x)(z_u x_v - z_v x_u) + (g_x - f_y)(x_u y_v - x_v y_u) \right\} dudv \\
&= \int_{(\gamma)} \left\{ (h_y - g_z) \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + (f_z - h_x) \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} + (g_x - f_y) \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right\} dudv \quad \dots\dots (*)
\end{aligned}$$

今、曲面  $S$  上の滑らかなベクトル場  $X$  の回転

$$\text{rot } X = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y)$$

(ベクトル場  $X$  の回転  $\text{rot } X$  は  $\text{curl } X$  と書き表されることも多い。) に着目すると、この

重積分 (\*) は、ベクトル場  $\text{rot } X$  の曲面  $S$  内の領域  $(C)$  上での法線面積分  $\int_{(C)} \text{rot } X \cdot \mathbf{n} dS$

に等しいから、

$$\int_C X \cdot \mathbf{t}_C ds = \int_C \omega = \int_{(C)} \text{rot } X \cdot \mathbf{n} dS$$

を得る。

こうして、滑らかな曲面  $S$  の近傍で定義された  $C^1$  級ベクトル場  $X$  に関して、曲面  $S$  上の単純閉曲線  $C$  に沿ってのベクトル場  $X$  の線積分と  $C$  で囲まれた  $S$  内の領域  $(C)$  でのベクトル場  $X$  の法線面積分を結びつける量的関係が得られる：

Stokes の定理 空間  $\mathbf{R}^3$  にある滑らかな曲面  $S$  上の滑らかな (正の向き) の単純閉曲線  $C$  と

曲面  $S$  を含む領域で定義されている  $C^1$  級ベクトル場  $X$  が与えられたとき,

$$\int_C \mathbf{X} \cdot \mathbf{t}_C ds = \int_{(C)} \text{rot } \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS .$$

ここで  $(C)$  は単純閉曲線  $C$  で囲まれた曲面  $S$  上の領域である .

この Stokes の定理はつぎのように表現することもできる:  
曲面  $S$  の近傍で定義されている滑らかな一次微分形式

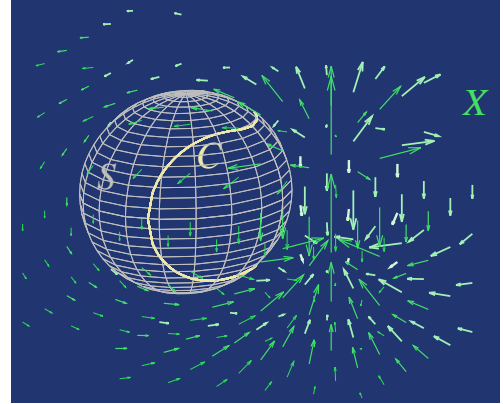
$$\omega = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \quad ((x, y, z) \in S)$$

が与えられたとき, 一次微分形式  $\omega$  に付随するベクトル場

$$\mathbf{X}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) \quad ((x, y, z) \in S)$$

を考えると

$$\int_C \mathbf{X} \cdot \mathbf{t}_C ds = \int_C \omega = \int_{(C)} \text{rot } \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS .$$



**例 1** 曲面  $S$  上のベクトル場 (例えば, 曲面  $S$  上を流れるある流体の速度ベクトル場)  $V$  を想像してみる . この曲面  $S$  内に閉曲線  $C$  と  $C$  で囲まれた内部  $(C)$  が在る場合には,

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_C ds = \int_{(C)} \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

が成り立っている . 曲線  $C$  上でベクトル  $V$  の接線成分を積分した量が, ベクトル  $\text{rot } V$  の (曲面  $S$  に対する) 法線成分を内部  $(C)$  で積分した量となっているのである . ベクトル場  $V$  から得られるベクトル量  $\text{rot } V$  (の法線成分) は, このベクトル場  $V$  がある流体の速度ベクトル場である場合には渦度 (Vorticity) と呼ばれている .

今, 原点を中心とする半径  $R > 0$  の球面  $S^2$  でのベクトル場  $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$  と  $z_0$  を固定して得られる球面上の閉曲線  $C : x^2 + y^2 + z_0^2 = R^2$  に対し, Stokes の定理を確かめよう .

空間極座標系で  $z_0 = R \cos \theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ) とすると, 曲線  $C$  のパラメータ表示は

$C : x = R \sin \theta_0 \cos \varphi, y = R \sin \theta_0 \sin \varphi, z = z_0$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) である .

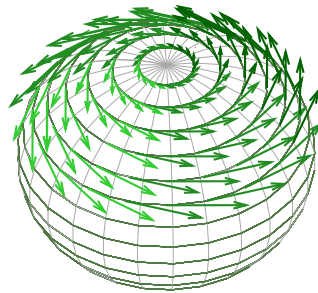
$$\text{rot } \mathbf{V} = \left( \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial (-y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) = (0, 0, 2)$$

6.1 D **例** で述べたように, 球面  $S^2$  の法線ベクトル  $N$  は

$$\mathbf{N}(\theta, \phi) = R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

であるから,

$$\int_{(C)} \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} 2R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \sin^2 \theta_0 .$$



曲線  $C$  の接線ベクトル  $T$  は

$$T(\phi) = R \sin \theta_0 (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

であるから,

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_c ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{V} \cdot \mathbf{T} d\phi = \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \theta_0 d\phi = 2\pi R^2 \sin^2 \theta_0.$$

**例 2** 空間  $\mathbf{R}^3$  内の (有限個の) 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  内の点  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$  における電荷の密度分布  $\rho(x', y', z')$  とする. 領域  $V$  内の電荷から, 領域  $V$  外の任意の点  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  にある単位電荷に働く力  $\mathbf{E}(x, y, z)$  は, クーロン (Coulomb) の法則および力の和はベクトルの和として計算されることから (領域  $V$  内の電荷  $\rho(\mathbf{x}')$  から決まる静電場として)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} dx' dy' dz'$$

を満たしている. この静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  の回転  $\text{rot } \mathbf{E}$  を計算しよう. 微分と積分の順序変更を行うと

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') \text{rot} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} dx' dy' dz' = 0$$

何故ならば,  $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} = -\text{grad} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}$  かつ  $\text{rot grad} \equiv 0$ .

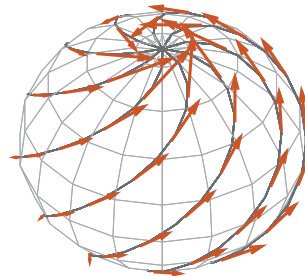
### 問題 6.6

- 1 空間  $\mathbf{R}^3$  の領域  $D$  で定義された  $C^2$  級関数  $f(x, y, z)$  の一次微分形式  $df$  に付随するベクトル場  $\text{grad } f = (f_x, f_y, f_z)$  に対して,  $\text{rot grad } f = 0$  を示せ (ベクトル場  $\text{grad } f$  はスカラー場  $f$  の勾配ともいわれる.)
- 2 空間  $\mathbf{R}^3$  の領域  $V$  で定義された  $C^2$  級ベクトル場  $\mathbf{A}$  に対して,  $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$  を示せ.
- 3 定ベクトル  $\boldsymbol{\omega} = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ , 位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  によって, 空間  $\mathbf{R}^3$  上のベクトル場  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  を定義する.  $\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$  を示せ.
- 4 先の **例 1** の状況で,  $y_0$  を固定して得られる球面上の閉曲線  $C : x^2 + y_0^2 + z^2 = R^2$  に対して,  $\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_c ds$  と  $\int_{(C)} \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$  を計算せよ.
- 5 先の **例 1** の状況で, 球面  $S^2$  内のベクトル場  $\mathbf{V}(x, y, z) = \left( \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\sqrt{x^2 + y^2} \right)$  に対してストークスの定理を確かめよ.

6] 半径  $R(> 0)$  の球面  $S^2$  内のベクトル場

$$\mathbf{V}(x, y, z) = -R \left( \frac{xz}{x^2 + y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{yz}{x^2 + y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$

に対して,  $\text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  を計算せよ.



## 6.7 ポテンシャルとベクトルポテンシャル

### D. ベクトル場の決定

**定理 1** 空間  $\mathbf{R}^3$  の凸領域  $D$  で定義された  $C^1$  級ベクトル場  $\mathbf{A} = (f, g, h)$  が  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$  を満たすとき, 凸領域  $D$  で定義された  $C^2$  級関数  $\varphi$  が存在して  $\text{grad } \varphi = \mathbf{A}$  が成り立つ.

(このような関数  $\varphi$  はベクトル場  $\mathbf{A}$  のポテンシャルと呼ばれている.)

**証明** ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$  に対して,  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$  であるから,

$$(\#) \quad \begin{cases} h_y(x, y, z) - g_z(x, y, z) = 0 \\ f_z(x, y, z) - h_x(x, y, z) = 0 \\ g_x(x, y, z) - f_y(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad ((x, y, z) \in D)$$

が成り立っている. 原点  $(0, 0, 0) \in D$  の場合を考えると,  $D$  上の関数

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^1 \{ x f(tx, ty, tz) + y g(tx, ty, tz) + z h(tx, ty, tz) \} dt$$

を定義できる. このとき,

$$\frac{d}{dt} \{ t f(tx, ty, tz) \} = f(tx, ty, tz) + t x f_x(tx, ty, tz) + t y f_y(tx, ty, tz) + t z f_z(tx, ty, tz)$$

に注意すると,  $(\#)$  より

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y, z) &= \int_0^1 \{ f(tx, ty, tz) + t x f_x(tx, ty, tz) + t y g_x(tx, ty, tz) + t z h_x(tx, ty, tz) \} dt \\ &= \int_0^1 \{ f(tx, ty, tz) + t x f_x(tx, ty, tz) + t y f_y(tx, ty, tz) + t z f_z(tx, ty, tz) \} dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \{ t f(tx, ty, tz) \} dt = f(x, y, z) \end{aligned}$$

が成り立つ. 同様にして,  $\varphi_y(x, y, z) = g(x, y, z)$ ,  $\varphi_z(x, y, z) = h(x, y, z)$  が示される. //

**例 1**  $G$  を重力定数として, 空間  $\mathbf{R}^3$  の原点における質量  $\rho$  から決まる関数

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x, y, z) = \frac{G\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{G}{r(\mathbf{x})}$$

を考えると, 問題 6.5 [1] (1) から  $\text{grad } \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -G\rho \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{F}$  が成り立っていることがわかる. 関数  $\phi(\mathbf{x})$  は (重力) ポテンシャルと言われている. この場合, 実は

$$\int_{-\infty}^1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(t\mathbf{x}) dt = -G\rho \int_{-\infty}^1 \frac{t(x^2 + y^2 + z^2)}{(t\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} dt = \frac{-G\rho}{r} \int_{-\infty}^1 \frac{1}{t^2} dt = \frac{G\rho}{r} = \phi(\mathbf{x}).$$

**例 2** 空間  $\mathbb{R}^3$  内の (有限個の) 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  内の点  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$  における電荷の密度分布を  $\rho(x', y', z')$  とする. 領域  $V$  内の電荷  $\rho(\mathbf{x}')$  から決まる静電場  $\mathbf{E}$  は

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho(\mathbf{x}') dx' dy' dz' & (\text{Gauss の法則}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} dx' dy' dz' \end{cases}$$

を満たしている. このとき,

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} = -\text{grad} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}$$

であるから

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} dx' dy' dz'$$

に対して積分と微分の順序変更を行うと,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_V \rho(\mathbf{x}') \left( -\text{grad} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) dx' dy' dz' = -\text{grad} \Phi(\mathbf{x})$$

が成り立つのがわかる. すなわち,  $\Phi(\mathbf{x})$  が静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  のポテンシャルである.

Gauss の法則と発散定理に関連して, 静電場  $\mathbf{E}$  の発散  $\text{div } \mathbf{E}$  は電荷 (密度) の分布  $\rho$  を決定する

$$\frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{E} = \rho \quad (\text{いわゆる超関数として!})$$

関数であることが知られている. 特に, 滑らかな曲面  $S'$  で囲まれたどの領域  $V'$  にも発散定理が適用可能で  $\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}') dx' dy' dz' = \int_{V'} \rho(\mathbf{x}') dx' dy' dz'$  が成り立つのである. この  $\text{div } \mathbf{E}$  を書き直して, 静電場のポテンシャル  $\Phi(\mathbf{x})$  がつぎの関係を満たしていることがわかる:

$$(\text{div grad } \Phi) \Delta \Phi = -4\pi \rho \quad (\text{Poisson 方程式}).$$

さて, この静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  のポテンシャル  $\Phi(\mathbf{x})$  に Green の恒等式を適用してみる.

領域  $V$  内の点  $\mathbf{x}$  を中心とする半径  $\epsilon$  の球面を  $S_\epsilon$  をとり, 閉曲面  $S$  と球面  $S_\epsilon$  の間の領域  $V_\epsilon$  で

$$f(\mathbf{x}') = \Phi(\mathbf{x}'), \quad g(\mathbf{x}') = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}$$

と置くと  $f(\mathbf{x}') = \Phi(\mathbf{x}')$  は連続で

$$\begin{cases} \Delta g(\mathbf{x}') = \Delta \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = \text{div grad} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = 0 \\ \Delta f(\mathbf{x}') = \Delta \Phi(\mathbf{x}') = \text{div grad } \Phi(\mathbf{x}') = -\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}') = -4\pi \rho(\mathbf{x}') \end{cases}$$

が成り立っている．したがって

$$\int_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS - \int_{S_\epsilon} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \int_{V_\epsilon} [f \Delta g - g \Delta f] dx dy dz = - \int_{V_\epsilon} g \Delta f dx dy dz ,$$

ここで  $\frac{\partial f}{\partial n} = (\text{grad } f) \cdot \mathbf{n}$  や  $\frac{\partial g}{\partial n} = (\text{grad } g) \cdot \mathbf{n}$  は境界  $S$  の外向きの法線方向の微分係数．さらに，球面  $S_\epsilon$  上では

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial n} = \text{grad } \Phi(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{E}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} \\ \frac{\partial g}{\partial n} = \text{grad } g(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = -\frac{1}{\epsilon^2} \end{cases}$$

となっているから

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\Phi(\mathbf{x}')}{\epsilon^2} dS + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}}{\epsilon} dS = -4\pi \Phi(\mathbf{x}).$$

こうして， $\mathbf{x} \in V$  における静電場  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  のポテンシャル  $\Phi(\mathbf{x})$  に対する積分方程式

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{x}') - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right] dS + \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} dx' dy' dz' = \Phi(\mathbf{x})$$

が得られる．( $\mathbf{x} \notin \bar{V} = V \cup S$  のときには，左辺の積分値は 0 となる!) //

**定理 2** 空間  $\mathbb{R}^3$  の凸領域  $D$  で定義された  $C^1$  級ベクトル場  $\mathbf{B} = (f, g, h)$  が  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  を満たすとき，凸領域  $D$  で定義された  $C^1$  級ベクトル場  $\mathbf{A}$  が存在して  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$  が成り立つ．注意．このようなベクトル場  $\mathbf{A}$  はベクトル場  $\mathbf{B}$  のベクトルポテンシャルと呼ばれている．また，領域  $D$  上の任意の  $C^2$  級関数  $\varphi$  の勾配  $\text{grad } \varphi$  との和  $\text{grad } \varphi + \mathbf{A}$  も  $\mathbf{B}$  のベクトルポテンシャルである．

**説明** ベクトル場を  $\mathbf{B}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$  とし，そのベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A} = (\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z))$  とする．この定理はベクトル場  $\mathbf{B}$  の発散が 0 であるとき，すなわち  $f_x(x, y, z) + g_y(x, y, z) + h_z(x, y, z) = 0$  ( $(x, y, z) \in D$ ) のとき，つぎの偏微分方程式系がベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  によって満たされることを述べている：

$$\begin{cases} \gamma_y(x, y, z) - \beta_z(x, y, z) = f(x, y, z) \\ \alpha_z(x, y, z) - \gamma_x(x, y, z) = g(x, y, z) \\ \beta_x(x, y, z) - \alpha_y(x, y, z) = h(x, y, z) \end{cases} \quad ((x, y, z) \in D)$$

この偏微分方程式系の解の表現の一つは次のようにして与えられる：

原点  $(0, 0, 0) \in D$  の場合を考えると，

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha(x, y, z) = \int_0^1 t \{ z g(tx, ty, tz) - y h(tx, ty, tz) \} dt \\ \beta(x, y, z) = \int_0^1 t \{ x h(tx, ty, tz) - z f(tx, ty, tz) \} dt \\ \gamma(x, y, z) = \int_0^1 t \{ y f(tx, ty, tz) - x g(tx, ty, tz) \} dt. \end{cases}$$

**定理 3** 空間  $\mathbf{R}^3$  にある (有限個の) 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた凸領域  $D$  を考える . 領域  $D$  の境界  $S$  を含めた  $\bar{D}$  で定義された  $C^1$  級ベクトル場  $\mathbf{V}_1(x, y, z), \mathbf{V}_2(x, y, z)$  を考える . これらのベクトル場の回転と発散が  $D$  上で等しく , さらに領域  $D$  の境界  $\partial D = S$  上でこれらのベクトル場の法線成分が一致すれば , これらのベクトル場は  $D$  上で一致する . すなわち ,

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{V}_1 = \operatorname{div} \mathbf{V}_2 \quad (D \text{ で}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{V}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{V}_2 \quad (D \text{ で}) \\ \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (S \text{ で}) \end{array} \right\} \implies \mathbf{V}_1 \equiv \mathbf{V}_2 \quad (D \text{ で}) ,$$

ただし  $\mathbf{n}(x, y, z)$  は曲面  $S$  上の外向きの単位法線ベクトル場である .

**証明** ベクトル場  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$  を考える . 明らかに

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{V}(x, y, z) = \operatorname{div} \mathbf{V}_1(x, y, z) - \operatorname{div} \mathbf{V}_2(x, y, z) = 0 \quad ((x, y, z) \in D) \\ \operatorname{rot} \mathbf{V}(x, y, z) = \operatorname{rot} \mathbf{V}_1(x, y, z) - \operatorname{rot} \mathbf{V}_2(x, y, z) = 0 \quad ((x, y, z) \in D) \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n}(x, y, z) - \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}(x, y, z) = 0 \quad ((x, y, z) \in S). \end{array} \right.$$

凸領域  $D$  上でベクトル場  $\mathbf{V}$  の回転  $\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$  であるから , ベクトル場  $\mathbf{V}$  はある関数  $\varphi(x, y, z)$  の勾配である , すなわち ,  $\mathbf{V} = \operatorname{grad} \varphi$  . このとき ,  $D$  上で  $\operatorname{div} \mathbf{V} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0$  .

ここで ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (\operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0$  であるから , Green の恒等式より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_V \left[ \varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) \right] dx dy dz = \int_D (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) dx dy dz \\ &= \int_D \|\nabla \varphi\|^2 dx dy dz = \int_D \|\operatorname{grad} \varphi\|^2 dx dy dz. \end{aligned}$$

これは  $\mathbf{V} = \operatorname{grad} \varphi = 0$  , すなわち ,  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$  を意味している . //

### 問題 6.7

**1** 点  $(x_0, y_0, z_0)$  を含む  $\mathbf{R}^3$  の直方体領域  $R$  で定義された  $C^1$  級関数  $f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)$  が  $R$  で **定理 1** の条件 (#) を満たすとき , 直方体領域  $R$  で

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^x f(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y g(x_0, t, z) dt + \int_{z_0}^z h(x_0, y_0, t) dt$$

によって関数  $\varphi$  を定義すると

$$\varphi_x(x, y, z) = f(x, y, z), \quad \varphi_y(x, y, z) = g(x, y, z), \quad \varphi_z(x, y, z) = h(x, y, z)$$

が成り立つことを示せ .

**2** 空間  $\mathbf{R}^3$  上のベクトル場  $\mathbf{B} = (z, -2x, y)$  に対するベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を求めよ .

**3** **定理 2** の (\*) が求めているベクトルポテンシャルを与えることを示せ .



4 点  $(x_0, y_0, z_0)$  を含む  $\mathbb{R}^3$  の直方体領域  $R$  で定義された  $C^1$  級関数  $f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)$  が条件  $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y}g(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z}h(x, y, z) = 0 \quad ((x, y, z) \in R)$  を満たすとき,  $R$  上の関数

$$\alpha(x, y, z) = 0, \quad \beta(x, y, z) = \int_{x_0}^x h(t, y, z) dt, \quad \gamma(x, y, z) = \int_{y_0}^y f(x_0, t, z) dt - \int_{x_0}^x g(t, y, z) dt$$

は偏微分方程式系

$$\frac{\partial}{\partial y}\gamma - \frac{\partial}{\partial z}\beta = f, \quad \frac{\partial}{\partial z}\alpha - \frac{\partial}{\partial x}\gamma = g, \quad \frac{\partial}{\partial x}\beta - \frac{\partial}{\partial y}\alpha = h$$

の  $R$  での解であることを示せ. また, このことを使って上の 2 の解を求めよ.

5 空間  $\mathbb{R}^3$  の凸領域  $D$  で定義された  $C^1$  級ベクトル場  $B$  に対して, ( $D$  上の) 方程式

$$\Delta \rho = \operatorname{div} B \quad (\text{Poisson の方程式})$$

の解  $\rho(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in D)$  が存在すれば,  $D$  上の  $C^1$  級ベクトル場  $A$  が存在して

$$B - \operatorname{grad} \rho = \operatorname{rot} A \quad \text{が成り立つ.}$$

6 空間  $\mathbb{R}^3$  にある (有限個の) 滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  と領域  $V$  の境界  $S$  を含めた  $\bar{V}$  で定義された  $C^2$  級関数  $u(x, y, z)$  を考える.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & ((x, y, z) \in V) \\ u = 0 & ((x, y, z) \in S) \end{cases}$$

が満たされるとき,  $u = 0 \quad ((x, y, z) \in \bar{V})$  が成り立つ. Hint. Green の恒等式を使え.

## 6.8 外微分と積分

### D. 外微分形式と外微分作用素

これまで, ある時はベクトル場の積分またある時は一次微分形式の積分を取り扱ってきたが, 曲線に沿っての線積分においては等しい量がベクトル場についての線積分とも一次微分形式についての線積分とも考えることができるのであった. このことは, 例えば, ある流体の情報をその流れの軌跡を表すベクトル場から得ることもできるし又はその流れを記述する微分方程式を通して調べることもできるというような視点の違いに応じているのだと見ることができる.

前節 6.6 の D. Stokes の定理 では, 曲面  $S$  を含む領域で定義された  $C^1$  級一次微分形式  $\omega$  に対して, 曲面  $S$  上の単純閉曲線  $C$  に沿う  $\omega$  の線積分  $\int_C \omega$  を一次微分形式  $\omega$  に付随するベクトル場  $X$  の回転の (単純閉曲線  $C$  で囲まれた曲面  $S$  内の領域  $(C)$  での) 積分  $\int_{(C)} \operatorname{rot} X \cdot \mathbf{n} dS$  として理解したのだが, 微分形式の概念を使って理解することはできないものだろうか.

**外微分形式** 高次の(外)微分形式を導入しよう：微分形式を外微分形式ともいう。

$\mathbf{R}^3$  の領域  $D$  で定義される一次(外)微分形式

$$f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \quad ((x, y, z) \in D)$$

は, 関数  $f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)$  が  $C^k$  級るとき  $C^k$  級であるといわれる。

$\mathbf{R}^3$  の領域  $D$  で定義されるつぎの形式

$$f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dy \wedge dz + h(x, y, z) dz \wedge dx \quad ((x, y, z) \in D)$$

を二次(外)微分形式という, 関数  $f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)$  が  $C^k$  級るとき  $C^k$  級であるといわれる。二次微分形式に対して, つぎの法則が成り立つ:

$$(1) \quad f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx = 0 \iff \text{関数 } f = g = h = 0.$$

(2) 加法に関する線形性

$\omega = f_1 dx \wedge dy + g_1 dy \wedge dz + h_1 dz \wedge dx$  と  $\mu = f_2 dx \wedge dy + g_2 dy \wedge dz + h_2 dz \wedge dx$  に対して,

$$\alpha\omega + \beta\mu = (\alpha f_1 + \beta f_2) dx \wedge dy + (\alpha g_1 + \beta g_2) dy \wedge dz + (\alpha h_1 + \beta h_2) dz \wedge dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}).$$

(3) 加法の逆元の存在

$$-(f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx) = (-1)(f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx).$$

$$(4) \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \quad dz \wedge dx = -dx \wedge dz.$$

$\mathbf{R}^3$  の領域  $D$  で定義されるつぎの形式

$$f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz \quad ((x, y, z) \in D)$$

を三次(外)微分形式という, 関数  $f(x, y, z)$  が  $C^k$  級るとき,  $C^k$  級であるといわれる。

### 外微分作用素 $d$ の定義

$C^1$  級関数  $f(x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in D$ ) を  $\mathbf{R}^3$  の領域  $D$  での  $C^1$  級 0 次(外)微分形式と考えて,  $C^1$  級 0 次微分形式  $f$  に対して,

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad \text{と定義する.}$$

$C^1$  級 1 次(外)微分形式  $\omega = f dx + g dy + h dz$  に対して,

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\ &= (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \wedge dx \\ &\quad + (g_x dx + g_y dy + g_z dz) \wedge dy \\ &\quad + (h_x dx + h_y dy + h_z dz) \wedge dz \\ &= (g_x - f_y) dx \wedge dy + (h_y - g_z) dy \wedge dz + (f_z - h_x) dz \wedge dx \end{aligned} \quad \text{と定義する.}$$

$C^1$  級 2 次微分形式  $\omega = f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dy \wedge dz + h(x, y, z) dz \wedge dx$  に対して,

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx \wedge dy + dg \wedge dy \wedge dz + dh \wedge dz \wedge dx \\ &= (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \wedge dx \wedge dy \\ &\quad + (g_x dx + g_y dy + g_z dz) \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + (h_x dx + h_y dy + h_z dz) \wedge dz \wedge dx \\ &= (f_z + g_x + h_y) dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{と定義する.} \end{aligned}$$

$C^1$  級 3 次微分形式  $\omega = f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$  に対して,

$$d\omega = 0 \quad \text{と定義する.}$$

**(外) 微分形式  $\omega$  の積分**

6.3 D. 一次微分形式の線積分で, 空間  $\mathbf{R}^3$  内の曲線  $C$  に沿う連続一次微分形式の線積分を定義し調べてきた - これを 1 次外微分形式の曲線  $C$  に沿う積分とも考える.

$\mathbf{R}^3$  の領域  $\Omega$  上の一次微分形式  $\omega = p(x, y, z) dx + q(x, y, z) dy + r(x, y, z) dz$

( $p(x, y, z), q(x, y, z), r(x, y, z)$  は  $\Omega$  で連続) が領域  $\Omega$  上の  $C^1$  級関数  $f(x, y, z)$  の微分形式

$$df = f_x(x, y, z) dx + f_y(x, y, z) dy + f_z(x, y, z) dz$$

と一致する (すなわち,  $\omega = df$  である) とき, 一次微分形式  $\omega$  は完全 (exact) であると言われる.

つぎの定理が成り立つ (6.4 Green の定理 D. 一次微分形式と領域の単連結性 **定理 2** 参照).

**命題** 空間  $\mathbf{R}^3$  の領域  $\Omega$  上の  $C^1$  級関数  $f(x, y, z)$  の一次微分形式  $\omega = df$  に対して,

$\Omega$  内の滑らかな曲線  $C : x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$  に添っての線積分

$\int_C \omega$  の値は曲線  $C$  の端点だけで決定される:

$$\int_C \omega = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)).$$

連続 2 次微分形式  $\omega = f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dy \wedge dz + h(x, y, z) dz \wedge dx$  が空間  $\mathbf{R}^3$  にある曲面  $S$  上で定義され, 曲面  $S$  は平面領域  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  から

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \quad ((u, v) \in D)$$

と 1 対 1 にパラメータ表示されているとき (ただし,  $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \quad ((u, v) \in D)$

は  $D$  で定義された  $C^1$  級関数)

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_S f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dy \wedge dz + h(x, y, z) dz \wedge dx \\ &= \int_D \left\{ f \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \right\} dudv \end{aligned}$$

と定義する - これを 2 次 (外) 微分形式の曲面  $S$  上の積分という . また

連続 3 次微分形式  $\omega = f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$  が空間  $\mathbf{R}^3$  の領域  $D$  上で定義されているとき :

$$\int_D \omega = \int_D f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

と定義する - これを 3 次 (外) 微分形式の領域  $D$  での積分という .

このとき , Stokes の定理 , Green の定理や発散 (量) 定理は外微分形式の立場からも理解できる .

曲面  $S$  上の一次微分形式  $\omega = f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz$  に付随するベクトル場  $\mathbf{X}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) ((x, y, z) \in S)$  に着目すると , 6.6 曲面上の

Stokes の定理 で示したように , 曲面  $S$  内の領域  $(C)$  上での法線面積分  $\int_{(C)} \text{rot } \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS$

と  $\int_{(C)} d\omega$  は等しい , すなわち

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_C \left\{ (h_y - g_z) \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + (f_z - h_x) \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} + (g_x - f_y) \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right\} dudv \\ &= \int_{(C)} \text{rot } \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{(C)} d\omega . \end{aligned}$$

Stokes の定理 (外微分形式の積分として)

空間  $\mathbf{R}^3$  にある滑らかな曲面  $S$  上の滑らかな (正の向きの) 単純閉曲線  $C$  と曲面  $S$  (を含む領域) で定義されている  $C^1$  級 1 次微分形式  $\omega$  が与えられたとき ,

$$\int_C \omega = \int_{(C)} d\omega .$$

ここで  $(C)$  は単純閉曲線  $C$  で囲まれた曲面  $S$  上の領域である .

6.4 D. 発散定理としての Green の定理 では , Green の定理をベクトル解析の観点から説明した .

外微分形式の積分としての Green の定理

$\Omega$  を  $\mathbf{R}^2$  の有界領域とし , その境界  $\partial\Omega$  は有限個の区分的に滑らかな曲線からなる閉曲線で , 正の (領域  $\Omega$  の内部を左に見て進む) 向きがついているとする .

滑らかな 1 次微分形式  $\omega = -g(x, y)dx + f(x, y)dy$  が与えられたとき ,

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \wedge dy .$$

が成り立つ .

6.2 発散 (量) 定理 (Divergence Theorem) も外微分形式の積分として理解できる .

外微分形式の積分としての発散 (量) 定理

空間  $\mathbf{R}^3$  にある滑らかな曲面  $S$  で囲まれた領域  $V$  を考える .

領域  $V$  の境界  $S$  を含めた  $\bar{V}$  で定義された滑らかな 2 次微分形式

$$\omega = f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dy \wedge dz + h(x, y, z) dz \wedge dx \quad ((x, y, z) \in \bar{V})$$

が与えられたとき ,

$$\int_S \omega = \int_V d\omega .$$

何故ならば , 曲面  $S$  は平面領域  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  から

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \quad ((u, v) \in D)$$

と 1 対 1 にパラメータ表示されているので (ただし ,  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) は  $D$  で定義された  $C^1$  級関数) ,

$\bar{V}$  で定義された滑らかなベクトル場  $\mathbf{A} = (g, h, f)$  を考えると

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_S f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dy \wedge dz + h(x, y, z) dz \wedge dx \\ &= \int_D \left\{ f \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \right\} dudv = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz = \int_V \{g_x + h_y + f_z\} dx dy dz = \int_V d\omega . \end{aligned}$$

と成っていることがわかる .

### 問題 6.8

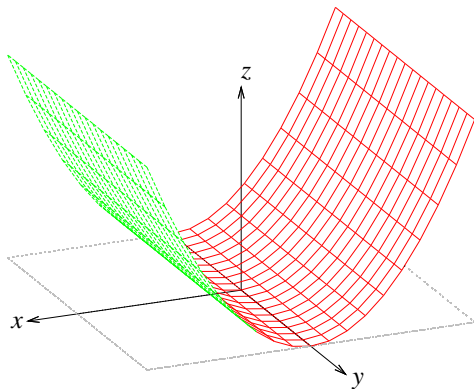
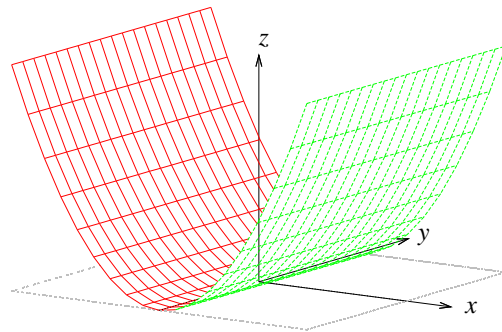
- 1 連続 2 次微分形式の積分  $\int_S \omega$  が曲面  $S$  のパラメータ表示 (1 対 1 対応) によらないこと ( $C^1$  級座標変換に対して不変である) ことを示せ .
- 2  $\mathbf{R}^3$  上での外微分作用素  $d$  に対して,  $d^2 := d \circ d = 0$  を示せ .
- 3 ベクトル場と微分形式の積分に対する Stokes の定理と発散 (量) 定理を公式にまとめよ .



# 問題 略解

## 4.1 A. 問

$-3 < x < 3$ ,  $-3 < y < 3$  の範囲での  
二変数関数  $z = x^2$  のグラフ.



## 問題 4.2 1 略解

(1) 原点を通る傾き  $\tan \theta$  ( $\theta \in \mathbf{R}$ ) の直線

$y = (\tan \theta)x$  上では,  $x \neq 0$  のとき

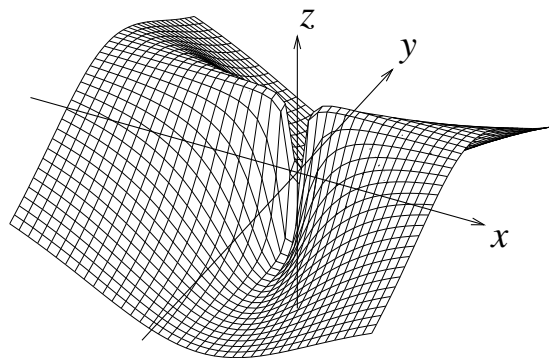
$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos 2\theta.$$

直線  $y = (\tan \theta)x$  上での極限值

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \cos 2\theta$$

が原点を通る直線の向きに依存しているから,

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  は存在しない. すなわち関数  $f(x, y)$  は原点  $O$  で連続でない. //

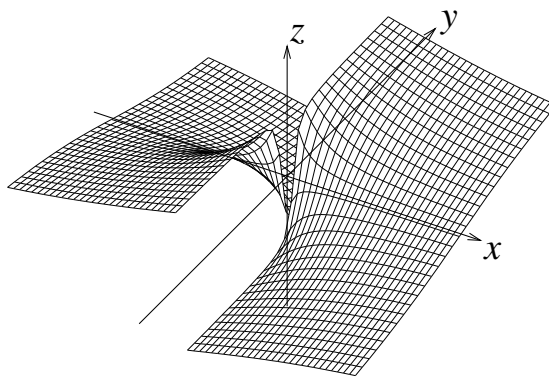


(2)  $y \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow +0} \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (y > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (y < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -0} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow -0} \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (y > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (y < 0) \end{cases} \end{aligned}$$



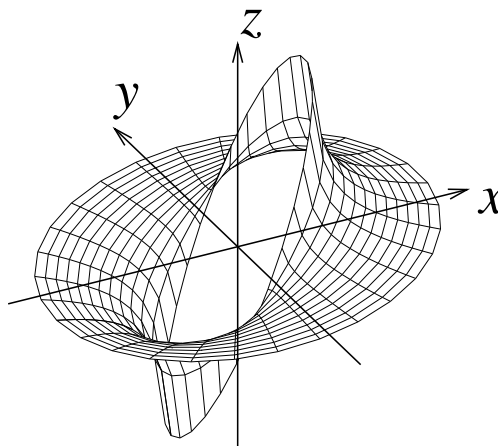
であるから,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  は存在しない. すなわち関数  $f(x, y)$  は  $y$  軸上で連続でない. //

(3) 関数  $\frac{\cos \theta}{\sqrt{r^2 - 1}}$  (極座標表示) の

定義域は原点を中心とする半径 1 の

閉円板の外である.

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow +1} \frac{\cos \theta}{\sqrt{r^2 - 1}} \\ &= \begin{cases} \infty & (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\theta = \pm \frac{\pi}{2}) \\ -\infty & (-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi). \end{cases} \end{aligned}$$



2 HINT. 微分積分学 1 第一章 1.9 D. 連続性と  $\epsilon - \delta$  論法 4.



3 平面  $\mathbf{R}^2$  の長方形  $R$  内の任意の二点  $(p, q), (p', q')$  を考える . 関数

$F(t) = f(p+(p'-p)t, q+(q'-q)t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) は閉区間  $[0, 1]$  で連続であるから ,  $F(0) = f(p, q)$  と  $F(1) = f(p', q')$  の間の任意の値  $\alpha$  は  $\alpha = F(t_0)$  ( $\exists t_0 \in (0, 1)$ ) と表される (中間値の定理) . このとき ,  $R$  の点  $(p_0, q_0) = (p + (p' - p)t_0, q + (q' - q)t_0)$  に対して  $\alpha = f(p_0, q_0)$  . //

### 問題 4.3 1 階偏導関数

$$(1) f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x \quad (2) f_x = \frac{-y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(3) f_x = \frac{e^{xy}\{(y-1)e^x + ye^y\}}{(e^x + e^y)^2}, \quad f_y = \frac{e^{xy}\{(x-1)e^y + xe^x\}}{(e^x + e^y)^2}$$

$$(4) f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad (5) f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \log x$$

$$(6) f_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (7) f_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$(8) f_x = x(x^2 + y^2)^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)\right), \quad f_y = y(x^2 + y^2)^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)\right)$$

$$2 \quad f(x, y) = x^2y^3 + x + 5y, \quad g(x, y) = e^{xy} + \sin(x + 2y) .$$

$$f_x = 2xy^3 + 1, \quad f_y = 3x^2y^2 + 5, \quad f_{xx} = 2y^3, \quad f_{xy} = 6xy^2, \quad f_{yy} = 6x^2y ,$$

$$f_{xxx} = 0, \quad f_{xxy} = 6y^2, \quad f_{xyy} = 12xy, \quad f_{yyy} = 6x^2 .$$

$$g_x = ye^{xy} + \cos(x + 2y), \quad g_y = xe^{xy} + 2 \cos(x + 2y) ,$$

$$g_{xx} = y^2e^{xy} - \sin(x + 2y), \quad g_{xy} = (1 + xy)e^{xy} - 2 \sin(x + 2y), \quad g_{yy} = x^2e^{xy} - 4 \sin(x + 2y),$$

$$g_{xxx} = y^3e^{xy} - \cos(x + 2y), \quad g_{xxy} = (2 + xy)e^{xy} - 2 \cos(x + 2y) ,$$

$$g_{xyy} = x(2 + xy)e^{xy} - 4 \cos(x + 2y), \quad g_{yyy} = x^3e^{xy} - 8 \cos(x + 2y) .$$

3 (1) 関数  $f(x, y, z)$  に対して , 極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b, c) - f(a, b, c)}{h}$  が存在するとき , 関数  $f(x, y, z)$  は  $(a, b, c)$  で  $x$  に関して偏微分可能といわれ , この極限値を  $(a, b, c)$  での  $x$  に関する偏微分係数といい  $f_x(a, b, c)$  と表す .

極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h, c) - f(a, b, c)}{h}$  が存在するとき , 関数  $f(x, y, z)$  は  $(a, b, c)$  で  $y$  に関して偏微分可能といわれ , この極限値を  $(a, b, c)$  での  $y$  に関する偏微分係数といい  $f_y(a, b, c)$  と表す . 同様に ,

極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c+h) - f(a, b, c)}{h}$  が存在するとき , 関数  $f(x, y, z)$  は  $(a, b, c)$  で  $z$  に関して偏微分可能といわれ , この極限値を  $(a, b, c)$  での  $z$  に関する偏微分係数といい  $f_z(a, b, c)$  と表す .

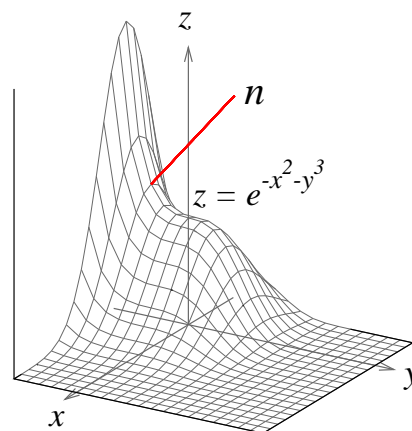
$$(2) f_x = 2\alpha x + 2\lambda y + 2\nu z, \quad f_y = 2\beta y + 2\lambda x + 2\mu z, \quad f_z = 2\gamma z + 2\mu y + 2\nu x .$$

#### 4.4 B 5 略解

曲面  $z = g(x, y) = e^{-x^2-y^3}$  上の任意の点  $(a, b, g(a, b))$

で法線のパラメータ表示は

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ e^{-a^2-b^3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2ae^{-a^2-b^3} \\ 3b^2e^{-a^2-b^3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}).$$



曲面  $z = g(x, y)$  上の点  $(0, -0.6, e^{0.216})$  での法線  $n$  の方程式は

$$n : x = 0, \quad \frac{y + 0.6}{1.08 e^{0.216}} = z - e^{0.216}.$$

#### 4.4 C 6 略解 (1) $\delta(x, y, z) = \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

$$(2) \quad (x(t), y(t), z(t)) = \left(-\cos \delta_0 \cos \frac{2\pi}{T}t, \sin \frac{2\pi}{T}t, \sin \delta_0 \cos \frac{2\pi}{T}t\right), \quad \delta(t) = \tan^{-1} \frac{\sin \delta_0 \cos \frac{2\pi}{T}t}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta_0 \cos^2 \frac{2\pi}{T}t}}.$$

#### 問題 4.4 1 略解 $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v) \quad (0 \leq u \leq 1, -\infty < v < \infty)$

とするとき, Helicoid 上の点  $X(u, v)$  での接平面は

$$T_{X(u,v)} = (u \cos v, u \sin v, 2v) + s(\cos v, \sin v, 0) + t(-u \sin v, u \cos v, 2) \quad (s, t \in \mathbf{R})$$

でその方程式は

$$(u \sin v) x - (u \cos v) y + \frac{u^2}{2} z = vu^2.$$

法線ベクトルは  $N = X_u(u, v) \times X_v(u, v) = (2 \sin v, -2 \cos v, u) \in \mathbf{R}^3.$  //

2 略解 曲面  $S$  上の点  $X(x_0, y_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbf{R}^3$  ( $(x_0, y_0) \in D$ ) での接平面は

$$T : X = X(x_0, y_0) + s X_x(x_0, y_0) + t X_y(x_0, y_0) \quad (s, t \in \mathbf{R}),$$

すなわち

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (\forall s, t \in \mathbf{R}).$$

法線ベクトルは

$$N = X_x(x_0, y_0) \times X_y(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

で法線が  $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbf{R}) .$

曲面  $S : z = f(x, y)$  から計算された接平面と法線はパラメータ表示された曲面

$S : X(x, y) = (x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3 \quad ((x, y) \in D)$  から計算されたものと一致する. //

**問題 4.5** [1] **略解** 関数  $f(x, y)$  が  $C^1$  級であるから,

$$f(x, y) = f(x, 0) + \int_0^y f_y(x, y) dt = f(x, 0) \quad (= \varphi(x))$$

と表される. //

[2] **略解** 座標変換  $u = xy, v = y \quad (uv \neq 0)$  の下で,  $z(u, v) = f(\frac{u}{v}, v)$  を調べる.

$$\begin{aligned} z_v &= f_x x_v + f_y y_v = f_x \left(-\frac{u}{v^2}\right) + f_y \\ &= -\frac{1}{v} \left\{ f_x \left(-\frac{u}{v}\right) + f_y v \right\} = -\frac{1}{v} \left\{ -x f_x + y f_y \right\} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つから, [1] によって, 関数  $z(u, v) = \varphi(u)$  と表される. これは関数  $f(x, y) = \varphi(xy)$

と表されることを意味している. //

[3] **略解** 極座標  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad (r \neq 0)$  のもとで,

$$z(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ を考えると,}$$

$$z_\theta(r, \theta) = -r \sin \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) = x f_y(x, y) - y f_x(x, y) = 0$$

が成り立つから, [1] によって 関数  $z(r, \theta) = \varphi(r)$  と表される. これは関数

$$f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) \text{ と表されることを意味している.} //$$

[4] **略解**  $u_{xy}(x, y) = 0$  であるから, [1] により  $u_x(x, y) = \varphi(x)$  と表される. 故に

$$u(a, b) - u(0, b) = \int_0^a u_x(x, b) dx = \int_0^a \varphi(x) dx.$$

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \quad g(y) = u(0, y)$$

と置くと,

$$u(x, y) - g(y) = f(x)$$

が示される. //

5 **略解** 関数  $f(x, y)$  が  $(0, 0) (\in \mathbf{R}^2)$  を除き  $C^1$  級とする. 関数  $f(x, y)$  が  $m$  次同次関数であるための必要十分条件は

(\*)  $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = mf(x, y)$  , すなわち  $af_x(a, b) + bf_y(a, b) = mf(a, b)$  ( $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ ) が成立することであることを示そう.

( $\Rightarrow$ )  $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$  を変数  $t$  に関して微分すると,  
 $xf_x(tx, ty) + yf_y(tx, ty) = mt^{m-1}f(x, y)$ .  $t = 1$  として,  $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = mf(x, y)$ .

( $\Leftarrow$ ) (\*) が成立するとき, 関数  $t^{-m}f(tx, ty)$  ( $t > 0$ ) を変数  $t$  に関して微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t^{-m} f(tx, ty) &= -mt^{-m-1} f(tx, ty) + t^{-m} (xf_x(tx, ty) + yf_y(tx, ty)) \\ &= t^{-m-1} (-mf(tx, ty) + tx f_x(tx, ty) + ty f_y(tx, ty)) = 0. \end{aligned}$$

これは, 関数  $t^{-m}f(tx, ty)$  が変数  $t$  によらないことを示している. すなわち  $t = 1$  として  $t^{-m}f(tx, ty) = f(x, y)$  が成り立つ. //

6 関数の次数 (1)  $\frac{1}{2}$  (2) 1 (3)  $\frac{4}{3}$  (4) -2

7 関数  $f(x, y)$  は原点  $(0, 0)$  でも偏微分可能で  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  であるが,

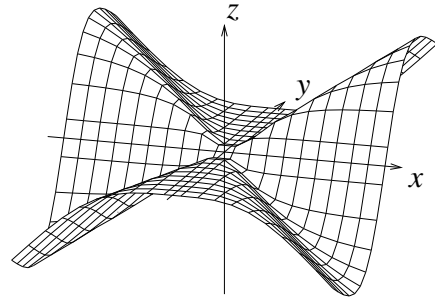
$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$ ,  $\lim_{(x,-x) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = -\frac{1}{2}$  であるから  $f(x, y)$  は原点  $(0, 0)$  で不連続である. (実は,  $f(x, y)$  は  $(0, 0)$  で  $C^1$  級ではない.)

8 4.2 **例 2** から,  $f(x, y)$  は  $\mathbf{R}^2$  で連続であると考えられる.

$f_x(x, y) = \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$  と  $f_y(x, y) = \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}$  に対して,

$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  および  $f_x$  と  $f_y$  の連続性を示せ.

(右図は  $z = f_y(x, y)$  のグラフ)



**問題 4.6** 1 **略解** (1)  $z = (R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha}$  であるから,

$$z_x = (-\alpha)(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-1}(-2x) = 2\alpha x(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-1}$$

$$z_y = (-\alpha)(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-1}(-2y) = 2\alpha y(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-1}$$

$$z_{xx} = 2\alpha(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-1} + 2\alpha x(-\alpha-1)(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-2}(-2x)$$

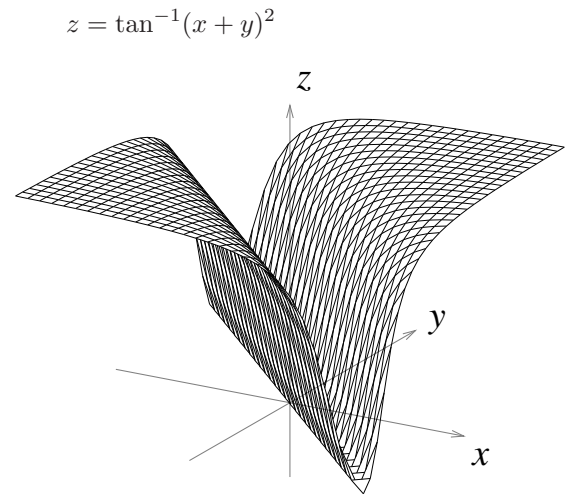
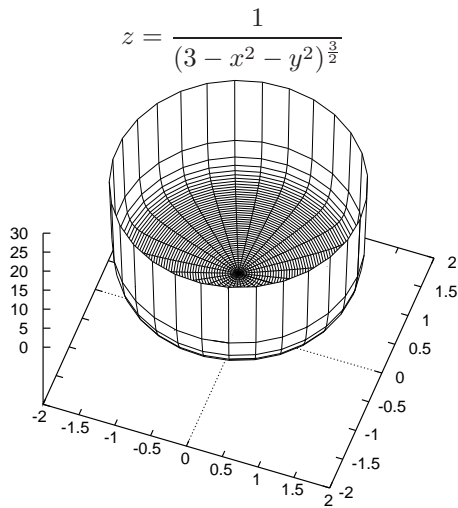
$$= 2\alpha(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-1} + 4\alpha(\alpha+1)x^2(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-2} = \frac{2\alpha\{R^2 + (2\alpha+1)x^2 - y^2\}}{(R^2 - x^2 - y^2)^{\alpha+2}}$$

$$z_{xy} = z_{yx} = 2\alpha x(-\alpha-1)(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-2}(-2y)$$

$$= 4\alpha(\alpha+1)xy(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-2} = \frac{4\alpha(\alpha+1)xy}{(R^2 - x^2 - y^2)^{\alpha+2}}$$

$$z_{yy} = 2\alpha(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-1} + 2\alpha y(-\alpha-1)(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-2}(-2y)$$

$$= 2\alpha(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-1} + 4\alpha(\alpha+1)y^2(R^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha-2} = \frac{2\alpha\{R^2 - x^2 + (2\alpha+1)y^2\}}{(R^2 - x^2 - y^2)^{\alpha+2}}.$$



(2)  $z = \tan^{-1}(x + y)^2$  であるから,  $z_x = \frac{2(x + y)}{1 + (x + y)^4}$

$$z_{xy} = \frac{2}{1 + (x + y)^4} - 2(x + y) \frac{4(x + y)^3}{(1 + (x + y)^4)^2} = \frac{2 + 2(x + y)^4 - 8(x + y)^4}{(1 + (x + y)^4)^2} = \frac{2(1 - 3(x + y)^4)}{(1 + (x + y)^4)^2}. \quad //$$

3 略解

$$u(x, y, z, t) = f(\lambda x + \mu y + \nu z + ct) + g(\lambda x + \mu y + \nu z - ct)$$

であるから,

$$\begin{aligned} u_t &= cf'(\lambda x + \mu y + \nu z + ct) - cg'(\lambda x + \mu y + \nu z - ct) \\ u_{tt} &= c^2 f''(\lambda x + \mu y + \nu z + ct) + c^2 g''(\lambda x + \mu y + \nu z - ct). \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} u_x &= \lambda f'(\lambda x + \mu y + \nu z + ct) + \lambda g'(\lambda x + \mu y + \nu z - ct) \\ u_{xx} &= \lambda^2 f''(\lambda x + \mu y + \nu z + ct) + \lambda^2 g''(\lambda x + \mu y + \nu z - ct). \end{aligned}$$

同様に,  $u_{yy}, u_{zz}$  を計算して

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0. \quad //$$

4 略解 座標変換  $\xi = x + ct, \eta = x - ct$  の下で,  $z(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right)$  を考えると,

$$\begin{aligned} z_t &= z_\xi c - z_\eta c \\ z_{tt} &= z_{\xi\xi} c^2 - z_{\xi\eta} c^2 - z_{\eta\xi} c^2 + z_{\eta\eta} c^2 = c^2 \{ z_{\xi\xi} - 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta} \}. \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} z_x &= z_\xi + z_\eta \\ z_{xx} &= z_{\xi\xi} + z_{\xi\eta} + z_{\eta\xi} + z_{\eta\eta} = z_{\xi\xi} + 2z_{\xi\eta} + z_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

故に

$$z_{\xi\eta} = \frac{1}{4} \left\{ u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} \right\} = 0$$

問題 4.5 [4] から, 微分可能な関数  $\varphi(\xi), \psi(\eta)$  が存在して

$$u(x, t) = z(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

と表されることがわかる. //

[5] 略解

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} &= \frac{-1}{4\pi kt^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} + \frac{1}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} \left( \frac{x^2+y^2}{4kt^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi kt^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} + \frac{x^2+y^2}{16\pi k^2 t^3} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}. \end{aligned}$$

つぎに

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} \left( -\frac{x}{2kt} \right) = -\frac{1}{8\pi k^2 t^2} x e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}, \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{8\pi k^2 t^2} \left\{ e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} + x e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} \left( -\frac{x}{2kt} \right) \right\} = -\frac{1}{8\pi k^2 t^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} + \frac{1}{16\pi k^3 t^3} x^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}. \end{aligned}$$

同様に  $\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}$  を計算して,

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y, t) &= -\frac{1}{4\pi k^2 t^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} + \frac{1}{16\pi k^3 t^3} (x^2 + y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} \\ &= \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}. \quad // \end{aligned}$$

[6] 略解  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  のとき,  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$ ,

同様に  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$  であるから

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \text{同様に} \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3}.$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = -\frac{1}{r^3} + x \cdot 3r^{-4} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}. \quad \text{同様に}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \quad \text{であるから,}$$

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0. \quad //$$

7 略解

$$F(x, y, z) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

であるから,

$$(1) \quad \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( f'(r) \frac{x}{r} \right) = f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{y^2 + z^2}{r^3}.$$

同様に,  $\frac{\partial^2 F(x, y, z)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 F(x, y, z)}{\partial z^2}$  を計算して,

$$\Delta F(x, y, z) = f''(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + f'(r) \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{r^3} = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$$

$$(2) \quad \Delta r^\alpha = \alpha(\alpha + 1)r^{\alpha-2}, \quad \Delta \log r = \frac{1}{r^2}. \quad //$$

8 略解

$$u(x, y, z, t) = \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (c \neq 0)$$

であるから,

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{-c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct).$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} = -\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct) + \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} = \left\{ -\frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + \frac{3x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} \right\} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right\} f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct)$$

$$+ \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} f''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct).$$

同様に,  $\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2}$  を計算して,

$$\Delta u(x, y, z, t) = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} f''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ct)$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2}. \quad //$$

## 問題 4.7

1 関数  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  の  $x = 1, y = 1$  における 3 次の Taylor 多項式と剰余項を求めよ.

略解

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3(x^2 - y), & f_y(x, y) = 3(y^2 - x) \\ f_{xx}(x, y) = 6x, & f_{xy}(x, y) = -3, & f_{yy}(x, y) = 6y \\ f_{xxx}(x, y) = 6, & f_{yyy}(x, y) = 6 \\ f_{xxy}(x, y) = f_{xyx}(x, y) = f_{yyx}(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{であるから,}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -1 + \frac{1}{2!} \{6(x-1)^2 - 6(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2\} + \frac{1}{3!} \{6(x-1)^3 + 6(y-1)^3\} \\ &= -1 + 3(x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2 + (x-1)^3 + (y-1)^3, \end{aligned}$$

剰余項  $R_4 = 0$  ( $f(x, y)$  の 4 階の偏導関数はすべて 0 であるから).

2 関数  $f(x, y) = e^x \cos y$  の  $x = 0, y = 0$  における 2 次の Taylor 多項式と剰余項を求めよ.

略解

$$\begin{cases} f_x(x, y) = e^x \cos y, & f_y(x, y) = -e^x \sin y \\ f_{xx}(x, y) = e^x \cos y, & f_{xy}(x, y) = -e^x \sin y, & f_{yy}(x, y) = -e^x \cos y \\ f_{xxx}(x, y) = e^x \cos y, & f_{yyy}(x, y) = e^x \sin y \\ f_{xxy}(x, y) = -e^x \sin y, & f_{xyy}(x, y) = -e^x \cos y \end{cases} \quad \text{であるから,}$$

$$\begin{cases} f_x(0, 0) = 1, & f_y(0, 0) = 0 \\ f_{xx}(0, 0) = 1, & f_{xy}(0, 0) = 0, & f_{yy}(0, 0) = -1. \end{cases} \quad \text{従って}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0, 0) + \frac{1}{2!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\theta x, \theta y) \end{aligned}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + R_3,$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{1}{3!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\theta x, \theta y) \\ &= \frac{1}{3!} \left\{ x^3 f_{xxx}(\theta x, \theta y) + 3x^2 y f_{xxy}(\theta x, \theta y) + 3xy^2 f_{xyy}(\theta x, \theta y) + y^3 f_{yyy}(\theta x, \theta y) \right\} \\ &= \frac{1}{3!} \left\{ x^3 e^{\theta x} \cos \theta y - 3x^2 y e^{\theta x} \sin \theta y - 3xy^2 e^{\theta x} \cos \theta y + y^3 e^{\theta x} \sin \theta y \right\} \\ &= \frac{e^{\theta x}}{3!} \left\{ x^3 \cos \theta y - 3x^2 y \sin \theta y - 3xy^2 \cos \theta y + y^3 \sin \theta y \right\} \quad (0 < \theta < 1). \quad // \end{aligned}$$



4.8 A. 問 関数  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2} - 8 + \frac{16}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2}}$  の極値を調べよ .

略解 関数  $f(x, y)$  の極値については ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2} \geq \sqrt{2}$  と置くと

$$f(x, y) = \tilde{f}(r) = r - 8 + \frac{16}{r} = \left( \sqrt{r} - \frac{4}{\sqrt{r}} \right)^2$$

と表される事から , 関数  $\tilde{f}(r)$  ( $r \geq \sqrt{2}$ ) を調べて  $f(x, y)$  は  $r = 4$  すなわち  $x^2 + y^2 = 14$  のとき最小値 0 をとり , 極大値  $f(0, 0) = 9\sqrt{2} - 8$  をとることが容易にわかる . //

問題 4.8 ① 関数  $f(x, y) = xy + \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$  ( $a > 0$ ) の極値を調べよ .

略解  $\begin{cases} f_x(x, y) = y - \frac{a}{x^2} = 0 \\ f_y(x, y) = x - \frac{a}{y^2} = 0 \end{cases}$  の解は  $x = y = \sqrt[3]{a}$  .

$f_{xx} = \frac{2a}{x^3}$ ,  $f_{yy} = \frac{2a}{y^3}$ ,  $f_{xy} = 1$  であるから ,  
 $D = f_{xy}^2(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) - f_{xx}(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})f_{yy}(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = 1 - 4 = -3 < 0$  .  
 $f_{xx}(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) = 2 > 0$  であるから ,  
 関数  $f(x, y)$  は  $(x, y) = (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$  で極小値  $3\sqrt[3]{a^2}$  を取る . //

② 関数  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$  の極値を調べよ .

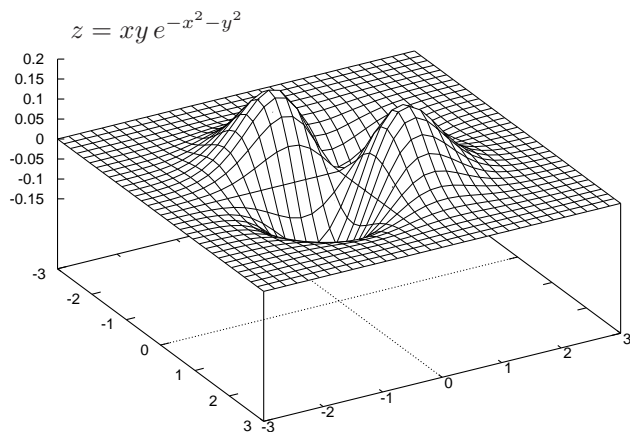
略解  $(x, y) = (0, 0)$  のとき ,  $f(0, 0) = 0$  は極値でない .  
 $(x, y) = (0, \pm 1)$  のとき ,  $f(\pm 1, 0) = -1$  は極小値 .

③ 関数  $z = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$  の極値を調べよ .

略解  $(x, y) = (1, \pm 1)$  のとき ,  $f(1, \pm 1) = 2$  は極値でない .  
 $(x, y) = (0, 0)$  のとき ,  $f(0, 0) = 4$  は極大値 .  
 $(x, y) = (2, 0)$  のとき ,  $f(2, 0) = 0$  は極小値 .

④ 関数  $f(x, y) = xy e^{-x^2 - y^2}$  の極値を調べよ .

略解  $f_x = f_y = 0$  解は  
 $(x, y) = (0, 0)$  と  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$  .  
 $f(0, 0) = 0$  は極値でない .  
 $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4$   
 は極大値 .  
 $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -4$   
 は極小値 .



5 関数  $f(x, y) = \cos(x + y) + \sin x + \sin y$  ( $0 \leq |x|, |y| < \pi$ ) の極値を調べよ.

略解

$$f_x(x, y) = -\sin(x + y) + \cos x$$

$$f_y(x, y) = -\sin(x + y) + \cos y$$

$$f_{xx}(x, y) = -\cos(x + y) - \sin x$$

$$f_{xy}(x, y) = -\cos(x + y)$$

$$f_{yy}(x, y) = -\cos(x + y) - \sin y \quad (0 \leq |x|, |y| < \pi).$$

連立方程式

$$\begin{cases} f_x(a, b) = -\sin(a + b) + \cos a = 0 \\ f_y(a, b) = -\sin(a + b) + \cos b = 0 \end{cases}$$

から,

$$\begin{aligned} \cos a - \cos b &= -\sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} = 0 && \text{が導かれるので} \\ a - b = 0 \text{ または } a + b = 0 &&& \text{が成り立つ.} \end{aligned}$$

$$a - b = 0 \text{ のとき, } a = b = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}.$$

$$a + b = 0 \text{ のとき, } a = -b = \pm \frac{\pi}{2}.$$

さて,

$$\begin{aligned} D(a, b) &= f_{xy}(a, b)^2 - f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) \\ &= \cos^2(a + b) - (\cos(a + b) + \sin a)(\cos(a + b) + \sin b) \end{aligned}$$

に対して,

$$(i) \quad D\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1 - 1)(-1 - 1) = -3 < 0, \quad f_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$$

$$(ii) \quad D(0, 0) = 1 - 1 = 0$$

$$(iii) \quad D\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} < 0, \quad f_{xx}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

$$(iv) \quad D\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1 + 1)(-1 + 1) = 1 > 0$$

$$(v) \quad D\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} < 0, \quad f_{xx}\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

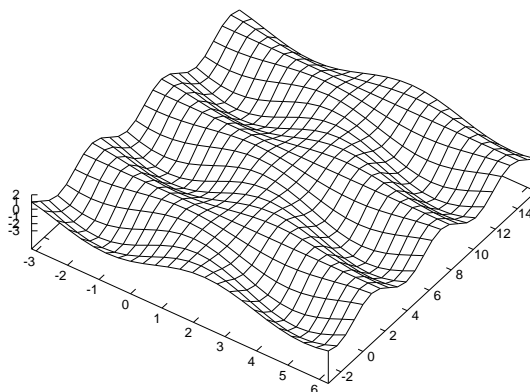
$$(vi) \quad D\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (1 + 1)(1 - 1) = 1 > 0$$

$$(vii) \quad D\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 - (1 - 1)(1 + 1) = 1 > 0$$

であるから,

$$(a, b) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \text{ で極大値 } \frac{3}{2}, \quad (a, b) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ で極小値 } -3 \text{ を取る. //}$$

$$z = \cos(x + y) + \sin x + \sin y$$



6  $z = x^2 + 4xy + y^2 = 3\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)^2$  が成り立つので，この曲面は双曲放物面  $z = 3x^2 - y^2$  を  $z$  軸の周りに角  $\frac{\pi}{4}$  だけ回転した双曲放物面であることがわかる．このことから，点  $(0, 0)$  は鞍点となり，関数  $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$  は極値を取りえないことがわかる．

## 4.9 A.

問 関数  $y = \varphi(x)$  の導関数が  $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$  と表されることから，関数  $f(x, y)$

が  $C^2$  級ならば，合成関数の微分法より  $y' = -\frac{f_x}{f_y}$  と現すとき

$$y'' = \frac{d}{dx} \left\{ -\frac{f_x}{f_y} \right\} = -\frac{\{f_{xx} + f_{xy}y'\}f_y - f_x\{f_{yx} + f_{yy}y'\}}{f_y^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

すなわち

$$\varphi''(x) = -\frac{f_{xx}(x, \varphi(x))f_y(x, \varphi(x))^2 - 2f_{xy}(x, \varphi(x))f_x(x, \varphi(x))f_y(x, \varphi(x)) + f_{yy}(x, \varphi(x))f_x(x, \varphi(x))^2}{f_y(x, \varphi(x))^3}. //$$

## 問題 4.9

1  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ ,  $f_y(x, y) \neq 0$  によって陰関数  $y = \varphi(x)$  を定める．

- (1)  $\varphi'(x)$  を  $x$ ,  $y = \varphi(x)$  を使って表せ．
- (2)  $\varphi'(x_0) = 0$  となる点  $x_0$  を求めよ．
- (3)  $\varphi''(x_0)$  を  $x_0$ ,  $y_0 = \varphi(x_0)$  を使って表せ．
- (4)  $\varphi(x)$  の極値を求めよ．

略解 (1)  $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{y(x^2 + y^2 + 1)}$ . (2)  $(x_0, y_0) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2})$ .

(3)  $\varphi''(x_0) = -\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{3x_0^2 + y_0^2 - 1}{y_0(x_0^2 + y_0^2 + 1)} = -\frac{x_0^2}{y_0}$ .

(4)  $x_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき,  $y_0 = \frac{1}{2}$  は  $y = \varphi(x)$  の極大値,  
 $x_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき,  $y_0 = -\frac{1}{2}$  は  $y = \varphi(x)$  の極小値.

2  $a > 0$  とする． $f(x, y) = 4x^4 - 4a^2x^2 + a^2y^2 = 0$ ,  $f_y(x, y) \neq 0$  によって陰関数  $y = \varphi(x)$  を定める． $\varphi(x)$  の極値を求めよ． 略解

$x_0 = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$  のとき,  $y_0 = a$  は  $y = \varphi(x)$  の極大値,

$x_0 = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$  のとき,  $y_0 = -a$  は  $y = \varphi(x)$  の極小値.

3  $f(x, y) = x^2 - x - xy^2 + 2y^2 = 0$ ,  $f_y(x, y) \neq 0$  によって陰関数  $y = \varphi(x)$  を定める.  
 $\varphi(x)$  の極値を求めよ.

略解  $f_x(x, y) = 2x - 1 - y^2$ ,  $f_y(x, y) = 2y(2 - x)$ ,  $f_{xx}(x, y) = 2$  である. 陰関数定理により,  $y_0 = \varphi(x_0)$  なる陰関数  $\varphi(x)$  に対して  $\varphi'(x_0) = 0$  のとき

$$\varphi''(x_0) = -\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{1}{y_0(x_0 - 2)} \text{ となる.}$$

$\varphi'(x_0) = 0$  の解  $x_0$  と  $y_0 = \varphi(x_0)$  は連立方程式  $f(x, y) = 0$ ,  $f_x(x, y) = 0$  かつ  $f_y(x, y) \neq 0$  の解  $x_0, y_0$  である.

$x_0 = 2 + \sqrt{2}$ ,  $y_0 = \varphi(x_0) = 1 + \sqrt{2}$  のとき,  $\varphi''(x_0) = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} > 0$

より,  $y_0$  は極小値.

$x_0 = 2 + \sqrt{2}$ ,  $y_0 = \varphi(x_0) = -1 - \sqrt{2}$  のとき,  $\varphi''(x_0) = \frac{1}{-2 - \sqrt{2}} < 0$

より,  $y_0$  は極大値.

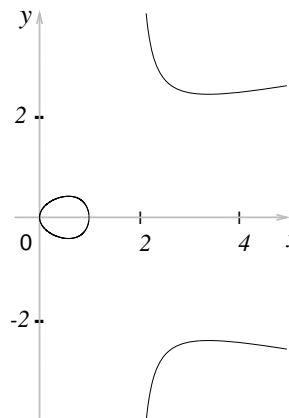
$x_0 = 2 - \sqrt{2}$ ,  $y_0 = \varphi(x_0) = -1 + \sqrt{2}$  のとき,  $\varphi''(x_0) = \frac{1}{-2 + \sqrt{2}} < 0$

より,  $y_0$  は極大値.

$x_0 = 2 - \sqrt{2}$ ,  $y_0 = \varphi(x_0) = 1 - \sqrt{2}$  のとき,  $\varphi''(x_0) = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = 2 > 0$

より,  $y_0$  は極小値. //

右図は曲線  $x^2 - x - xy^2 + 2y^2 = 0$



4 楕円面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上の点  $P(x_0, y_0, z_0)$  での接平面  $T_P$  および法線  $l_P$  を求めよ.

略解 関数  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$  を考える. 4.9 C. 等位面の接平面と法線を参照して, 等位面  $f(x, y, z) = 0$  の接平面と法線  $l_P$  を求める.

$$(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right)$$

であるから,  $P(x_0, y_0, z_0)$  での接平面  $T_P$  は

$$\frac{2x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{2y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{2z_0(z - z_0)}{c^2} = 0,$$

すなわち

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1.$$

法線  $l_P$  のパラメータ表示は

$$l_P : \begin{cases} x - x_0 = \frac{tx_0}{a^2} \\ y - y_0 = \frac{ty_0}{b^2} \\ z - z_0 = \frac{tz_0}{c^2} \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbf{R}).$$

となっていることが容易にわかる. //

## 問題 4.10

1  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  のとき、 $f(x, y) = x + y$  の極値を求めよ。

**略解**  $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ ,  $g_x = \frac{2x}{a^2}$ ,  $g_y = \frac{2y}{b^2}$ ,  $f_x = f_y = 1$  に対して,

つぎの連立方程式の解を求める (Lagrange の未定乗数法) .

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ f_x - \lambda g_x = 1 - \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 1 - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \end{cases} \quad \text{から, } a^2 = 2\lambda x, \quad b^2 = 2\lambda y .$$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{2\lambda} + \frac{y}{2\lambda} = \frac{x+y}{2\lambda} \quad \text{より, } x+y = 2\lambda .$$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2}{4\lambda^2} + \frac{b^2}{4\lambda^2} = \frac{a^2+b^2}{4\lambda^2} \quad \text{より, } \lambda = \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} .$$

したがって,  $x+y = 2\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2}$  となり,

関数  $f(x, y)$  は楕円上で最大値, 最小値をとるから,

$f(x, y) = x + y$  の最大値, 最小値は  $(\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2+b^2}})$  で  $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ . //

2  $8x^2 + y^2 = 1$  のとき、 $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  の極値を求めよ。

**略解**  $g(x, y) = 8x^2 + y^2 - 1$  において, Lagrange の未定乗数法で解く。

$$\text{連立方程式} \quad \begin{cases} g(x, y) = 8x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ f_x(x, y) - g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - g_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad , \text{すなわち} \quad \begin{cases} 8x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 1 + 16x^3 = 0 \\ 1 + 2y^3 = 0 \end{cases}$$

から  $x \neq 0, y \neq 0$  で

$$\begin{cases} 8x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 8x^3 - y^3 = 0 \end{cases} \quad , \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (\text{複合同順})$$

が成り立つ。さて,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0, y \rightarrow \pm 1} f(x, y) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow -0, y \rightarrow \pm 1} f(x, y) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, y \rightarrow +0} f(x, y) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, y \rightarrow -0} f(x, y) &= -\infty \end{aligned}$$

であるから, 関数  $f(x, y)$  は楕円上で極大値, 極小値をとる。

$(x, y) = (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  のとき, 極小値  $3\sqrt{3}$ ,

$(x, y) = (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$  のとき, 極大値  $-3\sqrt{3}$ . //

3  $x^2 + y^2 - 2xy - x - y + \frac{1}{4} = 0$  のとき,  $f(x, y) = xy$  の極値を求めよ。

**略解**  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - x - y + \frac{1}{4}$  とおき, Lagrange の未定乗数法で解く。

$$\text{連立方程式} \quad \begin{cases} f_x - \lambda g_x = y - \lambda(2x - 2y - 1) = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 1 - \lambda(-2x + 2y - 1) = 0 \end{cases}$$

から,  $x = y = -\lambda$ .  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - x - y + \frac{1}{4} = 0$  から,  $x = y = -\lambda = \frac{1}{8}$ .

さて, 条件  $g(x, y) = 0$  より  $xy = \frac{1}{2} \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\}$  がわかるので, 曲線  $g(x, y) = 0$  は  $\mathbb{R}^2$  の第一象限  $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  に含まれる. この曲線の正方形  $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$  内の部分は有界閉集合で関数  $z = xy$  はこの部分で最大値に到達する.  $z = xy$  は  $(x, y) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$  で極大値  $\frac{1}{64}$ ,  $(x, y) = (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0)$  で最小値 0 をとる. //

4 楕円  $\varphi(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$  上での, 関数  $z = x + y$  の最大値, 最小値を求めよ.

注意.  $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$  は楕円の方程式である.

略解 Lagrange の未定乗数法で解く. 連立方程式

$$\begin{cases} z_x - \lambda \varphi_x = 1 + \lambda(2x - y) = 0 \\ z_y - \lambda \varphi_y = 1 + \lambda(-2x + y) = 0 \end{cases} \quad \text{から,}$$

$2x - y = -x + 2y$ . 従って  $3x = 3y$ , すなわち,  $x = y$ .  $\varphi(x, x) = x^2 - 1 = 0$  より  $y = x = \pm 1$ . 関数  $f(x, y) = x + y$  は楕円上で最大値, 最小値をとるから,  $z = x + y$  の最大値は 2, 最小値は -2. //

5  $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}$  ( $-\frac{\pi}{6} \leq x, y \leq \frac{7\pi}{6}$ ) のとき, 関数  $z = x^2 + y^2$  の極値を求めよ.

略解 関数  $z = x^2 + y^2$  は閉曲線  $\sin x + \sin y = \frac{1}{2}$  ( $-\frac{\pi}{6} \leq x, y \leq \frac{7\pi}{6}$ ) (参考. 微分と積分 I, 2.1 C.) 上で極値をとる.

$\varphi(x, y) = \sin x + \sin y - \frac{1}{2}$  ( $-\frac{\pi}{6} \leq x, y \leq \frac{7\pi}{6}$ ) と置き,

$$\text{Lagrange の未定乗数法で解く. 連立方程式} \quad \begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z_x - \lambda \varphi_x = 2x - \lambda \cos x = 0 \\ z_y - \lambda \varphi_y = 2y - \lambda \cos y = 0 \end{cases}$$

の解を求める. この連立方程式の未定乗数  $\lambda \neq 0$  である. 何故ならば,  $\lambda = 0$  の場合  $x = y = 0$  となり条件  $\varphi(x, y) = 0$  が満たされない.

さて, 0 でない  $\lambda$  を固定するとき 方程式  $\cos x = \frac{2x}{\lambda}$  ( $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ ) は唯一つの解をもつから, 上の連立方程式の解に対して  $x = y$  成り立つことになる. 故に,

$\varphi(x, y) = 0$  から  $\sin x = \frac{1}{4}$ , すなわち  $x = \sin^{-1} \frac{1}{4} = y$  または  $x = \pi - \sin^{-1} \frac{1}{4} = y$  が成り立つ.

$x = y = \sin^{-1} \frac{1}{4} = 0.25268 \dots$  のとき, 極小値  $2 \left(\sin^{-1} \frac{1}{4}\right)^2 = 0.12769 \dots$  をとる.

$x = y = \pi - \sin^{-1} \frac{1}{4} = 2.8889 \dots$  のとき, 極大値  $2 \left(\pi - \sin^{-1} \frac{1}{4}\right)^2 = 16.6916 \dots$  をとる. //

## 4.11 D. 問 略解

領域  $D$  定義された  $C^1$  級変換  $\Phi: x = x(u, v), y = y(u, v)$  が  $D$  の点  $(u_0, v_0)$  を含む開集合  $U (\subset D)$  を点  $(x_0, y_0) = \Phi(u_0, v_0)$  を含む開集合  $V$  の上へ 1 対 1 に写像している . ヤコビアン  $J(u, v) \neq 0 ((u, v) \in D)$  であるから , どの点  $(u, v) \in U$  でも  $x_u(u, v) y_v(u, v) \neq 0$  または  $x_v(u, v) y_u(u, v) \neq 0$  が成り立っている . 今 ,  $x_v(u, v) y_u(u, v) \neq 0$  の場合を調べる .  $C^1$  級関数  $f(x, u, v) = x - x(u, v)$  の偏導関数  $f_v(x, u, v) = -x_v(u, v) \neq 0$  であるから , (陰関数定理によって)  $f(x, u, v) = 0$  から決まる  $C^1$  級陰関数  $v = \alpha(x, u)$  が存在して

$$f(x, u, \alpha(x, u)) = x - x(u, \alpha(x, u)) = 0, \quad \alpha_u(x, u) = -\frac{x_u(u, \alpha(x, u))}{x_v(u, \alpha(x, u))}$$

が成り立つ . このとき ,  $C^1$  級関数  $g(x, y, u) = y - y(u, \alpha(x, u))$  の偏導関数は ,

$$\begin{aligned} g_u(x, y, u) &= -y_u(u, \alpha(x, u)) - y_v(u, \alpha(x, u)) \alpha_u(x, u) \\ &= -y_u(u, \alpha(x, u)) + y_v(u, \alpha(x, u)) \frac{x_u(u, \alpha(x, u))}{x_v(u, \alpha(x, u))} \\ &= \frac{J(u, v)}{x_v(u, \alpha(x, u))} \neq 0. \end{aligned}$$

であるから , 陰関数定理により  $g(x, y, u) = 0$  から決まる  $C^1$  級陰関数  $u = \beta(x, y)$  が存在して

$$g(x, y, \beta(x, y)) = y - y(\beta(x, y), \alpha(x, \beta(x, y))) = 0$$

が成り立つ . このとき ,  $f(x, \beta(x, y), \alpha(x, \beta(x, y))) = x - x(\beta(x, y), \alpha(x, \beta(x, y))) = 0$  も成り立つから ,  $(x, y) = \Phi(u, v) \in V$  の近くで  $\Phi^{-1} : u = \beta(x, y), v = \alpha(x, \beta(x, y))$  は  $C^1$  級 . //

5.1 D. 2 有界集合  $D$  が '面積が確定する' 集合であるとき ,  $D$  の境界  $\partial D$  は '面積 0 の集合である' ことを示せ .

略証 有界集合  $D$  を含む任意の閉長方形  $R = [a, b] \times [c, d]$  の小長方形  $R_{i,j}$  への分割

$$\Delta : \begin{cases} a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b \\ c = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = d \end{cases}, \quad R_{i,j} = [a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j].$$

に対し ,  $D$  および  $R \setminus D$  と交わる ( $D$  にも  $R \setminus D$  にも含まれない) 小長方形  $R_{i,j}$  についての和

$$b(\Delta) = \sum_{R_{i,j} \cap \partial D \neq \emptyset} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) (\geq 0) \quad \text{を考える .}$$

平面上の関数  $\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$  に関するリーマン和を調べるために , 分割  $\Delta$

に関しての点の選出  $\mu_0$  および  $\mu_1$  をつぎのようにとる:

$$\mu_0 : (\xi_{ij}^0, \eta_{ij}^0) \in R_{i,j}, \text{ ただし } R_{i,j} \text{ が } R \setminus D \text{ と交わるときは } (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in R_{i,j} \cap (R \setminus D),$$

$$\mu_1 : (\xi_{ij}^1, \eta_{ij}^1) \in R_{i,j}, \text{ ただし } R_{i,j} \text{ が } D \text{ と交わるときは } (\xi_{ij}^1, \eta_{ij}^1) \in R_{i,j} \cap D.$$

このとき，明らかに つぎが成り立つ： 
$$\begin{cases} R(\Delta, \mu_1) \geq R(\Delta, \mu_0) (\geq 0) \\ b(\Delta) = R(\Delta, \mu_1) - R(\Delta, \mu_0). \end{cases}$$

$D$  の ‘面積が確定する’ ことから，

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} R(\Delta, \mu_0) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} R(\Delta, \mu_1) = \iint_R \chi_D(x, y) dx dy$$

となるので，  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} b(\Delta) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \{R(\Delta, \mu_1) - R(\Delta, \mu_0)\} = 0$  が成り立つ。 //

## 5.2 A. 3 略解

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_0^b \int_0^a x^2 + y^2 dx dy &= \int_0^b \left[ \frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^a dy = \int_0^b \left( \frac{a^3}{3} + ay^2 \right) dy \quad (2) \quad \frac{a^2 b^2}{8} \\ &= \left[ \frac{a^3}{3} y + \frac{ay^3}{3} \right]_0^b = \frac{a^3 b}{3} + \frac{ab^3}{3} = \frac{ab(a^2 + b^2)}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \iint_D xy dx dy &= \int_0^a \int_0^{b-\frac{bx}{a}} xy dy dx = \int_0^a \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_0^{b-\frac{bx}{a}} dx = \frac{1}{2} \int_0^a x \left( b - \frac{bx}{a} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-ax}{3b} \left( b - \frac{bx}{a} \right)^3 \right]_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a \frac{-a}{3b} \left( b - \frac{bx}{a} \right)^3 dx = \frac{a}{6b} \left[ \frac{-a}{4b} \left( b - \frac{bx}{a} \right)^4 \right]_0^a = \frac{a^2 b^2}{24}. \end{aligned}$$

**問題 5.2** 1 略解 (1)  $\int_1^2 dx \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_{\sqrt{1+y^2}}^2 f(x, y) dx$ .

$$(2) \quad \int_0^1 dx \int_{-x}^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 f(x, y) dx.$$

2 略解 領域  $D = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq s \leq x, 0 \leq t \leq s\}$  で二重積分を考える。

$$\begin{aligned} \int_0^x ds \int_0^s f(t) dt &= \iint_D f(t) ds dt = \int_0^x dt \int_t^x f(t) ds \\ &= \int_0^x [f(t) s]_t^x dt = \int_0^x f(t)(x-t) dt. \quad // \end{aligned}$$

他に，以下のような解もあるが，上の解には累次積分の考えが現れている。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^x ds \int_0^s f(t) dt - \int_0^x f(t)(x-t) dt \right\} &= \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^x ds \int_0^s f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x f(t) t dt \right\} \\ &= \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) dt - x f(x) + x f(x) = 0. \end{aligned}$$

$x=0$  の場合を考えて，  $\int_0^x ds \int_0^s f(t) dt - \int_0^x f(t)(x-t) dt \equiv 0$  を得る。 //

3 略解  $f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(x, y)$  なので，



$$\begin{aligned}\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left[ F_y(x, y) \right]_a^b dy = \int_c^d \{ F_y(b, y) - F_y(a, y) \} dy \\ &= \left[ F(b, y) \right]_c^d - \left[ F(a, y) \right]_c^d = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c). \quad //\end{aligned}$$

4 略解 (1)  $R = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$  であるから,

$$\begin{aligned}\iint_R \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} dx dy &= \int_{-a}^a \left( \int_{-b}^b \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} dy \right) dx = \int_{-a}^a \left[ \frac{x^2 y}{a^2} - \frac{y^3}{3b^2} \right]_{-b}^b dx \\ &= 2 \int_{-a}^a \left\{ \frac{bx^2}{a^2} - \frac{b^3}{3b^2} \right\} dx = 2 \left[ \frac{bx^3}{3a^2} - \frac{bx}{3} \right]_{-a}^a = 0.\end{aligned}$$

(2)  $K = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, (x, y) \in R\}$  であるから,  $K$  の体積は

$D = \{(x, y) \mid -\left| \frac{bx}{a} \right| \leq y \leq \left| \frac{bx}{a} \right|\}$  上のつぎの重積分で求まる:

$$\begin{aligned}\iint_D \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} dx dy &= \int_{-a}^0 \left( \int_{\frac{bx}{a}}^{-\frac{bx}{a}} \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} dy \right) dx + \int_0^a \left( \int_{-\frac{bx}{a}}^{\frac{bx}{a}} \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^a \left( \int_{-\frac{bx}{a}}^{\frac{bx}{a}} \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} dy \right) dx = 4 \int_0^a \left( \int_0^{\frac{bx}{a}} \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^a \left[ \frac{x^2 y}{a^2} - \frac{y^3}{3b^2} \right]_0^{\frac{bx}{a}} dx = 4 \int_0^a \left\{ \frac{bx^3}{a^3} - \frac{bx^3}{3a^3} \right\} dx = \int_0^a \frac{2bx^3}{3a^3} dx \\ &= \left[ \frac{2bx^4}{12a^3} \right]_0^a = \frac{2ba}{12} = \frac{ab}{6}. \quad //\end{aligned}$$

### 5.3 B 5 略解

領域  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) \leq 0\}$  は集合  $K = \{(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$  から

$$\text{座標変換} \quad \begin{cases} x(\rho, \theta) = \frac{\rho \cos \theta}{6} + \frac{\rho \sin \theta}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \\ y(\rho, \theta) = \frac{\rho \cos \theta}{6} - \frac{\rho \sin \theta}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{で得られ,}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\cos \theta}{6} + \frac{\sin \theta}{2\sqrt{3}} & -\frac{\rho \sin \theta}{6} + \frac{\rho \cos \theta}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\cos \theta}{6} - \frac{\sin \theta}{2\sqrt{3}} & -\frac{\rho \sin \theta}{6} - \frac{\rho \cos \theta}{2\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{\rho}{6\sqrt{3}}$$

である. 故に

$$V = \iiint_D -f(x, y) dx dy = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| d\rho d\theta.$$

$$\text{ここで} \quad \begin{cases} \frac{x(\rho, \theta)}{\sqrt{2}} - \frac{y(\rho, \theta)}{\sqrt{2}} = \frac{\rho \sin \theta}{\sqrt{6}} \\ \frac{x(\rho, \theta)}{\sqrt{2}} + \frac{y(\rho, \theta)}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\rho \cos \theta}{3\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{であるから}$$

$$f(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) = 2\rho^2 \frac{\sin^2 \theta}{6} + 6\rho^2 \frac{\cos^2 \theta}{18} - \frac{1}{3} = \frac{\rho^2 - 1}{3}.$$

故に

$$\begin{aligned}
 V &= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\rho^2-1}{3} \frac{\rho}{6\sqrt{3}} d\rho d\theta = -\frac{1}{18\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \{\rho^3 - \rho\} d\rho d\theta \\
 &= -\frac{1}{18\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 d\theta = -\frac{1}{18\sqrt{3}} \left( -\frac{2\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{36\sqrt{3}}. \quad //
 \end{aligned}$$

**問題 5.3** [1] 極座標変換をして,

$$\begin{aligned}
 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f'(x^2+y^2) dx dy &= \iint_{r^2 \leq 1} f'(r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f'(r^2) r dr \\
 &= 2\pi \left[ \frac{f(r^2)}{2} \right]_0^1 = \pi (f(1) - f(0)). \quad //
 \end{aligned}$$

[2] Cardioid  $C : r = a(1 + \cos \theta)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) の囲む領域の面積は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \\
 &= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 8a^2 \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}. \quad //
 \end{aligned}$$

[3] lemniscate  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  ( $a > 0$ ) は極座標表示

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad \left( -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \right)$$

を持つから, その囲む領域の面積は, 対称性より

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta d\theta = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 2a^2 \left[ \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2. \quad //$$

[4] バラ曲線 Rhodonea の一枚の花弁  $r = a \sin n\theta$  ( $0 \leq \theta < \frac{\pi}{n}$ ) の囲む領域の面積は

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} a^2 \sin^2 n\theta d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{1 - \cos 2n\theta}{2} d\theta = \frac{a^2}{4} \left[ \theta - \frac{\sin 2n\theta}{2n} \right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi a^2}{4n}. \quad (n \in \mathbf{N}, a > 0) //$$

[5]  $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \frac{(8 - 3\sqrt{3})\pi a^3}{12}.$

**5.5 D** [4] **略解**  $D_R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  と置くと,

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(x^2+y^2)\sigma}} e^{-\frac{(\log \sqrt{x^2+y^2}-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} \frac{1}{\sqrt{2\pi(x^2+y^2)\sigma}} e^{-\frac{(\log \sqrt{x^2+y^2}-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx dy.$$

極座標変換して,

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} \frac{1}{\sqrt{2\pi(x^2+y^2)\sigma}} e^{-\frac{(\log \sqrt{x^2+y^2}-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma r} e^{-\frac{(\log r-\mu)^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta \\
 &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\log r-\mu)^2}{2\sigma^2}} dr = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\log r-\mu)^2}{2\sigma^2}} dr.
 \end{aligned}$$

ここで置換積分  $\begin{cases} -\infty < t = \frac{\log r - \mu}{\sigma} < \infty & (\text{このとき } r = e^{\mu + \sigma t} > 0) \\ dt = \frac{dr}{\sigma r} \end{cases}$  を行くと,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\log r - \mu)^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{\mu + \sigma t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{e^\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{\sigma t - \frac{t^2}{2}} dt \\ & = \frac{e^\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(t-\sigma)^2 - \sigma^2}{2}} dt = \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} \sqrt{2} ds = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}. \\ & \therefore \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(x^2 + y^2)}\sigma} e^{-\frac{(\log \sqrt{x^2 + y^2} - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx dy = 2\pi e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}. \quad // \end{aligned}$$

## 問題 5.5 1 略解

(1)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi$  より明らか.

(2)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx$  より  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

(3) 
$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx &= \int_0^\infty x \left(\frac{e^{-ax^2}}{-2a}\right)' dx = \left[x \frac{e^{-ax^2}}{-2a}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{2a} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{-ax^2}}{-2a} + \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-ax^2} dx \quad (t = \sqrt{a}x \text{ で置換積分}) \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{a}} dt = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (a > 0). \end{aligned}$$

2 略解 有界閉領域  $D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) がつぎの条件を満たしているものとする:

(0)  $D = \bigcup_{n=1}^\infty D_n$ , (1)  $D_n \subset D_{n+1}^i$ , (2)  $\bigcup_{n=1}^\infty D_n^i = D^i$ .

同様に, 有界閉領域  $\Omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) がつぎの条件を満たしているものとする:

(0)  $D = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$ , (1)  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}^i$ , (2)  $\bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n^i = D^i$ .

連続関数  $f(x, y)$  は  $D$  で非負値であるから, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy$

は単調増加数列の極限值である. この場合, どの番号  $n$  においても有界閉領域  $D_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty D_n^i$

$= \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n^i$  が成り立つことから, 後述の被覆定理 (Heine-Borel) によって, ある番号  $p$  のとき

$D_n \subset \Omega_p^i \subset \Omega_p$  が成り立つ. これからつぎのことが導かれる:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy.$$

有界閉領域  $\{D_n\}_{n=1}^\infty$  と  $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$  の役割を入れ換えて考えて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy.$$

故に  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy$ . これは重積分の値のこのような極限值が集合  $D$  を取りつくす  $D$  内の有界閉領域  $D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) の取り方によらないことを示し

ている. //

**被覆定理 (Heine-Borel)**

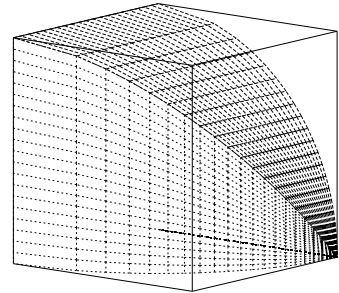
平面  $\mathbb{R}^2$  上の有界閉集合  $K$  が平面  $\mathbb{R}^2$  上の開集合  $D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) の和集合  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$  に含まれるとき, ある有限な番号  $N$  が存在して有界閉集合  $K$  は和集合  $\bigcup_{n=1}^N D_n$  に含まれる.

証明 補題が成り立たないと仮定する. このとき, どの番号  $n$  に対しても, 有界閉集合  $K$  は和集合  $\bigcup_{k=1}^n D_k$  に含まれてはいないから, ある  $p_n \in K \setminus \bigcup_{k=1}^n D_k$  が存在する. 4.2 D. **補題** により, 点列  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  のある部分列  $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  は有界閉集合  $K$  の点  $p_0$  に収束する.  $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$  であるから, この点  $p_0$  はある番号  $q$  の  $D_q$  に含まれている.  $D_q \subset D_{q+1}^i$  であるから, 点  $p_0$  は開集合  $D_{q+1}^i$  に含まれる. 故に, ある正の数  $r$  を半径とする中心  $p_0$  の開円板  $D_r(p_0)$  が  $D_{q+1}$  に含まれる.  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} = p_0$  であるから, 十分大きい番号  $k$  に対して  $p_{n_k} \in D_r(p_0)$  そしてその故に  $p_{n_k} \in D_{q+1}$  となる. 一方,  $k$  を十分大きく  $n_k > q+1$  となるようにとることができるが, この場合  $p_{n_k} \notin \bigcup_{l=1}^{n_k} D_l$  より  $p_{n_k} \notin D_{q+1}$ . これは矛盾であるから, 定理が成り立たねばならない. //

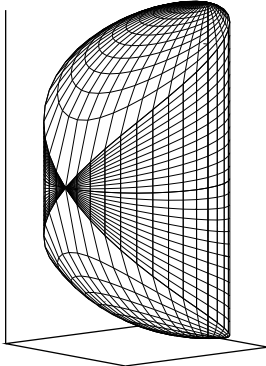
**問題 5.6** 1 略解 空間  $\mathbb{R}^3$  の領域

$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq y^2 + z^2 \leq a^2\}$  の体積は,

領域の対称性から第一象限にある部分の体積の8倍で



$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - y^2} dx dy = 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \sqrt{a^2 - y^2} dx dy = 8 \int_0^a (a^2 - y^2) dy = \frac{16}{3} a^3.$$



2 略解

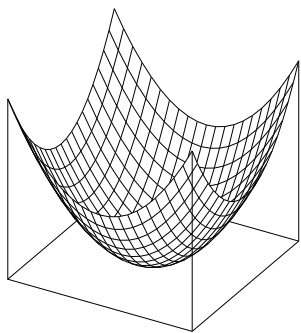
領域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq ax\}$  は極座標表示で

$$D = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}, r \leq a \cos \theta \right\}$$

と表されるので,

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a \cos \theta} d\theta = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \left( \pi - \frac{4}{3} \right) a^3. \quad // \end{aligned}$$

3 略解



$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a\}$  上の重積分

$\iint_D x^2 + y^2 \, dx dy$  を求める.

$$\begin{aligned} & \iint_D x^2 + y^2 \, dx dy \\ &= \int_{-a}^a \left( \int_{-a}^a x^2 + y^2 \, dx \right) dy = \int_{-a}^a \left[ \frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-a}^a dy \\ &= \int_{-a}^a \left\{ \frac{a^3}{3} + ay^2 - \left( \frac{-a^3}{3} - ay^2 \right) \right\} dy = \int_{-a}^a \frac{2a^3}{3} + 2ay^2 \, dy \\ &= \left[ \frac{2a^3 y}{3} + \frac{2ay^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{2a^4}{3} + \frac{2a^4}{3} - \left( \frac{-2a^4}{3} + \frac{-2a^4}{3} \right) = \frac{8a^4}{3}. \quad // \end{aligned}$$

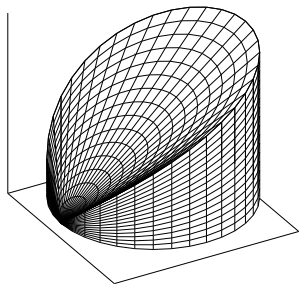
4 略解 この領域  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \leq x^2 + y^2, (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}$  の体積は

$$\begin{aligned} & \iint_{(x-a)^2 + y^2 \leq a^2} x^2 + y^2 \, dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^2 \cdot r \, dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2a)^4 \cos^4 \theta d\theta = 4a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 4a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( 1 + \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = a^4 \left[ \frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi a^4. \quad // \end{aligned}$$

5 略解

この領域  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}$

の体積は



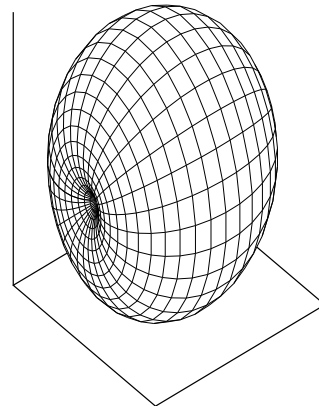
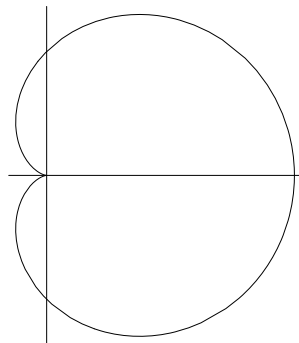
$$\begin{aligned} & \iint_{(x-a)^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r \cdot r \, dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2a)^3 \cos^3 \theta d\theta = \frac{16}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \dots = \frac{32}{9} a^3. \quad // \end{aligned}$$

6 略解  $xy$  平面上の Cardioid

$r = a(1 + \cos \theta)$  ( $-\pi < \theta \leq \pi$ ) の

$x$  軸のまわりの回転体  $R$  は, 空間の

極座標 (球座標) 系



$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \phi, \quad z = r \sin \theta \sin \phi \quad (r > 0, \theta \in (0, \pi), \phi \in (-\pi, \pi))$$

で考えると

$$R = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq r \leq a(1 + \cos \theta), 0 \leq \theta < \pi, -\pi < \phi \leq \pi \right\}.$$

$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$  であるので, この回転体の体積  $V$  は重積分の変数変換公式により

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dx dy dz = \iiint_R r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^{a(1+\cos \theta)} r^2 \sin \theta dr d\theta = 2\pi \int_0^\pi \left[ \frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_0^{a(1+\cos \theta)} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \frac{a^3(1+\cos \theta)^3}{3} \sin \theta d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} \left[ -\frac{(1+\cos \theta)^4}{4} \right]_0^\pi = \frac{8\pi a^3}{3}. \quad // \end{aligned}$$

7 略解 (1)

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{p^2}} dx dy dz = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{p^2}} e^{-\frac{y^2}{p^2}} e^{-\frac{z^2}{p^2}} dx dy dz = \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{p^2}} dx \right)^3 = \pi^{\frac{3}{2}} p^3.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+p^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2+z^2+p^2)^{\frac{5}{2}}} d\rho d\theta. \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2+z^2+p^2)^{\frac{5}{2}}} d\rho = \frac{2\pi}{3(z^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \iiint_{\mathbf{R}^2} \frac{p^2}{(x^2+y^2+z^2+p^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy dz = \frac{2\pi}{3} \int_{-\infty}^\infty \frac{p^2}{(z^2+p^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{2\pi}{3} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2+p^2}} \right]_{-\infty}^\infty = \frac{4\pi}{3}.$$

$$(4) \quad \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2+y^2+z^2)^p dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r^{2p+2} \sin \theta dr d\theta d\varphi = \begin{cases} \frac{4\pi}{2p+3} & (p > -\frac{3}{2}) \\ \infty & (p \leq -\frac{3}{2}). \end{cases}$$

$$(5) \quad \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz = \begin{cases} \infty & (p \geq -\frac{3}{2}) \\ \frac{4\pi}{2p+3} & (p < -\frac{3}{2}). \end{cases}$$

8 略解  $R > 0$  のとき  $a \in \mathbf{R}$  対して,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{x-a}{((a-x)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz \\ &= \int_{-R}^R (x-a) \iint_{y^2+z^2 \leq R^2-x^2} \frac{1}{((a-x)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dy dz dx \\ &= \int_{-R}^R (x-a) \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{r}{((a-x)^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} dr d\theta dx = 2\pi \int_{-R}^R (x-a) \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{r}{((a-x)^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} dr dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^R (x-a) \left[ -\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+r^2}} \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R \left( \frac{x-a}{|a-x|} + \frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+R^2}} \right) dx. \end{aligned}$$

$$\therefore I = \begin{cases} -4\pi R + 2\pi \int_{-R}^R \frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+R^2}} dx & (R < a) \\ -4\pi a + 2\pi \int_{-R}^R \frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+R^2}} dx & (0 \leq a \leq R). \end{cases}$$

微分積分学 1 3.9 有理関数, 無理関数, 三角関数の定積分 C. [3] より,

$$\int_{-R}^R \frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+R^2}} dx = \begin{cases} 2R - \frac{2R^3}{3a^2} & (0 < R \leq a) \\ \frac{4a}{3} & (0 \leq a < R) \end{cases}$$

が成り立つから

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{x-a}{((a-x)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz = \begin{cases} -\frac{4\pi R^3}{3a^2} & (R \leq a) \\ -\frac{4\pi a}{3} & (0 \leq a < R). \quad // \end{cases}$$

[9] Hint. 区間  $[0, 1] \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$  から  $S$  で囲まれた領域  $\Omega$  上への 1 対 1 写像

$\Phi(\theta, \rho, t) = (x(\theta, \rho, t), y(\theta, \rho, t), z(\theta, \rho, t))$  を考える:

$$\begin{cases} x(\theta, \rho, t) = \cos \theta + t \left( a \cos \rho \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \rho \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos \theta \\ y(\theta, \rho, t) = \sin \theta + t \left( a \cos \rho \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \rho \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta \\ z(\theta, \rho, t) = t \left( a \cos \rho \sin \frac{\theta}{2} + b \sin \rho \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ (0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \rho < 2\pi, 0 \leq t \leq 1). \end{cases}$$

$\alpha = a \cos \rho \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \rho \sin \frac{\theta}{2}$  と置くと, その偏微分係数等は

$$\begin{cases} \alpha_\theta = -\frac{1}{2} \left( a \cos \rho \sin \frac{\theta}{2} + b \sin \rho \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ \alpha_\rho = -a \sin \rho \cos \frac{\theta}{2} - b \cos \rho \sin \frac{\theta}{2} \\ \alpha_{\theta\rho} = \frac{1}{2} \left( a \sin \rho \sin \frac{\theta}{2} - b \cos \rho \cos \frac{\theta}{2} \right) \end{cases} \quad \text{となる. 写像 } \Phi \text{ のヤコビアン } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \rho, t)} \text{ は}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_\theta & x_\rho & x_t \\ y_\theta & y_\rho & y_t \\ z_\theta & z_\rho & z_t \end{vmatrix} &= (1 + \alpha t) t \begin{vmatrix} -\sin \theta & \alpha_\rho \cos \theta & \alpha \cos \theta \\ \cos \theta & \alpha_\rho \sin \theta & \alpha \sin \theta \\ 0 & -2\alpha_{\theta\rho} & -2\alpha_\theta \end{vmatrix} + t^2 \begin{vmatrix} \alpha_\theta \cos \theta & \alpha_\rho \cos \theta & \alpha \cos \theta \\ \alpha_\theta \sin \theta & \alpha_\rho \sin \theta & \alpha \sin \theta \\ \frac{\alpha}{2} & -2\alpha_{\theta\rho} & -2\alpha_\theta \end{vmatrix} \\ &= (1 + \alpha t) t ab = abt + abt^2 \left( a \cos \rho \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \rho \sin \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

$0 < a < b < a + b < 1$  のとき,  $abt \left( 1 + t \left( a \cos \rho \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \rho \sin \frac{\theta}{2} \right) \right) > 0$  であるから

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \times [0, 1]} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \rho, t)} \right| d\theta d\rho dt \\ &= \iiint_{[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \times [0, 1]} \left\{ abt + abt^2 \left( a \cos \rho \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \rho \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\} d\theta d\rho dt = 2\pi^2 ab. \quad // \end{aligned}$$

## 5.7

**問** 略解 . 二変数関数の一様連続性の観点からの説明と八変数連続関数の一様連続性の観点からの説明の二つを示す . 最初の説明 . ベクトルの成分は ,  $N_{i,j}^\Delta = (\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3)$  と置くと

$$\tilde{J}_1 = \begin{vmatrix} y_u(\xi_{i,j}^2, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^2) \\ z_u(\xi_{i,j}^3, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^3) \end{vmatrix}, \quad \tilde{J}_2 = \begin{vmatrix} z_u(\xi_{i,j}^3, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^3) \\ x_u(\xi_{i,j}^1, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^1) \end{vmatrix}, \quad \tilde{J}_3 = \begin{vmatrix} x_u(\xi_{i,j}^1, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^1) \\ y_u(\xi_{i,j}^2, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, \eta_{i,j}^2) \end{vmatrix}.$$

また  $\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1}) = (J_1, J_2, J_3)$  と置くと

$$J_1 = \begin{vmatrix} y_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \\ z_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} z_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & z_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \\ x_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} x_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & x_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \\ y_u(a_{i-1}, c_{j-1}) & y_v(a_{i-1}, c_{j-1}) \end{vmatrix}$$

と表される . そのとき , つぎが成り立つ :

$$\|N_{i,j}^\Delta\| = \sqrt{\tilde{J}_1^2 + \tilde{J}_2^2 + \tilde{J}_3^2}, \quad \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}.$$

$\|N_{i,j}^\Delta\| - \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\|$  は  $\mathbf{R}^3$  のベクトル  $N_{i,j}^\Delta$  および

$\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})$  の長さの差であるので , 三角不等式により

$$\left| \|N_{i,j}^\Delta\| - \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| \right| \leq \sqrt{(\tilde{J}_1 - J_1)^2 + (\tilde{J}_2 - J_2)^2 + (\tilde{J}_3 - J_3)^2}$$

が成り立つことに注意する . ここで , 5.4 二重積分の変数変換の公式の証明 の途中 **補題 1** で取り扱った六変数関数

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) &= x_u(u_1, v)y_v(u, v_2) - x_v(u, v_1)y_u(u_2, v) \\ (u, u_1, u_2, v, v_1, v_2) &\in \tilde{R} \equiv [a, b] \times [a, b] \times [a, b] \times [c, d] \times [c, d] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^6 \end{aligned}$$

を考えると ,

$$\tilde{J}_3 - J_3 = \tilde{J}(a_{i-1}, \xi_{i,j}^1, \xi_{i,j}^2, c_{j-1}, \eta_{i,j}^1, \eta_{i,j}^2) - \tilde{J}(a_{i-1}, a_{i-1}, a_{i-1}, c_{j-1}, c_{j-1}, c_{j-1})$$

となっている . さて

(a) 関数  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  は  $C^1$  級であるから , 偏導関数の連続性により , ある正の数  $M (> 1)$  を取ると , つぎが成り立つ :

$$\begin{cases} |x_u(u, v)| \leq M, & |x_v(u, v)| \leq M \\ |y_u(u, v)| \leq M, & |y_v(u, v)| \leq M \\ |z_u(u, v)| \leq M, & |z_v(u, v)| \leq M. \end{cases} \quad ((u, v) \in R)$$

(b) 有界閉区間  $R$  で上での偏導関数の一様連続性により , 任意の正の数  $\epsilon$  に対して ( $\frac{\epsilon}{8M}$  に着目して) ある正の数  $\delta$  を取ると , 任意の  $(u, v)$ ,  $(u', v') \in R$  に対して

$$\max\{|u - u'|, |v - v'|\} < \delta \implies \begin{cases} |x_u(u, v) - x_u(u', v')| < \frac{\epsilon}{8M}, & |x_v(u, v) - x_v(u', v')| < \frac{\epsilon}{8M} \\ |y_u(u, v) - y_u(u', v')| < \frac{\epsilon}{8M}, & |y_v(u, v) - y_v(u', v')| < \frac{\epsilon}{8M} \\ |z_u(u, v) - z_u(u', v')| < \frac{\epsilon}{8M}, & |z_v(u, v) - z_v(u', v')| < \frac{\epsilon}{8M} \end{cases}$$



が成り立つ．今，閉長方形  $R$  の分割  $\Delta$  を分割の細かさ  $|\Delta| < \delta$  となるよう細かくしておく．このとき，p.73 の **補題 1** の証明から  $|\tilde{J}_3 - J_3| \leq \frac{\epsilon}{2}$  がわかる．同様に， $|\tilde{J}_1 - J_1| \leq \frac{\epsilon}{2}$  および  $|\tilde{J}_2 - J_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$  がわかる．したがって

$$\begin{aligned} \left| \|N_{i,j}^\Delta\| - \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| \right| &\leq \sqrt{(\tilde{J}_1 - J_1)^2 + (\tilde{J}_2 - J_2)^2 + (\tilde{J}_3 - J_3)^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{4}} < \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ． //

第二の説明のために，つぎの八変数関数  $F$  を考える：

$$\begin{aligned} &F(u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4) \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} y_u(u_2, v_4) & y_v(u_4, v_2) \\ z_u(u_3, v_4) & z_v(u_4, v_3) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u(u_3, v_4) & z_v(u_4, v_3) \\ x_u(u_1, v_4) & x_v(u_4, v_1) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u(u_1, v_4) & x_v(u_4, v_1) \\ y_u(u_2, v_4) & y_v(u_4, v_2) \end{vmatrix}^2} \\ &(u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4) \in \tilde{R} \equiv [a, b] \times [a, b] \times [a, b] \times [a, b] \times [c, d] \times [c, d] \times [c, d] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^8. \end{aligned}$$

関数  $F$  は連続関数と連続関数の合成関数であるから， $(\mathbf{R}^8$  における) 有界閉集合  $\tilde{R}$  で連続そして一様連続である (参考 . 5.1 D. 積分可能性と一様連続性) . 任意の正の数  $\epsilon$  に対してある正の数  $\delta$  が存在してつぎが成り立つ：

$$\max_{i=1,2,3,4} \{|u_i - u'_i|, |v_i - v'_i|\} < \delta \implies |F(u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4) - F(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, v'_1, v'_2, v'_3, v'_4)| < \epsilon.$$

今，閉長方形  $R$  の分割  $\Delta$  を分割の細かさ  $|\Delta| < \delta$  となるよう細かくしておく．そのとき

$$\begin{cases} F(\xi_{i,j}^1, \xi_{i,j}^2, \xi_{i,j}^3, a_{i-1}, \eta_{i,j}^1, \eta_{i,j}^2, \eta_{i,j}^3, c_{j-1}) &= \|N_{i,j}^\Delta\| \\ F(a_{i-1}, a_{i-1}, a_{i-1}, a_{i-1}, c_{j-1}, c_{j-1}, c_{j-1}, c_{j-1}) &= \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| \end{cases}$$

であるから

$$-\epsilon < \|N_{i,j}^\Delta\| - \|\Phi_u(a_{i-1}, c_{j-1}) \times \Phi_v(a_{i-1}, c_{j-1})\| < \epsilon$$

が成り立つ． //

**問題 5.7** [1] 略解 . 平面上の極座標表示で  $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$  であるから，表面積

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + 1} dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} (D \text{ の面積}) = \sqrt{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

または，極座標表示で  $D = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}, r \leq 2a \cos \theta\}$  であるから，

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} \sqrt{2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{2} r dr \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2a \cos \theta} d\theta = 4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \sqrt{2}\pi a^2. \quad // \end{aligned}$$

2 略解 . 球面と円柱の交線は  $\begin{cases} x^2 + y^2 - ax = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \end{cases}$  , すなわち ,  $\begin{cases} x^2 + y^2 - ax = 0 \\ z^2 + ax - a^2 = 0 \end{cases}$

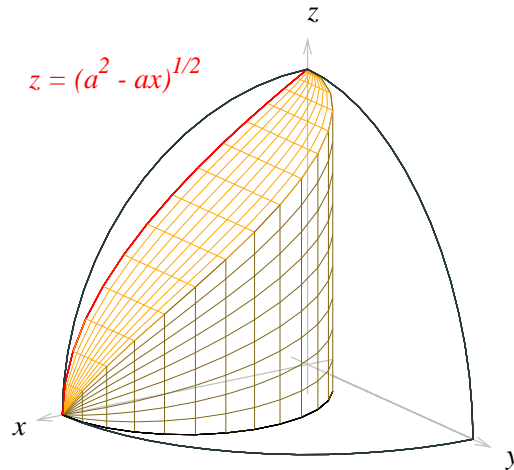
を満たす . 球内の円柱面の部分は  $\begin{cases} x^2 + y^2 - ax = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \leq 0 \end{cases}$  であるから ,

$\begin{cases} x^2 + y^2 - ax = 0 \\ z^2 + ax - a^2 \leq 0 \end{cases}$  を満たす . 故に ,

$\begin{cases} y = \pm\sqrt{ax - x^2} \\ -\sqrt{a^2 - ax} \leq z \leq \sqrt{a^2 - ax} \end{cases}$  を満たす .

$y = \sqrt{ax - x^2}$  のとき ,

$\begin{cases} y_x = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}} \\ y_z = 0 \end{cases}$  であるから



$$1 + y_x(x, z)^2 + y_z(x, z)^2 = 1 + \frac{(a - 2x)^2}{4(ax - x^2)} = \frac{a^2}{4(ax - x^2)}$$

となる . 表面積は  $\Omega = \{(x, z) \mid z^2 + ax - a^2 \leq 0\}$  上の重積分

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{\Omega} \frac{a}{2\sqrt{(ax - x^2)}} dz dx = 4 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - ax}} \frac{a}{2\sqrt{(ax - x^2)}} dz dx \\ &= 4 \int_0^a \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} dx = 4a\sqrt{a} [\sqrt{x}]_0^a = 4a^2. \quad // \end{aligned}$$

3 回転面の表面積 略解 .  $C^1$  級関数  $y = f(x) \geq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) のグラフを  $x$  軸のまわりに一回転してできる回転面  $y^2 + z^2 = f(x)^2$  ( $a \leq x \leq b$ ) に対して ,

$$z_x = \frac{f(x)f'(x)}{z}, \quad z_y = -\frac{y}{z}$$

が成り立つ .

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{f(x)^2 f'(x)^2 + y^2}{z^2}} = \frac{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}}{z} = \frac{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}$$

であるから , 表面積  $S$  に対して

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_a^b dx \int_{-f(x)}^{f(x)} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dy = 4 \int_a^b dx \int_0^{f(x)} \frac{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} dy \\ &= 4 \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx \int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} dy \\ &= 4 \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx \left[ \sin^{-1} \frac{y}{f(x)} \right]_0^{f(x)} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad // \end{aligned}$$

4 略解.  $y = \frac{1}{x}$  ( $x \geq 1$ ) であるから, 表面積  $S$  と 体積  $V$  は

$$V = \int_1^{\infty} \pi y^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \pi,$$

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} y \sqrt{1+y^2} dx > 2\pi \int_1^{\infty} y dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \log n = \infty. \quad //$$

5 略解. 円環体 (トーラス) の表面積  $S$  を求めよう.

半円  $y = a + \sqrt{R^2 - x^2}$  ( $-R \leq x \leq R$ ) の  $x$  軸の周りの回転体の表面積  $S_1$  を求め,

半円  $y = a - \sqrt{R^2 - x^2}$  ( $-R \leq x \leq R$ ) の  $x$  軸の周りの回転体の表面積  $S_2$  を加える.

$$S_1 = 2\pi \int_{-R}^R (a + \sqrt{R^2 - x^2}) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R \left\{ \frac{aR}{\sqrt{R^2 - x^2}} + R \right\} dx,$$

$$S_2 = 2\pi \int_{-R}^R (a - \sqrt{R^2 - x^2}) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R \left\{ \frac{aR}{\sqrt{R^2 - x^2}} - R \right\} dx.$$

故に,

$$S = S_1 + S_2 = 4\pi aR \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4\pi aR \left[ \sin^{-1} \frac{x}{R} \right]_{-R}^R = 4\pi^2 aR. \quad //$$

6 略解.  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  ( $-a \leq x \leq a$ ) の  $x$  軸の周りの回転体の表面積  $S$  を求めよう.

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a \leq x \leq a), \quad 1 + y'^2 = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}.$$

$y\sqrt{1+y'^2} = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}$  であるから, 表面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-a}^a \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx \\ &= \frac{4\pi b}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{a\sqrt{a^2 - b^2}} \sqrt{a^4 - t^2} dt = \frac{4\pi b}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \left[ \frac{1}{2} \left( t\sqrt{a^4 - t^2} + a^4 \sin^{-1} \frac{t}{a^2} \right) \right]_0^{a\sqrt{a^2 - b^2}} \\ &= 2\pi b \left( b + a \frac{\sin^{-1} e}{e} \right), \quad \text{ただし } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad // \end{aligned}$$

7 略解. 領域は  $z$  軸の周りの回転体であることから,

$$V = \iiint_{\log \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1} dx dy dz = \int_{-\infty}^1 \left\{ \iint_{x^2 + y^2 \leq e^{2z}} dx dy \right\} dz = \int_{-\infty}^1 \pi e^{2z} dz = \pi \left[ \frac{e^{2z}}{2} \right]_{-\infty}^1 = \frac{\pi e^2}{2}.$$

または,  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq e^2\}$  ( $\subset \mathbf{R}^2$ ) であること

から,  $V = \iiint_{\log \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1} dx dy dz = \iint_D \left\{ 1 - \log \sqrt{x^2 + y^2} \right\} dx dy$  を計算しても得られる.

曲面  $z = f(x, y)$  の表面積は

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dxdy = \iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^e \frac{\sqrt{r^2+1}}{r} r dr d\theta \\
&= 2\pi \int_0^e \sqrt{r^2+1} \, dr = \frac{2\pi}{2} \left[ r\sqrt{r^2+1} + \log|r + \sqrt{r^2+1}| \right]_0^e \\
&= \pi \left( e\sqrt{e^2+1} + \log|e + \sqrt{e^2+1}| \right). \quad //
\end{aligned}$$

8 略解 . 双曲放物面  $z = 2xy$  と回転放物面  $z = x^2 + y^2$  に対して

$$z_x^2 + z_y^2 = 4(x^2 + y^2) \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

が一致するので領域  $D (\subset \mathbf{R}^2)$  上の表面積は  $\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, dxdy$  .

9 略解 . 表面  $S_h$  は  $z = 1 - \sqrt{1-x^2-y^2}$  ( $x^2 + y^2 \leq 2h - h^2 = 1 - (h-1)^2$ ) のグラフ .

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad \text{より,} \quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} .$$

故に, 表面積  $S$  は

$$\begin{aligned}
S(h) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2h-h^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2h-h^2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{1-r^2} \right]_0^{\sqrt{2h-h^2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \left( 1 - \sqrt{1-2h+h^2} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - (1-h)) \, d\theta = 2\pi h \quad (0 \leq h \leq 1).
\end{aligned}$$

明らかに,  $S(h) = \frac{S(1)}{2} = \pi$  となる  $h = \frac{1}{2}$  .  $//$

**問題 5.8** 1 略解 . 有界領域  $D$  上の連続な関数  $|f(x, y)|$  の最大値を

$M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|$  と置く .  $|f(x, y)| \leq M$  ( $(x, y) \in D$ ) であるから

$$\left\{ \iint_D |f(x, y)|^n \, dxdy \right\}^{\frac{1}{n}} \leq \left\{ \iint_D M^n \, dxdy \right\}^{\frac{1}{n}} = MA(D)^{\frac{1}{n}}, \quad 0 < A(D) = \iint_D \, dxdy < \infty .$$

故に, 1.2 C. 4 より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \iint_D |f(x, y)|^n \, dxdy \right\}^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} MA(D)^{\frac{1}{n}} = M$  .

つぎに, 関数  $f(x, y)$  は連続であるから, 1.9 B. 最大値・最小値定理により  $M = |f(x_0, y_0)|$  となる  $(x_0, y_0) \in D$  が取れる . 関数  $|f(x, y)|$  の連続性から, 任意に小さい正の数  $\epsilon$  に対してある正の数  $\delta$  を

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \implies |f(x, y)| > M - \epsilon$$

が成り立つように取れる . その場合に

$$D_\delta = \left\{ (x, y) \in D \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \right\} \quad \text{と} \quad 0 < A(D_\delta) = \iint_{D_\delta} \, dxdy < \infty$$

に対して,

$$\left\{ \iint_D |f(x, y)|^n dx dy \right\}^{\frac{1}{n}} \geq \left\{ \iint_{D_\delta} (M - \epsilon)^n dx dy \right\}^{\frac{1}{n}} = (M - \epsilon) A(D_\delta)^{\frac{1}{n}}$$

が成り立つ. 故に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \iint_D |f(x, y)|^n dx dy \right\}^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (M - \epsilon) A(D_\delta)^{\frac{1}{n}} = M - \epsilon \quad (\forall \epsilon > 0).$$

これは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \iint_D |f(x, y)|^n dx dy \right\}^{\frac{1}{n}} \geq M$$

を意味しているから,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \iint_D |f(x, y)|^n dx dy \right\}^{\frac{1}{n}} = M$  が示された. //

□ 略解.  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  上で  $\{f(x) - f(y)\}\{g(x) - g(y)\} \geq 0$  ( $\forall(x, y \in D)$ ) であるから,

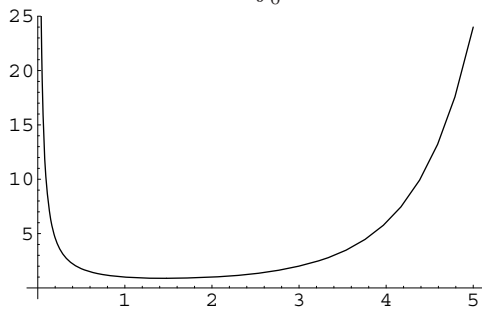
$$I = \iint_D \{f(x) - f(y)\}\{g(x) - g(y)\} dx dy \geq 0.$$

このとき

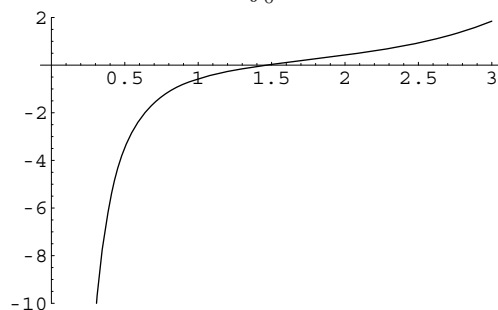
$$\begin{aligned} 0 \leq I &= \iint_D \{f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y)\} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(x)g(x) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x)g(y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(y)g(x) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 f(y)g(y) dx dy \\ &= \int_0^1 f(x)g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 g(y) dy - \int_0^1 f(y) dy \cdot \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 f(y)g(y) dy \\ &= 2 \left\{ \int_0^1 f(x)g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 g(x) dx \right\}. \quad // \end{aligned}$$

## 問題 5.9

$$y = \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$



$$y = \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \log t dt$$



□ 略解.  $f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$  ( $t > 0$ ) に対して,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty f(x, t) dt \quad (x > 0) \quad \text{そして} \quad 0 \leq \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = e^{-t} t^{x-1} \log t \leq e^{-t} t^x \quad (t \geq 1)$$

であるから,  $(0 <) \frac{x_0}{2} \leq x \leq x_0$  のとき

$$0 \leq \int_M^\infty \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \leq \int_M^\infty e^{-t} t^{x_0} dt \longrightarrow 0 \quad (M \longrightarrow \infty).$$

$x_0 > 0$  は任意に取れるので 3.6 C. **定理 2** から,

$$\frac{d}{dx} \int_1^\infty f(x, t) dt = \int_1^\infty \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (x > 0)$$

が成り立つ. つぎに 関数  $\int_0^1 \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} \log t dt \quad (x > 0)$  を考える.

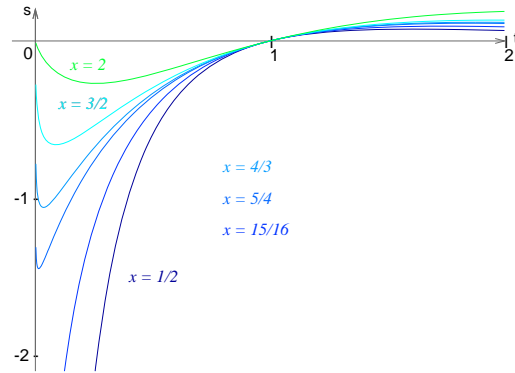
$x \geq 1$  のとき L'Hospital の定理から  $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} t^{x-1} \log t = 0$  となることがわかるから, 関数

$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = e^{-t} t^{x-1} \log t$  は  $t \geq 0$  で連続な関数と見なせる. 故に, 3.6 C. **定理 1** から,

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x, t) dt = \int_0^1 \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (x > 0)$$

が成り立つ.

右図は  $s = e^{-t} t^{x-1} \log t$



$0 < x < x' \leq 1$  のとき

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt - \int_0^1 \frac{\partial f(x', t)}{\partial x} dt \right| &= \left| \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} \log t dt - \int_0^1 e^{-t} t^{x'-1} \log t dt \right| \\ &= \int_0^1 e^{-t} (t^{x'-1} - t^{x-1}) \log t dt \leq \int_0^1 (t^{x'-1} - t^{x-1}) \log t dt \\ &= \int_0^1 t^{x'-1} \log t dt - \int_0^1 t^{x-1} \log t dt = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x'^2}. \end{aligned}$$

これは関数  $\int_0^1 \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} \log t dt$  が  $0 < x \leq 1$  で連続であることを示して

いるので, 3.6 C. **定理 3** から,

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x, t) dt = \int_0^1 \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (x > 0)$$

が成り立つ. 以上のことから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(x, t) dt &= \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^1 f(x, t) dt + \int_1^\infty f(x, t) dt \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + \int_1^\infty \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt = \int_0^\infty \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (x > 0). \quad // \end{aligned}$$

**問題 6.1** [1] 曲面 Helicoid の一部 (参考. 4.4 接平面と法線 問題 4.4 [2])

$$\text{曲面} \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = 2v \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi) \end{cases} \quad \text{の法線ベクトルは}$$

$N = X_u(u, v) \times X_v(u, v) = (2 \sin v, -2 \cos v, u) \in \mathbf{R}^3$ . 故に, 表面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \|N\| \, dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{u^2 + 4} \, dudv = 2\pi \int_0^1 \sqrt{u^2 + 4} \, du \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \left[ u\sqrt{u^2 + 4} + 4 \log |u + \sqrt{u^2 + 4}| \right]_0^1 = \pi \left( \sqrt{5} + 4 \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right). \quad // \end{aligned}$$

**6.2** [1] ベクトル場の発散の定義に基づいて, 計算して求める.  $\operatorname{div} \hat{r} = \frac{2}{r}$ ,

$$\operatorname{div} \hat{\theta} = \frac{z}{r\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{div} \hat{\varphi} = 0.$$

注. 空間  $\mathbf{R}^3$  の球座標系  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$  ( $0 < r$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

$0 \leq \varphi < 2\pi$ ) に関して 4.6 C [3] を参照する. ベクトル場  $\hat{r} = \left( \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right)$  であり,

さらにベクトル場  $\hat{\theta} = \left( \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$  と  $\hat{\varphi} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$  を考えると,

$\hat{\theta} = \frac{\theta}{\|\theta\|}$  であり,  $\hat{\varphi} = \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$  となっている. 三つのベクトル場  $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{r}\}$  は球

座標系に関する正規直交基である.

[2] **略解**  $\Omega$  が直方体  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f] \in \mathbf{R}^3$  の場合を考える.  $\Omega$  の境界  $S$  は 6

個の正方形の平面領域からなるので, 互いに向かい合う二面  $S_1 = [a, b] \times [c, d] \times \{e\}$  と

$S_2 = [a, b] \times [c, d] \times \{f\}$ ,  $S_3 = [a, b] \times \{c\} \times [e, f]$  と  $S_4 = [a, b] \times \{d\} \times [e, f]$ ,

$S_5 = \{a\} \times [c, d] \times [e, f]$  と  $S_6 = \{b\} \times [c, d] \times [e, f]$  を考える.

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_{S_{2i-1}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_{2i}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \right\}.$$

面  $S_1$  の法線ベクトル  $\mathbf{n} = (0, 0, -1) \in \mathbf{R}^3$  また  $S_2$  の法線ベクトル  $\mathbf{n} = (0, 0, 1) \in \mathbf{R}^3$  と考えることができるので,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS &= - \iint_{[a,b] \times [c,d]} h(x, y, e) \, dx dy + \iint_{[a,b] \times [c,d]} h(x, y, f) \, dx dy \\ &= \iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} \frac{\partial h}{\partial z} \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial z} \, dx dy dz. \end{aligned}$$

が成り立つ. 他の面についても同様に考えて,

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \, dx dy dz = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx dy dz.$$

**問題 6.2** [1] 略解 . ベクトル場  $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ) .

(1)  $\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$  であるから , 発散量定理から明らか .

(2) 曲面  $S$  が原点  $\mathbf{O}$  を中心とする半径  $\epsilon$  の球面  $S_\epsilon$  であるとき , 球面の外向きの単位法ベクトル場は  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  であるから ,

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r^2} .$$

それ故

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\epsilon} \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{S_\epsilon} dS = \frac{\text{球面 } S_\epsilon \text{ の表面積}}{4\pi\epsilon^2} = 1 .$$

(3)  $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} = 0$  を示せ ( 参考 問題 4.6 [6] )

(4) 原点  $\mathbf{O} \notin V$  のときには , 発散量定理から

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dx dy dz = 0 .$$

原点  $\mathbf{O} \in V$  のときには ,  $\mathbf{O}$  を中心とする十分小さい半径  $\epsilon (> 0)$  の球面  $S_\epsilon$  を球面  $S_\epsilon$  が領域  $V$  のうちにあるようにとると ( 外側の ) 曲面  $S$  と ( 内側の ) 球面  $S_\epsilon$  で囲まれた領域  $V_0 (\subset V)$  に発散量定理を適用して

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_0} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dx dy dz = 0 , \quad \text{すなわち ,}$$

$$\int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = 1$$

が成り立つ . //

[2] 略解 . 曲線  $C$  のパラメータ表示は  $x = \cos u, y = \sin 2u$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ ) であるから , 曲線  $C$  を  $y$  軸の周りに回転させてできる回転面  $S$  のパラメータ表示は

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \sin 2u, \quad z = \cos u \sin v \quad ((u, v) \in D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi)) .$$

そして , 回転面  $S$  の外向き法線ベクトルは

$$\mathbf{N} = \left( \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right) = (2 \cos 2u \cos u \cos v, \sin u \cos u, 2 \cos 2u \cos u \sin v)$$

と計算される . したがって

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_D \mathbf{Y} \cdot \mathbf{N} dudv = \iint_D \sin 2u \sin u \cos u dudv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2u}{2} du \right\} dv \\ &= \frac{\pi^2}{2} = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{Y} dx dy dz = \int_\Omega 1 dx dy dz = \Omega \text{ の体積 .} \end{aligned}$$



**問題 6.3** 問 略解 . 線積分が平面の座標系の変換の下で不変な量であることを示す .

平面  $\mathbf{R}^2$  上の座標系の  $C^1$  級変換  $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$  のもとでは ,

曲線  $C$  の位置を表す  $C^1$  級パラメータ表示  $C : x = x(t), y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$  が

滑らかな曲線  $\tilde{C}$  の  $C^1$  級パラメータ表示  $\tilde{C} : u = u(t), v = v(t) \quad (a \leq t \leq b)$  と

$\begin{cases} x(t) = \varphi(u(t), v(t)) \\ y(t) = \psi(u(t), v(t)) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b)$  という関係が成り立つ .

このとき , 一次微分形式  $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$  の表現は

$\begin{cases} dx = \varphi_u(u, v)du + \varphi_v(u, v)dv \\ dy = \psi_u(u, v)du + \psi_v(u, v)dv \end{cases}$  を通して

$$\begin{aligned} \omega &= f(x, y)dx + g(x, y)dy \\ &= f(\varphi(u, v), \psi(u, v))(\varphi_u(u, v)du + \varphi_v(u, v)dv) + g(\varphi(u, v), \psi(u, v))(\psi_u(u, v)du + \psi_v(u, v)dv) \\ &= \left( f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_u(u, v) + g(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_u(u, v) \right) du \\ &\quad + \left( f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_v(u, v) + g(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_v(u, v) \right) dv \\ &= \left( f(\varphi, \psi)\varphi_u + g(\varphi, \psi)\psi_u \right) du + \left( f(\varphi, \psi)\varphi_v + g(\varphi, \psi)\psi_v \right) dv \end{aligned}$$

と変換される . すなわち ,  $\omega = \tilde{f}(u, v)du + \tilde{g}(u, v)dv$  としての表現は

$$\begin{cases} \tilde{f}(u, v) = f(\varphi, \psi)\varphi_u + g(\varphi, \psi)\psi_u & \left( \text{ここで } \varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \psi_u = \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \\ \tilde{g}(u, v) = f(\varphi, \psi)\varphi_v + g(\varphi, \psi)\psi_v & \left( \text{ここで } \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \psi_v = \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \end{cases}$$

で与えられる . このとき

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy &= \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t) + g(\varphi(u(t), v(t)), \psi(u(t), v(t)))y'(t) dt \\ &= \int_a^b \left\{ f(\varphi(u(t), v(t)), \psi(u(t), v(t)))(\varphi_u u'(t) + \varphi_v v'(t)) \right. \\ &\quad \left. + g(\varphi(u(t), v(t)), \psi(u(t), v(t)))(\psi_u u'(t) + \psi_v v'(t)) \right\} dt \\ &= \int_a^b \left\{ \left( f(\varphi, \psi)\varphi_u + g(\varphi, \psi)\psi_u \right) u'(t) \right. \\ &\quad \left. + \left( f(\varphi, \psi)\varphi_v + g(\varphi, \psi)\psi_v \right) v'(t) \right\} dt \\ &= \int_{\tilde{C}} \tilde{f}(u, v)du + \tilde{g}(u, v)dv . \end{aligned}$$

これは線積分  $\int_C \omega$  が平面  $\mathbf{R}^2$  上の座標系の取り方によらないこと , すなわち ,

線積分  $\int_C \omega$  は平面  $\mathbf{R}^2$  上の  $C^1$  級座標変換に対して不変であることを示している . //

6.4 問 略解 参考 5.3 重積分の変数変換 B 例 .) 領域  $D$  の境界  $\partial D$  は曲線

$$\begin{cases} C_1 : x = r \cos \alpha, & y = r \sin \alpha & (0 \leq r \leq f(\alpha)) \\ C : x = f(\theta) \cos \theta, & y = f(\theta) \sin \alpha & (\alpha \leq \theta \leq \beta) \\ C_2 : x = (f(\beta) - r) \cos \beta, & y = (f(\beta) - r) \sin \beta & (0 \leq r \leq f(\beta)) \end{cases}$$

からなるので,  $D$  の面積は  $\partial D$  上の線積分

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} -r \sin \theta (-r \sin \theta + r'(\theta) \cos \theta) + r \cos \theta (r \cos \theta + r' \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta. \end{aligned}$$

何故ならば,  $\frac{1}{2} \int_{C_1} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{C_2} r^2 d\theta = 0$  であるから. //

**問題 6.4** ①  $\frac{\partial(x^3 + xy^2 + y)}{\partial y} = 2xy + 1 = \frac{\partial(x^2y + x)}{\partial x}$  であるから, 一次微分形式  $\omega = (x^3 + xy^2 + y)dx + (x^2y + x)dy$  は完全である. いま,  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  に対して曲線  $\gamma$  を

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & (0 \leq t \leq x) \\ (x, t-x) & (x \leq t \leq x+y) \end{cases}$$

と置く. このとき

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{\gamma} (x^3 + xy^2 + y)dx + (x^2y + x)dy = \int_0^x t^3 dt + \int_0^{x+y} (x^2(t-x) + x) dt \\ &= \frac{x^4}{4} + \left[ \frac{x^2(t-x)^2}{2} + xt \right]_x^{x+y} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + xy \end{aligned}$$

に対して,  $\omega = df$  が成り立つ. //

② 一次微分形式

$$\omega = p(x, y) dx + q(x, y) dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

が  $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$  で完全 (exact) ならば,  $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$  上の関数  $f(x, y)$  が存在して  $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$  上  $\omega = df$  が成り立つ. このとき, 6.4 C. Green の定理 系 3 により,  $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$  内の滑らかな閉曲線  $C$  に対して

$$\int_C \omega = 0$$

が成り立つ. 今, 円  $C : (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \quad (0 \leq t < 2\pi)$  を考えると,

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} \left\{ p(\cos t, \sin t)(-\sin t) + q(\cos t, \sin t) \cos t \right\} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0.$$

これは, 一次微分形式  $\omega$  が  $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$  で完全 (exact) でないことを意味している. //

③ 一次微分形式  $(-x + 3x^2y)dx + (x^3 - y)dy$  は  $\mathbf{R}^2$  で完全であるから,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-x + 3x^2y)dx + (x^3 - y)dy = \int_0^1 (-xt + 3x^2yt^3) x dt + \int_0^1 (x^3t^3 - yt) y dt \\ &= -x^2 \int_0^1 t dt + 3x^3y \int_0^1 t^3 dt + x^3y \int_0^1 t^3 dt - y^2 \int_0^1 t dt = -\frac{x^2}{2} + x^3y - \frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

に対する,  $f(x, y) = c$  ( $c \in \mathbf{R}$ ) が解曲線となる. //

**問題 6.5** [1] ベクトル場  $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ) を使うと,

$$(1) \quad \text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{div grad } r = \frac{2}{r}, \quad \text{grad } \log r = \frac{\mathbf{r}}{r^2}, \quad \text{div grad } \log r = \frac{1}{r^2},$$

$$\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \text{div grad } \frac{1}{r} = 0 \quad ((x, y, z) \neq \mathbf{0} \in \mathbf{R}^3).$$

$$(2) \quad \text{grad } \Phi = \begin{cases} \frac{4\pi R^3 \mathbf{r}}{3r^3} & (R \leq r) \\ \frac{4\pi \mathbf{r}}{3} & (0 \leq r < R) \end{cases}, \quad \text{div grad } \Phi = \begin{cases} 0 & (R \leq r) \\ 4\pi & (0 \leq r < R) \end{cases}.$$

**問題 6.6** [1]  $C^2$  級関数  $f(x, y, z)$  に対して,  $\text{grad } f = (f_x, f_y, f_z)$  であるから

$$\text{rot grad } f = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = 0.$$

[2]  $\mathbf{A}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$  ( $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ) とすると,

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

[3]  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (a, b, c) \times (x, y, z) = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$  ( $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ) から,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial (ay - bx)}{\partial y} - \frac{\partial (cx - az)}{\partial z}, \frac{\partial (bz - cy)}{\partial z} - \frac{\partial (ay - bx)}{\partial x}, \frac{\partial (cx - az)}{\partial x} - \frac{\partial (bz - cy)}{\partial y} \right) \\ &= 2\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

[4] 空間  $\mathbf{R}^3$  の位置  $(x, y, z)$  を表す極座標系を,  $\phi$  を  $zx$  平面内での  $z$  軸からの正の向きの回転角として, つぎの様に考える:

$$x = r \sin \theta \sin \phi, \quad y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta \cos \phi \quad (0 < r, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi).$$

$y_0 = R \cos \theta_0$  ( $0 < \exists \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ) とすると, 曲線  $C$  のパラメータ表示はつぎのようになる:

$$C : x = R \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad y = y_0, \quad z = R \sin \theta_0 \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

球面  $S^2$  の外向き法線ベクトル  $\mathbf{N}$  と曲線  $C$  の接線ベクトル  $\mathbf{T}$  は

$$\mathbf{N}(\theta, \phi) = R^2 \sin \theta (\sin \theta \sin \phi, \cos \theta, \sin \theta \cos \phi), \quad \mathbf{T}(\varphi) = R \sin \theta_0 (\cos \varphi, 0, -\sin \varphi).$$

$\text{rot } \mathbf{V} = (0, 0, 2)$  また 曲線  $C$  上で  $\mathbf{V} = (-R \cos \theta_0, R \sin \theta_0 \sin \varphi, 0)$  であるから

$\text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}(\theta, \phi) = 2R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi$  また  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}(\varphi) = -R^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cos \varphi$ . これらから

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_c ds = \int_0^{2\pi} \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}(\varphi) d\varphi = -R^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \text{そして}$$

$$\int_{(C)} \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\theta_0} 2R^2 \sin^2 \theta d\theta = 0.$$

5 空間極座標系の下で、球面  $S^2$  の外向き法線ベクトル  $N$  と曲線  $C$  の接線ベクトル  $T$  は

$$N(\theta, \phi) = R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad T(\varphi) = R \sin \theta_0 (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

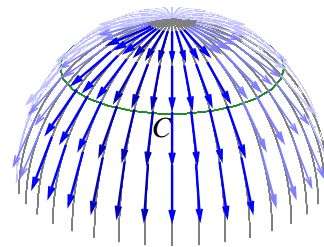
ベクトル場  $V = (R \cos \theta \cos \phi, R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta)$

であるから、 $V \cdot T(\varphi) = 0$  . また

$$\text{rot } V = \left( -\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right) = (-2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi, 0)$$

であるから  $\text{rot } V \cdot N = 0$  . これらから、

$$\int_C V \cdot t_c ds = \int_0^{2\pi} V \cdot T(\varphi) d\varphi = \int_{(C)} \text{rot } V \cdot n dS = 0. \quad //$$



6 半径  $R (> 0)$  の球面  $S^2$  の近傍で定義されたベクトル場  $V_0(x, y, z) = (-y, x, 0)$  および  $V_1(x, y, z) = \left( \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (xz, yz, -(x^2 + y^2))$  に着目する . ベクトル場  $V$  は関数  $\alpha(x, y, z) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  によってつぎのように表される :

$$V(x, y, z) = -R \left( \frac{xz}{x^2 + y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{yz}{x^2 + y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) = \alpha V_0 - \alpha V_1.$$

一般に、つぎの公式が成り立っていることは容易に計算される :

公式

任意のベクトル場  $V, W$  と任意の関数  $f(x, y, z)$  (どれも  $C^1$  級とする) に対して、

$$\text{rot } (V + W) = \text{rot } V + \text{rot } W, \quad \text{rot } fV = f \text{rot } V + (\text{grad } f) \times V.$$

今の場合、 $V = \alpha V_0 - \alpha V_1$  であるから

$$\begin{aligned} \text{rot } V &= \text{rot } \alpha V_0 - \text{rot } \alpha V_1 \\ &= \alpha \text{rot } V_0 + (\text{grad } \alpha) \times V_0 - \alpha \text{rot } V_1 - (\text{grad } \alpha) \times V_1. \end{aligned}$$

さて、 $V_0$  は [例 1](#) で調べたベクトル場であるから  $\text{rot } V_0 = (0, 0, 2)$  , また  $V_1$  は [5](#) におけるベクトル場であるから  $\text{rot } V_1 = \left( -\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right)$  . 故に

$$\alpha \text{rot } V_0 - \alpha \text{rot } V_1 = \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2 \right).$$

一方、

$$\text{grad } \alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = R \left( \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, 0 \right) = -\frac{R}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, 0)$$

であるから、ベクトル積を計算して (参照 p.19)

$$\begin{aligned}
(\text{grad } \alpha) \times V_0 &= -\frac{R}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, 0) \times (-y, x, 0) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}(0, 0, -1) \\
(\text{grad } \alpha) \times V_1 &= -\frac{R}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, 0) \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(xz, yz, -(x^2 + y^2)) = \frac{R}{x^2 + y^2}(y, -x, 0)
\end{aligned}$$

が得られる．以上のことから

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{V} &= \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2\right) + \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}}(0, 0, -1) - \frac{R}{x^2 + y^2}(y, -x, 0) \\
&= \frac{R}{x^2 + y^2}(y, -x, \sqrt{x^2 + y^2}).
\end{aligned}$$

$$\text{明らかに, } \text{rot } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{R}{x^2 + y^2}(y, -x, \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad //$$

## 問題 6.7 1 略解．直方体領域 $R$ で

$$h_y(x, y, z) = g_z(x, y, z), \quad f_z(x, y, z) = h_x(x, y, z), \quad g_x(x, y, z) = f_y(x, y, z)$$

が成り立っていることから，容易に  $\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^x f(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y g(x_0, t, z) dt + \int_{z_0}^z h(x_0, y_0, t) dt$  の偏導関数が計算される：

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x(x, y, z) = f(x, y, z) \\ \varphi_y(x, y, z) = \int_{x_0}^x f_y(t, y, z) dt + g(x_0, y, z) = \int_{x_0}^x g_x(t, y, z) dt + g(x_0, y, z) = g(x, y, z) \\ \varphi_z(x, y, z) = \int_{x_0}^x f_z(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y g_z(x_0, t, z) dt + h(x_0, y_0, z) \\ \quad = \int_{x_0}^x h_x(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y h_y(x_0, t, z) dt + h(x_0, y_0, z) = h(x, y, z). \end{array} \right.$$

2 略解． $\mathbf{A} = (\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z))$  と置くと，

$$\begin{aligned}
\alpha(x, y, z) &= \int_0^1 t^2 \{-2xz - y^2\} dt = \frac{-2xz - y^2}{3}, \quad \beta(x, y, z) = \int_0^1 t^2 \{xy - z^2\} dt = \frac{yz - z^2}{3}, \\
\gamma(x, y, z) &= \int_0^1 t^2 \{yz + 2x^2\} dt = \frac{yz + 2x^2}{3}.
\end{aligned}$$

3 略解．原点  $(0, 0, 0) \in D$  の場合を考える．関数  $\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)$  がつぎの偏微分方程式を満たすことをしめす：

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_y(x, y, z) - \beta_z(x, y, z) = f(x, y, z) \\ \alpha_z(x, y, z) - \gamma_x(x, y, z) = g(x, y, z) \\ \beta_x(x, y, z) - \alpha_y(x, y, z) = h(x, y, z) \end{array} \quad ((x, y, z) \in D). \right.$$

さて，発散  $\text{div } \mathbf{B} = f_x(x, y, z) + g_y(x, y, z) + h_z(x, y, z) = 0$  および

$$\frac{d}{dt} \left\{ t^2 f(tx, ty, tz) \right\} = 2t f(tx, ty, tz) + t^2 \left\{ x f_x(tx, ty, tz) + y f_y(tx, ty, tz) + z f_z(tx, ty, tz) \right\}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
& \gamma_y(x, y, z) - \beta_z(x, y, z) \\
= & \frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 t \{ yf(tx, ty, tz) - xg(tx, ty, tz) \} dt - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 t \{ xh(tx, ty, tz) - zf(tx, ty, tz) \} dt \\
= & \int_0^1 2t f(tx, ty, tz) dt + \int_0^1 t^2 \{ yf_y(tx, ty, tz) - xg_y(tx, ty, tz) - xh_z(tx, ty, tz) + zf_z(tx, ty, tz) \} dt \\
= & \int_0^1 \frac{d}{dt} \{ t^2 f(tx, ty, tz) \} dt - \int_0^1 t^2 x \{ f_x(tx, ty, tz) + g_y(tx, ty, tz) + h_z(tx, ty, tz) \} dt \\
= & \left[ t^2 f(tx, ty, tz) \right]_0^1 - \int_0^1 t^2 x \operatorname{div} \mathbf{B} dt = f(x, y, z) \quad \text{が成り立つ. 他も同様に計算される.} \quad //
\end{aligned}$$

4 略解.  $\alpha(x, y, z) = 0$ ,  $\beta(x, y, z) = xy$ ,  $\gamma(x, y, z) = x^2 + yz$ .

5 略解. Poisson の方程式  $\Delta \rho = \operatorname{div} \mathbf{B}$  の解  $\rho(x, y, z)$  ( $(x, y, z) \in D$ ) を使って,  $D$  上の  $C^1$  級ベクトル場  $\mathbf{B} - \operatorname{grad} \rho$  を考える. このとき,

$$\operatorname{div} (\mathbf{B} - \operatorname{grad} \rho) = \operatorname{div} \mathbf{B} - \operatorname{div} (\operatorname{grad} \rho) = \operatorname{div} \mathbf{B} - \Delta \rho = 0 \quad (D \text{ で})$$

が成り立つ. 6.7 D. 定理 2 により,  $C^1$  級ベクトル場  $\mathbf{A}$  が存在して  $\mathbf{B} - \operatorname{grad} \rho = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  が領域  $D$  で成り立つ. //

**問題 6.8** 1 略解. 空間  $\mathbf{R}^3$  にある曲面  $S$  上で定義されている滑らかな 2 次微分形式

$$\omega = f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dy \wedge dz + h(x, y, z) dz \wedge dx \quad ((x, y, z) \in S)$$

を考える.

曲面  $S$  のパラメータ表示を考える:

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \quad ((u, v) \in D),$$

ただし  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) は平面領域  $D \subset \mathbf{R}^2$  で定義された  $C^1$  級関数. 今, 曲面  $S$  のもう一つのパラメータ表示 (1 対 1 対応) を考える:

$$\tilde{\varphi}(s, t) = (\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t)) \in S \quad ((s, t) \in E),$$

ただし  $\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t)$  ( $(s, t) \in E$ ) は平面領域  $E \subset \mathbf{R}^2$  で定義された  $C^1$  級関数.

さらに,  $D$  から  $E$  への  $C^1$  級同型写像 (全単射)  $(\varphi, \psi): D \rightarrow E$  が存在して

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(u, v) = \tilde{\varphi}(s, t) \\ \left| \begin{array}{cc} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{array} \right| > 0 \end{array} \right. , \text{ ただし } (s, t) = (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

が成りたっているとする.

4.5 合成関数の偏微分 B. 基本事項 定理 3 により

$$\begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_s(s, t) & \tilde{x}_t(s, t) \\ \tilde{y}_s(s, t) & \tilde{y}_t(s, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{pmatrix}$$

が成り立つので，行列式をとって

$$\begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{x}_s(s, t) & \tilde{x}_t(s, t) \\ \tilde{y}_s(s, t) & \tilde{y}_t(s, t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{vmatrix}.$$

このことから

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y, z) dx \wedge dy &= \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} dudv \\ &= \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \begin{vmatrix} \tilde{x}_s & \tilde{x}_t \\ \tilde{y}_s & \tilde{y}_t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{vmatrix} dudv \\ &= \int_E f(\tilde{x}(s, t), \tilde{y}(s, t), \tilde{z}(s, t)) \begin{vmatrix} \tilde{x}_s & \tilde{x}_t \\ \tilde{y}_s & \tilde{y}_t \end{vmatrix} dsdt. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \tilde{y}_s(s, t) & \tilde{y}_t(s, t) \\ \tilde{z}_s(s, t) & \tilde{z}_t(s, t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} z_u(u, v) & z_v(u, v) \\ x_u(u, v) & x_v(u, v) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \tilde{z}_s(s, t) & \tilde{z}_t(s, t) \\ \tilde{x}_s(s, t) & \tilde{x}_t(s, t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_u(u, v) & s_v(u, v) \\ t_u(u, v) & t_v(u, v) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つことから，

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_S f(x, y, z) dx \wedge dy + g(x, y, z) dy \wedge dz + h(x, y, z) dz \wedge dx \\ &= \int_D \left\{ f \begin{vmatrix} \tilde{x}_s & \tilde{x}_t \\ \tilde{y}_s & \tilde{y}_t \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} \tilde{y}_s & \tilde{y}_t \\ \tilde{z}_s & \tilde{z}_t \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} \tilde{z}_s & \tilde{z}_t \\ \tilde{x}_s & \tilde{x}_t \end{vmatrix} \right\} \begin{vmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{vmatrix} dudv \\ &= \int_E \left\{ f \begin{vmatrix} \tilde{x}_s & \tilde{x}_t \\ \tilde{y}_s & \tilde{y}_t \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} \tilde{y}_s & \tilde{y}_t \\ \tilde{z}_s & \tilde{z}_t \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} \tilde{z}_s & \tilde{z}_t \\ \tilde{x}_s & \tilde{x}_t \end{vmatrix} \right\} dsdt. \end{aligned}$$

これは  $\int_S \omega$  が曲面  $S$  のパラメータ表示 (1 対 1 対応) によらないこと ( $C^1$  級座標変換に対して不変である) ことを示している. //

2 略解. 空間  $\mathbb{R}^3$  の領域  $D$  で定義されている滑らかな 0 次微分形式 (関数)  $f$  に対して，

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

であるから，定義から

$$d \circ df = d(df) = (f_{yx} - f_{xy}) dx \wedge dy + (f_{zy} - f_{yz}) dy \wedge dz + (f_{zx} - f_{xz}) dz \wedge dx = 0.$$

領域  $D$  で定義されている滑らかな 1 次微分形式  $\omega = f dx + g dy + h dz$  に対して，

$$d\omega = (g_x - f_y) dx \wedge dy + (h_y - g_z) dy \wedge dz + (f_z - h_x) dz \wedge dx$$

であるから，定義より

$$d \circ d\omega = d\left((g_{xz} - f_{yz}) + (h_{yx} - g_{zx}) + (f_{zy} - h_{xy})\right) dx \wedge dy \wedge dz = 0 dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

領域  $D$  で定義されている滑らかな 2 次微分形式  $\omega$  に対しては， $d\omega$  は 3 次微分形式である。(3 次微分形式に対する  $d$  の) 定義から  $d \circ d\omega = d(d\omega) = 0$ . //

3 Stokes の定理と発散 (量) 定理の (空間  $\mathbb{R}^3$  での)  
ベクトル場による表現と微分形式による表現

$D$  : 曲面  $S$  上の開領域

$C$  : 開領域  $D$  の境界である単純閉曲線

ベクトル場	$[\bar{D}]$ 上で	微分形式
$\mathbf{X} = (f, g, h)$	$\longleftrightarrow$	$\omega = f dx + g dy + h dz$
$\text{rot} \mathbf{X} = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y)$	$\longleftrightarrow$	$d\omega = (h_y - g_z) dy \wedge dz + (f_z - h_x) dz \wedge dx + (g_x - f_y) dx \wedge dy$

$\int_C \mathbf{X} \cdot \mathbf{t} ds$ <p>Stokes の定理 <math>\parallel</math></p> $\int_D \text{rot} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS$	=	$\int_C \omega$ <p><math>\parallel</math></p> $\int_D d\omega$
---	---	--

$V$  : 空間  $\mathbb{R}^3$  内の開領域

$S$  : 開領域  $V$  の境界である閉曲面

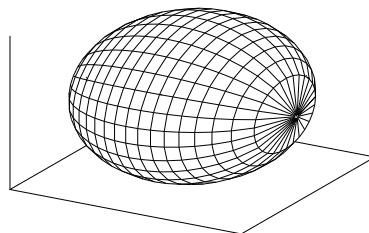
ベクトル場等	$[\bar{V}]$ 上で	微分形式
$\mathbf{A} = (g, h, f)$	$\longleftrightarrow$	$\omega = f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx$
$\text{div} \mathbf{A} = g_x + h_y + f_z$	$\longleftrightarrow$	$d\omega = (g_x + h_y + f_z) dx \wedge dy \wedge dz$

$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ <p>発散 (量) 定理 <math>\parallel</math></p> $\int_V \text{div} \mathbf{A} dx dy dz$	=	$\int_S \omega$ <p><math>\parallel</math></p> $\int_V d\omega$
---	---	--

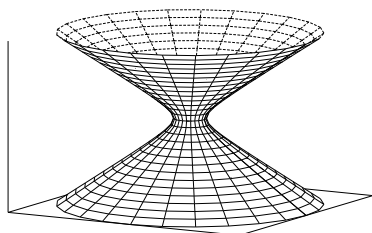


## 付録 二次曲面 ( $abc \neq 0$ )

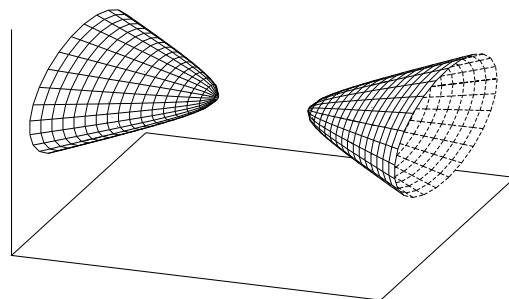
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{楕円面.}$$



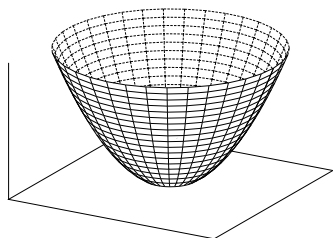
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{一葉双曲面.}$$



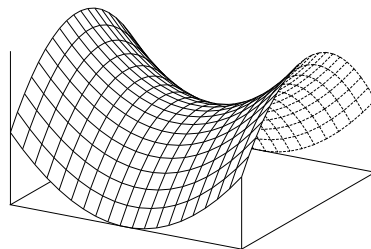
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{二葉双曲面.}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad \text{楕円放物面}$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad \text{双曲放物面}$$



# おわりに

さて、このノートが微分積分学をどのように扱ったか、もう一度振り返ってみよう。

- ・ 微分積分学はいわゆる教養の学ではないということ。

近代の数学の特徴は記号（計算）と関数（表現）の使用にある。

数学の歴史をひも解くと、ヴィエタによる代数学の記号化の推進とライプニッツによる微分積分学への記号計算の導入が、Leibniz の夢‘ 普遍記号法 - 思考の記号化 ’として、近代以後の数学の発展に大きな影響をおよぼしていると認識されていることがわかる。また現実の自然科学の探求と直接に結びついた数学であることも、デカルト、ニュートン以後の近代数学の大きな特徴であると捉えられている。

微分積分学は近代の数学が開発した最高の数学技術の一つの分野であるが、それにとどまるものではなく、微分積分学の成功の周りに近代数学の多様な発見のフロンティアが広がったのである。それは、古典‘ ユークリッド幾何学 ’が教養というにたとえ看做される側面が；‘ ユークリッド幾何学 ’は論理の展開の典型であることおよび厳密性の模範というところにあるとすれば、微分積分学には、数学解析の一つの技術であるということだけではなく；‘ 数学の広がり’を導くフロンティア’としての在り方が数学理論の発見の場の‘ 原型 ’のように見える側面がある。（そうであるとすれば、）

- ・ ‘ 微分積分学 ’の導入は、現在も活きている数学解析の技術の獲得ということだけではなく、数学における機能的展開の‘ 元型 ’を示唆または意識した導入が待たれる。
- ・ さて、実際にはどんな点を考慮したのか。
  - ‘ 現代の数学では、有理数の存在や定義には困難がない ’のと同じように、コンピュータと‘ 計算可能性 ’に支援されて‘ 実数の存在や定義には概ね困難はない ’。
  - 微分積分において、計算技能の習熟ではなく、様々な計算技術の理解を優先する。
  - 微分積分における‘ 概念をどう理解するか ’を重視する。

微分積分学における概念の機能とその成果を有効に使っているシュミレーションとコントロールの実例を示すことができなかつたのは、著者の力不足のためではあるが、残念である。また読者に期待する準備の削減についても、何も述べることはできなかつた。多くの方々の意見と教示を期待するのみである。

## 関連図書

- [1] 金子晃: 数理系のための 基礎と応用 微分積分 II -理論を中心に-, サイエンス社, 2001.
- [2] 水田義弘: 入門微分積分, サイエンス社, 1996.

# 索引

## あ～け

アステロイド Asteroid	87
鞍点	39
一次 (1 次) 微分形式	115,117,130,137
一葉双曲面	5,183
一様連続性	11,12,52,58,64,76
$\epsilon - \delta$ 論法	10
陰関数定理	43,44,47
陰関数の極値問題	44
陰関数の微分	43
渦度 (Vorticity)	129
円環体 (トーラス Torus)	5,87,96
円錐面	96
円柱座標	3,29,30
解曲線	124
開円板	9
開集合	9
Gauss の法則	112,132
カージオイド Cardioid	71,89
回転一葉双曲面	2
回転放物面	2,92,97
回転体	87,89
回転二葉双曲面	2
回転楕円面	2
回転面	2,96
完全 (Exact)	120,124,137
外微分形式	135-139
外微分作用素	136,139
確率積分	84
関数の連続性	6
ガンマ関数 $\Gamma$	85
逆写像定理	52,72
球座標	29,88,109
極限值	6,13
極座標変換	24,29,69,88
曲線の接線	15,19,21
曲線の向き	114,116,117,127
曲線のパラメータ表示	4,18
極大値, 極小値	38-42
極値	38-42
曲面の接平面	17,20,21
曲面のパラメータ表示	4,20,103,105
曲面の表示	1-3
曲面の法線	16,17,21
曲面の (表) 面積	90,91,93
クーロン (Coulomb)	112,130
グリーン (Green)	
Green の恒等式 (公式)	124,132,134
Green の定理	118,119,138

## こ～の

高次微分形式	136
高階 (次) 偏導関数	14,28
広義重積分	83
合成関数の偏微分	23
勾配 grad, $\nabla$	124,130,133
最大値・最小値定理	9,11
三重積分	86
三次 (3 次) 微分形式	136,137,138
$C^1$ 級	17,22
$C^n$ 級, $C^\infty$ 級	28,34
重積分	55
収束点列	8,10
条件付極値問題	49
剰余項	34
スカラー場	130
ストークス (Stokes) の定理	126,128,138
積分可能性	55,56,58
積分順序の変更	67
接平面	16,17,20,21
接ベクトル	19,21
線形性	6,13,57,116,136
線積分	113-117 126 - 130,137
線素	113
双曲放物面	5,183
速度ベクトル	105,129
楕円面	183
楕円放物面	183
体積	54,86,87
単位法線ベクトル	107,114 125,134
単純閉曲線	120,127,138
単連結	120,121
調和関数	31
テイラー (Taylor) の定理	34,36
テイラー (Taylor) 展開	35
停留点	39,41
デカルト (Descarte) の正葉線	45
同次関数	27
等位曲線	3
等位面	3,4,5,45
凸領域	108,120,131
二次曲面	2,183
二次 (2 次) 微分形式	137,138
二変数関数の極限值	6
二変数関数のグラフ	1
二変数関数の連続性	6
二葉双曲面	183
熱方程式	32

は~も

発散 (Divergence)	107,119
発散 (量) 定理	107,119,132,138,139
波動方程式	32
パラメータ表示	3,18,19,91 103-106,113-116
バラ曲線 (Rhodonea)	71
被覆定理 (Heine-Borel)	161
(全) 微分可能性	22
微分形式	22,115,117 120-124,135-139
微分と積分の順序変更	100
微分方程式	124
閉円板	8
閉集合	8
ベータ関数 $B$	85
ヘルダー (Hölder)	
ヘルダーの不等式	98
ベクトル場	105,107,129,182
ベクトル場の	
回転 rot (curl)	128,129,130 133,135,138
ベクトル場の発散 div	107,119 132-134
ベクトル場のポテンシャル	131
ベクトルポテンシャル	133,134
ヘッセ (Hesse) 行列	39
ベルヌーイ (Bernoulli)	
ヘリックス Helix	4
ヘリコイド Helicoid	4,106
変数変換	69,72,87
偏微分可能, 偏微分係数	13
法線	16,17,21
法 (線) ベクトル	17,20,21,90,91 103-105,110,127
法線方向の微分係数	125,133
法線面積分	106,128,138
ボルツァーノ (Bolzano)	
Bolzano-Weierstrass	
の定理	11
ポワソン (Poisson)	
Poisson の方程式	132,135
マクローリン (Maclaurin)	
マクローリン展開	35
マクローリンの定理	34
未定乗数	49
面積	56,71,90,91 104,119
面積が確定する	56,65,72
面積 0 の集合	56,65,74
面積分	103,105
面素	105

や~わ

ヤコビアン (Jacobian)	23,52,72,88
関数行列式	23,88
有界	9,11,12,55,72
ラグランジェ (Lagrange) の	
未定乗数法	49
螺旋 Helix	4
ラプラシアン (Laplacian) $\Delta$	28,31,125
ラプラス (Laplace)	
ラプラスの方程式	28,31
リーマン (Riemann) 和	55,58,81,95
領域	10
累次積分	66,68
レムニスケート Lemniscate	46,71
連続関数	6,7
連続性	6,10
ワイエルシュトラス (Weierstrass)	





