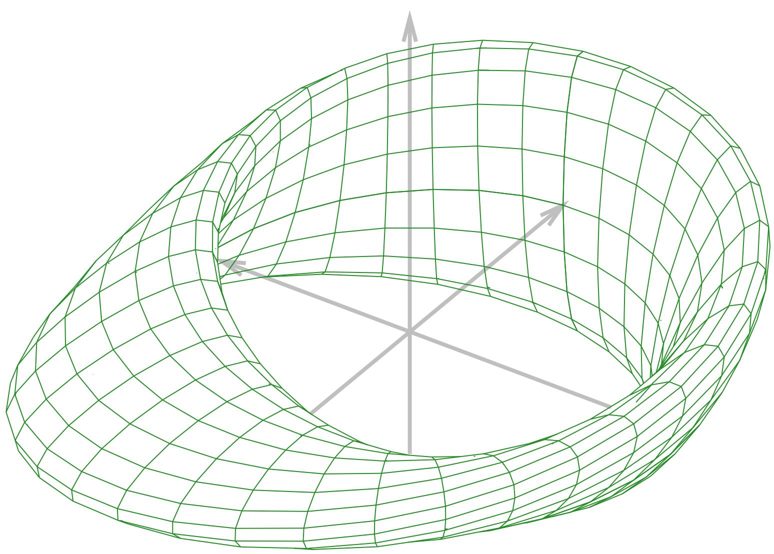
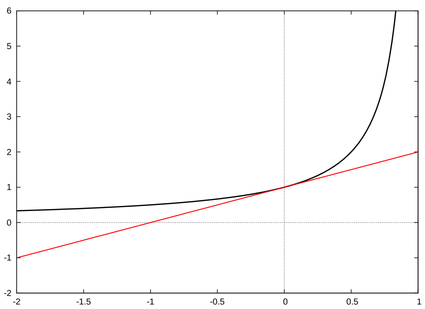
微分積分学 1

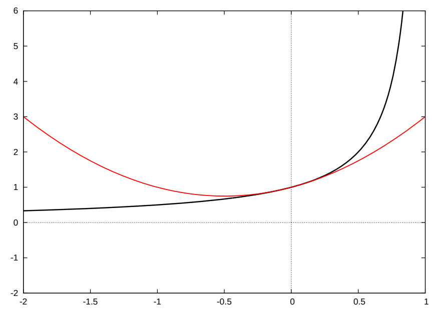
ver. 16_03_20



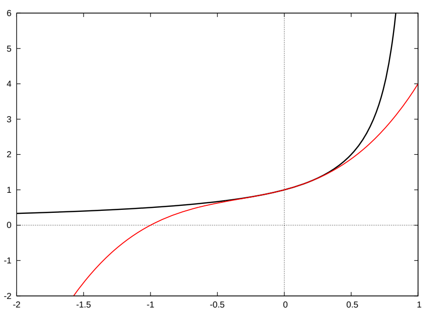
下図は $-2 < x < 1$ の範囲での関数 $y = \dfrac{1}{1-x}$ と 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の部分和の与える関数のグラフ． (参考　２．１２　テイラーの定理)



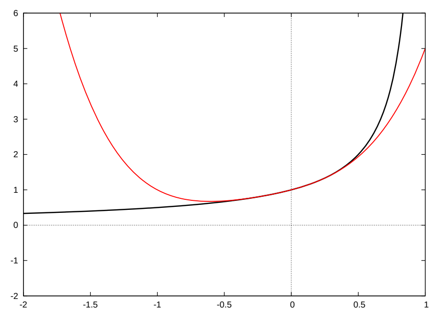
上左図は $y = \dfrac{1}{1-x}$ と $y = 1 + x$ のグラフ．



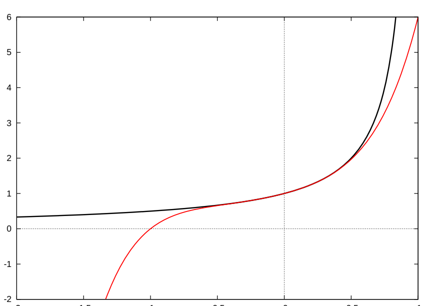
上右図は $y = \dfrac{1}{1-x}$ と $y = 1 + x + x^2$ のグラフ．



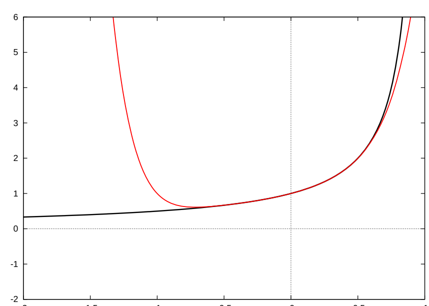
$y = 1 + x + x^2 + x^3$



$y = x + x + x^2 + x^3 + x^4$

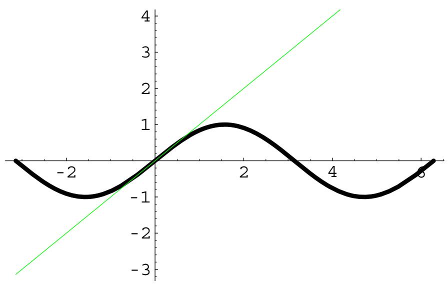


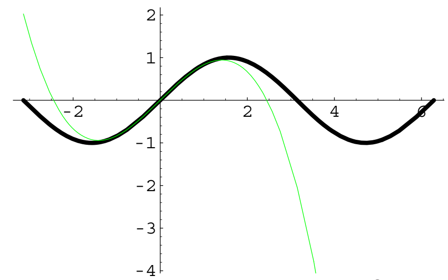
$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$



$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$

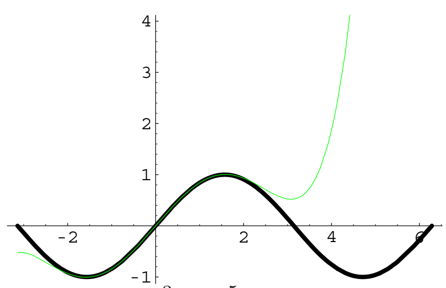
下図は $-\pi < x < 2\pi$ の範囲での関数 $y = \sin x$ と 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ の部分和の与える関数のグラフ. (参考　２．１２　テイラーの定理)



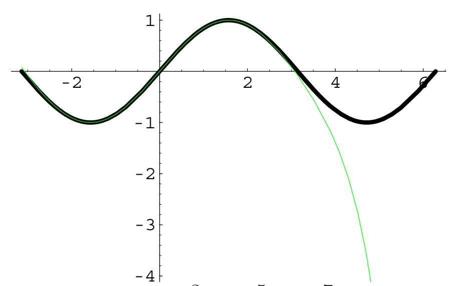


上左図は $y = \sin x$ と $y = x$ のグラフ.

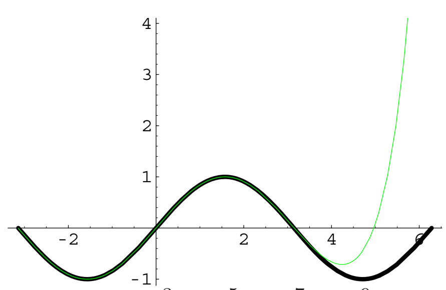
上右図は $y = \sin x$ と $y = x - \dfrac{x^3}{3!}$ のグラフ.



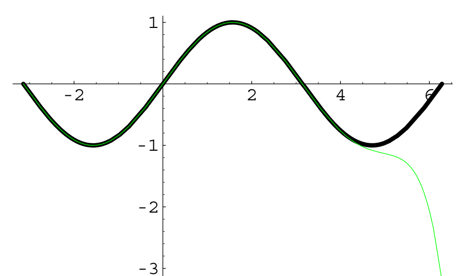
$y = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$



$y = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$



$y = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!}$



$y = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \dfrac{x^{11}}{11!}$

はじめに

微分積分学の対象は何であるのかについて，考えてみよう．
まず最初に現れる対象は数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ である一項が限りなく並んで現れてくる．
例えば，最初は 1 であるが，二番目は $1+\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$，三番目は $1+\dfrac{1}{1+\frac{3}{2}}=\dfrac{7}{5}$，そのつぎは $1+\dfrac{1}{1+\frac{7}{5}}=\dfrac{17}{12}$，そのまたつぎは $1+\dfrac{1}{1+\frac{17}{12}}=\dfrac{41}{29}$，そのまたまたつぎは $1+\dfrac{1}{1+\frac{41}{29}}=\dfrac{99}{70}$，$\cdots$ とかぎりがなく続くとき，これらの項は $\sqrt{2}$ に近づいていく．
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はその項 a_n の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ という対象を生む（生まない場合もあり，その場合には数列は‘ 発散している ’といわれる）．
数列からは，最初の a_1 から a_n までを加えた和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を項 S_n とする新しい数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が派生してくる．この数列の極限値として，無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が生まれる．

つぎに，数列の極限値や無限級数の和の考えが関数の考えと結びついたとき，多くの対象が生まれる．ここでいう関数とは実数のある集合 A を定義域とし，集合 A に含まれる数 x に実数 y を対応させる関係 f のことである；この関数を $y=f(x)$ と表す．
関数 f からは， f のグラフとよばれる集合

$$G_f \;=\; \Big\{(x,y)\;\Big|\;y=f(x)\Big\}$$

が派生する． f のグラフは目に見えるので，関数 f の持っている性質の発見と理解を援けてくれる．
f のグラフからは，容易に，変数の x から $x+\Delta x$ までの変化に対応する関数値の変化量

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

というものが派生し，変化量 Δf から変化率

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

が派生する．
さて， f の変化量 Δf は変数における変動 Δx が小さくなるときどう変化するだろうか．

性質 $\Big\langle$ Δx が小さくなって 0 に近づくとき， $|\Delta f|$ も小さくなって 0 に近づく．$\Big\rangle$

この性質は f のグラフは連なっていて切れ目がないということを言い表している．そのため，この性質が成り立つとき，関数 f は x で連続といわれる；そうでない時，関数 f は x で不連続といわれる．関数の‘ 不連続な点 ’に気づくようになって，連続関数（いたる所で連続な関数）と不連続関数（ある所で不連続な関数）の区別が生じた．

変数における変動 Δx が小さくなるとき変化率 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ がどう変化するかを調べる．

性質 $\left\langle\right.$ Δx が小さくなって 0 に近づくとき， $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ は一定値 λ に近づく．$\left.\right\rangle$

この性質が成り立つとき，この値 λ を f の x での傾きまたは微分係数といい $f'(x)$ や $\dfrac{df}{dx}(x)$ と表し，関数 f は x で微分可能という；そうでない時，関数 f は x で微分不可能という．
こうして，関数の‘ 微分不可能な点 ’の存在に気づくようにって，微分可能関数（いたる所で微分可能な関数）が生まれた．つぎのことは，重要なことである：

・微分係数の意味を通して，関数のグラフの接線が微分積分学の対象として生まれ出る，

・関数 $f(x)$ に関連して新しい関数 $\dfrac{df}{dx}(x)$ が産まれた；この関数を $f(x)$ の導関数と呼ぶ．

さて，関数 f の変化量 Δf の考えからは,‘ 関数値の極大 ’や‘ 関数値の極小 ’ということの区別が生じ，変化率 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ に関連して関数とそのグラフの凸や凹の考えが生じた．
すぐに，関数値の極値を調べるためには導関数を調べることが有用であり，関数の凸や凹を調べるためには導関数の導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ ，すなわち第二階導関数，を調べることが役立つことがわかった．これらの解析の進展の中で
導関数を得るという作用‘ 微分 ’

$$\left\langle \text{ 微分可能関数 } f(x) \text{ から，導関数 } \frac{df}{dx}(x) \text{ を得ること } \right\rangle$$

の重要さが明らかになった．

さて，関数 f からは， f のグラフとよばれる集合 G_f が生じている．このグラフを見れば，関数 f が正の値をとる関数であるときに，関数のグラフと x 軸と直線 $x=a$ および $x=b$ で囲まれた図形

$$A_f \;=\; \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\right\}$$

の面積が一般的に問われるようになる．驚くべきことには，この面積を計算する手続きは，前に述べた微分可能関数から導関数を得る作用‘ 微分 ’の逆作用

$$\left\langle \text{ 関数 } f(x) \text{ から，} \quad \frac{dF}{dx}(x)=f(x) \text{ が成り立つ 関数 } F(x) \text{ を得ること } \right\rangle$$

から計算されることがわかるのである．
関数 $f(x)$ に対して， $\dfrac{dF}{dx}(x)=f(x)$ が成り立つような関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数または不定積分といい $\displaystyle\int f(x)\,dx$ と表す．このため‘ 微分 ’という作用の逆作用は

$$\left\langle \text{ 関数 } f(x) \text{ から，関数 } \int f(x)\,dx \text{ を得ること } \right\rangle$$

と言い表される；この作用を‘ 不定積分 ’という．こうして
関数 f のグラフ G_f と x 軸で挟まれた図形 A_f の面積は $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を計算することから得られると言い得る．

関数のグラフは曲線を与えるのであるが，関数を 2 つ使えば一般の曲線 C の上の点の位置を，

$x=\phi(t),\ y=\psi(t)\ (a\le t\le b)$ という形でパラメータ表現することができるようになる．特に，連続な曲線 C の長さは C のパラメータ表現から生じる不定積分

$$\int\sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt$$

を計算することから得られる．

・ これらの量を求める問題において，不定積分を使って計算する手続きを意味づけるのが定積分の考えである．

このようにして，導関数が計算されるすべての微分可能な関数の集合や，不定積分が計算されるすべての連続関数の集合が微分積分学の舞台となる．言うまでもなく実数を係数とする多項式は(すべての実数に対して定義された関数として) 連続関数であり微分可能である．有理関数，三角関数，指数関数，対数関数もすべて定義される所で連続で微分可能である．この微分積分学の舞台に，関数のテイラー展開という装置やガンマ関数を重要な例とする多様な関数とその性質が微分や積分を通して現れてくるのである．微分積分学における展開は，変数を２つ以上持つ関数や関数から派生する数学的対象のみならず関数の集合から生まれる新たな対象を得て，さらに広遠な数学の展望へと連なっていくーこのように見える．

微分積分学 1 について

中学校と高等学校で学んだ変数を操作すること（例えば，二次方程式を解くこと）と関数の考え（ 例えば，二次関数のグラフの特徴の理解）を前提として，**微分積分学 1** ではただ１つの変数を持つ関数の微分積分法の考え方と計算法を学ぶ．

この**微分積分学 1** の展開においては，実数の存在や性質については直感的にあつかう．
このことの実際の意味は，我々の眼前に現れてくる実数は数直線上に点として存在しているので，そのことに基づいて実数の性質を述べることができるということである．

定理の証明や不等式の評価の場合などに現れる数学的論理性も重視する．
数の操作からは数が結果として現れるのであるから，計算結果の有用性と計算技術に眼を奪われがちである．数学における主張の正しさは，数学上の完璧な計算技術で達成されるように思われがちであるが，この本では，操作の中にある意味を示すことに努力するー意味から真実性のある確信が得られると思うからである．

さて，**微分積分学 1** を通して，読者が，変化する量の変化率を関数の微分係数として数学的に取り扱うことを知り，関数の単調性や凸性などについて学び，極値を求める問題に答えられるようになり，重要な関数を近似して計算できるようになる．また量の求積法を取扱う中で，定積分を計算する技術は微分係数を求める問題の逆問題であるという‘ 微分積分学の基本定理 ’を理解し，多様な関数の結びつきを知る．これらのことは，現代の科学や社会に現れる広範な問題を数学的に取り扱うための基礎となっている．**微分積分学 1** が微分積分学とその展開が関与している数学への導入になることを期待する．

この講義における各節の事項について，学習上の道程を OPTION A～D で指示するよう試みたが適切とは言えないかもしれない：

‘ A ’ ： 基礎概念の発見と理解に向かう数学の経験.
‘ B ’ ： 基本事項.
‘ C ’ ： 微分積分を応用するための基礎的考え方，計算技術を高める巧妙な計算法.
‘ D ’ ： 数学的能力を基礎から高めるための‘ 理論的補充 ’と‘ 微分積分法の熟練 ’

この講義ノートの作成に協力してくれた，愛知教育大学数学教育の卒業生の方々に感謝します.

2006 年から 2010 年に，2013 年に改めて　　著者 識

目 次

微分積分学 2

第1章　数列と極限

† 実数の計算についての注意

すべての実数の集合を $\mathbf{R}$ で表す；また実数直線も $\mathbf{R}$ で表す.
すべての有理数の集合を $\mathbf{Q}$ で表す.
すべての整数の集合を $\mathbf{Z}$ で表し, すべての自然数 (すなわち，正の整数) の集合を $\mathbf{N}$ で表す.

A. 計算と大小関係

0 でない実数の二乗の正であること

$$\alpha \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2 > 0 \ .$$

言うまでもなく，$1 = 1^2 > 0$ である．実数の計算において，0 でないどんな実数の二乗も正の数であるということは，特段に重要なことであり，このことから, つぎのような事実が示される：

二次式に対する判別式

$a \neq 0$ の場合 $ax^2 + bx + c = a\Big\{\Big(x + \dfrac{b}{2a}\Big)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big\}$ から次の事がわかる：

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbf{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a > 0 \quad \text{かつ} \quad b^2 - 4ac \leq 0 \ .$$

A. 関数の単調増加性，単調減少性について

ある区間 I で定義された関数 $f(x)$ を考える.

(1)　関数 $f(x)$ がつぎの性質を持つとき，関数 $f(x)$ は狭義 (または強い意味で) 単調増加であるといわれる：　$x < x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(x')$.

(2)　関数 $f(x)$ がつぎの性質を持つとき，関数 $f(x)$ は単調増加であるといわれる：

$$x < x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(x') \ .$$

(3)　関数 $f(x)$ がつぎの性質を持つとき，関数 $f(x)$ は狭義 (または強い意味で) 単調減少であるといわれる：　$x < x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(x')$.

(4)　関数 $f(x)$ がつぎの性質を持つとき，関数 $f(x)$ は単調減少であるといわれる：

$$x < x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(x') \ .$$

例　$n = 1, 2, \cdots$ のとき，関数 x^n $(x \geq 0)$ は狭義単調増加関数であり，関数 x^{-n} $(x > 0)$ は狭義単調減少関数である.

上の例のような事実の説明は，つぎの三分法則

$\boxed{\text{どの二つの数 } \alpha,\ \beta \text{ に対しても，} \alpha > \beta,\ \alpha = \beta,\ \alpha < \beta \text{ の内のどれか唯一つだけが必ず成り立つ}}$

が成り立っている (実数の) 大小関係が満たす推移律 $\boxed{\alpha < \beta,\ \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma}$ や実数の

大小関係の基本法則 $\boxed{\begin{array}{rcl} \alpha,\ \beta > 0 & \implies & \alpha\beta > 0. \\ \alpha \geq \beta & \implies & \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma \end{array}}$ に基づくのが本来的

であろう．この基本法則からは, $\boxed{\alpha > \beta,\ \gamma > 0 \implies \alpha\gamma > \beta\gamma}$ も成り立つことがわかる,

というのは $\alpha\gamma - \beta\gamma = (\alpha - \beta)\gamma > 0$ が成り立っているからである．また,

$\alpha + (-\alpha) = 0$ から, $\boxed{\alpha > 0 \iff -\alpha < 0}$ も容易に示される．

例えば‘ $f(x) = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$ は狭義単調増加関数である．’という事実は三分法則からつぎのように導かれる： $a > b > 0$ とする． $\sqrt{a},\ \sqrt{b}$ に対しては,

$\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ならば $a = (\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b})^2 = b$ となり $a > b$ に矛盾し,

$\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ならば $a = (\sqrt{a})^2 < (\sqrt{a})(\sqrt{b}) < (\sqrt{b})^2 = b$ となり $a > b$ に矛盾する．

したがって 三分法則 から $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ が成り立つ． (転換法による証明) //

また別につぎの様に考えることもできる．上に述べた基本法則から $\boxed{\alpha > 0 \implies \dfrac{1}{\alpha} > 0}$ が導かれることに注意すると, $a > b > 0$ ならば $a - b > 0,\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ であることから

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 0$$

が成り立つことからわかる． //

数式の計算の観点に立てば，実数の大小関係の基本法則と因数分解

$$a^n - b^n = \big(a - b\big)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\big)$$

から，$a > b > 0$ の場合に $a - b\,(> 0)$ と $a^n - b^n\,(> 0)$ の数量的関係が導かれることに気づく．

例．コーシー・シュワルツ (Cauchy-Schwarz) の不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

証明 各 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について

$$(a_i x + b_i)^2 = a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2 \geq 0 \qquad (\forall x \in \mathbf{R}) \qquad \text{であるから,}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)x^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)x + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big) \geq 0 \qquad (\forall x \in \mathbf{R})\ .$$

故に，二次式の判別式をとって

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big) \leq 0\ .$$

これから

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ . \qquad //$$

1.1　実数の連続性と極限値

A. 数列の収束と発散

番号 n を限りなく大きくすると a_n がある数 α に限りなく近づくとき，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといわれ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ または $a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$ と表される．α を数列 $\{a_n\}$ の極限値という．明らかに，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つということは $\lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$ ということと同値である．

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{1}{n}$ と定める．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少である，すなわち，$a_{n+1} \leq a_n$ が成り立っている．

(2) $a_n = \dfrac{1}{n} > 0$ である．

(3) $a_n = \dfrac{1}{n}$ であるから，a_n はいくらでも 0 に近づけるので，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ と定める．

(1) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ であるから，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である．

(2) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < 1.$

(3) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ であるから，a_n はいくらでも 1 に近づけるので，$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
これは $\lim_{n\to\infty}\{1 - a_n\} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ということである．

$\boxed{3}$ 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の例をあげよ．

(1) すべての n に対して $a_n > 1$ で，$\lim_{x\to\infty} a_n = 1.$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は収束しないが，$\lim_{x\to\infty} a_n^2 = 1.$

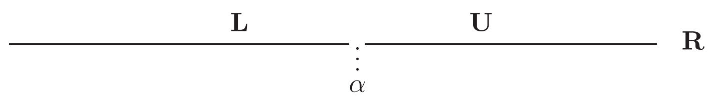
収束しない数列 $\{a_n\}$ は**発散**するといわれる．
番号 n を限りなく大きくすると a_n が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は無限大 ∞ に発散するといわれ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と表される．
また，番号 n を限りなく大きくすると a_n が限りなく小さくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は負の無限大 $-\infty$ に発散するといわれ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と表される．

数列 $\{a_n\}$ のすべての項 a_n が $-M < a_n < M$ を満たす正の数 M が存在するとき，数列 $\{a_n\}$ は**有界数列**といわれる．
数列 $\{a_n\}$ のどの項も $a_n \leq a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**単調増加数列**といわれる．
数列 $\{a_n\}$ のどの項も $a_n \geq a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**単調減少数列**といわれる．

B. 定理 1 **実数の連続性の原理**

単調増加有界数列は収束する．単調減少有界数列は収束する．

この原理は (実) 数直線が切れ目なく一つに連なる集合 (連続体といわれる) であることを教えている．もしある数 M を超えない単調増加数列 $\{a_n\}$ に極限値がないとすると，数直線があるべき実数 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ を切れ目として α より小さい数の組 $\mathbf{L} = \{r \in \mathbf{R} \mid r < \alpha\}$ と α より大きい数の組 $\mathbf{U} = \{s \in \mathbf{R} \mid s > \alpha\}$ の二つにわけられてしまうことになるが，そのとき $\mathbf{L}$ に最大の数がなくまた $\mathbf{U}$ に最小の数がないということになる．数直線についてそのようなことは起こらないのである．



$\boxed{1}$　$r \geq 0$ とする．等比数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = r^n$ と定める．

(1)　$r = 0$ の場合，　$\lim_{x\to\infty} a_n = 0.$

(2)　$r < 1$ の場合，　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を証明せよ．

$\boxed{\text{証明}}$　ある正の数 a によって $r = \dfrac{1}{1+a}$ と表すことができるので，　$r^n = \dfrac{1}{(1+a)^n}$ となる．二項定理を使うと，　$(1+a)^n \geq 1 + na > na$ となることがわかるので，

$$0 < r^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}\right) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

(3)　$r = 1$ の場合，　$\lim_{x\to\infty} a_n = 1.$

(4)　$r > 1$ の場合，　$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ （発散）を証明せよ．

$\boxed{\text{証明}}$　ある正の数 a によって $r = 1 + a$ と表すことができるので，　$r^n = (1+a)^n$ となる．二項定理を使うと，　$(1+a)^n \geq 1 + na \geq na$ となることわかるので，

$$r^n \geq na \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty) \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty. \qquad //$$

$\boxed{2}$　$r < 0$ とする．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = r^n$ と定める．

(1)　$-1 < r < 0$ の場合，　$\lim_{x\to\infty} a_n = 0.$

(2)　$r = -1$ の場合，　極限値 $\lim_{x\to\infty} a_n$ は（振動して）存在しない．

(3)　$r < -1$ の場合，　$\lim_{x\to\infty} a_n$ は (発散して）存在しない．

$\boxed{\text{部分列と収束性}}$　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に含まれる項 a_{n_k} $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots)$ からなる数列 $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列という．　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束することの定義から，　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき $\lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$ が成り立つから，　$\lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - \alpha| = 0$ が成り立ち $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ が成り立つことがわかる．すなわち

$\boxed{\text{命題}}$　収束する数列の部分列は同一の極限値へ収束する．

さらに，次の定理が知られている．

$\boxed{\text{ボルツァーノ・ワイエルシュトラス (Bolzano-Weierstrass) の定理}}$

任意の有界数列から収束する部分列を取り出すことができる．

$\boxed{\text{十進位取り記数法}}$ 十進位取り記数法で表された正の実数 $\alpha = a_{-m}a_{-m+1}\cdots a_{-1}a_0.\,a_1a_2\cdots a_n\cdots$ を考える，ここで $a_i = 0, 1, 2, \cdots, 9$ である．α の整数部 $a_{-m}a_{-m+1}\cdots a_{-1}a_0$ を α_0 と表すと

$$\alpha_1 = \alpha_0.\,a_1, \quad \alpha_2 = \alpha_0.\,a_1a_2, \quad \cdots, \quad \alpha_n = \alpha_0.\,a_1a_2\cdots a_n, \quad \cdots$$

は実数 α を小数点以下 n 桁まで 十進位取り記数法で表した有理数である．数列 $\{\alpha_n\}$ は実数 α に収束する単調増加有界数列であって (十進位取り記数法の考え方から)

$$0 \leq \alpha - \alpha_n \leq 10^{-n}$$

が成り立つことは明らかであろう．さらに，正の実数 α の 十進表示 $\alpha_0.a_1a_2\cdots a_p\cdots$ を利用すると，$n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\left(b_{-m}b_{-m+1}\cdots b_{-1}b_0.\,b_1b_2\cdots b_q\cdots\right)^n = \alpha_0.\,a_1a_2\cdots a_p\cdots$$

を満たす正の実数 $\beta = b_{-m}b_{-m+1}\cdots b_{-1}b_0.\,b_1b_2\cdots b_q\cdots$ を試行錯誤の方法で見つけることができる； $\beta = \sqrt[n]{\alpha}$ （**正の実数** α **の正の** n **乗根**） である．

D. Bolzano-Weierstrass の定理の証明 任意の有界数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考え，その単調増加または単調減少な部分列 (有界であるから，もちろん収束する！) を取り出す手続きについて考えよう．最初に，この数列の中に最大の要素がない場合を考える，すなわち，

数列のどの項 a_m に対しても，ある項 a_n $(m < n)$ が存在して $a_m < a_n$

が成り立っている場合．このときには，a_1 から始めて，a_1 より大きい項 a_{n_1}，a_{n_1} より大きい項 a_{n_2}，a_{n_2} より大きい項 a_{n_3} というように帰納的に単調増加部分列

$$a_1 < a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots < a_{n_k} < \cdots \qquad (1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots)$$

を取り出すことができる．

つぎに，この数列に最大の要素がある場合を考える．最大の要素を $a_{n_1} = \max\{a_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ として，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ から有限個の項 $a_1, \cdots, a_{n_1}$ を除いた数列を考える．この数列はもとの数列の部分列であるから，この $\{a_n\}_{n=1}^{n_1}$ を除いた数列に最大の要素がない場合には，先に述べたようにして単調増加部分列を取り出すことができる．そうでないときには，この $\{a_n\}_{n=1}^{n_1}$ を除いた数列の最大の要素を a_{n_2} とする； このとき $a_{n_1} \geq a_{n_2}$ $(n_1 < n_2)$ となっている．この手続きを繰りかえす中で， 単調増加部分列を取り出すことができればよし，出来なければ (無限に繰り返して) 単調減少部分列

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \cdots \geq a_{n_k} \geq \cdots \qquad (n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots)$$

を得ることができる． //

1.2 収束数列

B. 基本事項

$\boxed{\text{定理 1}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．つぎの (1)-(4) が成り立つ．

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(2) $\lim_{n\to\infty} \gamma a_n = \gamma\alpha \qquad (\gamma$ は定数$)$

上の (1) と (2) の性質を数列の極限値計算の線形性という．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta} \qquad (b_n,\ \beta \neq 0)$

$\boxed{\text{定理 2}}$ はさみうちの原理

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$ とする．

$a_n \geq b_n \geq c_n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ ならば，$\alpha \geq \beta \geq \gamma$ である．

$\boxed{\text{定理 3}}$ はさみうちの原理

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して， $a_n \geq b_n \geq c_n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ とする．

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束して $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ ならば，

数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束して $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ となる．

$\boxed{\text{例．区間}}$ 実数 $a < b$ を考える．

収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項 $a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ が閉区間 $[a,\, b]$ $\big($ a 以上 b 以下のすべての実数 x の集合 $\big)$ に含まれるとき，はさみうちの原理により極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n \in [a,\, b]$ が成り立つ．

収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項 $a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ が区間 $[a,\, \infty)$ $\big($ a 以上のすべての実数 x の集合 $\big)$ に含まれるとき，はさみうちの原理により極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n \in [a,\, \infty)$ が成り立つ．

収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項 $a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ が区間 $(-\infty,\, a]$ $\big($ a 以下のすべての実数 x の集合 $\big)$ に含まれるとき，はさみうちの原理により極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n \in (-\infty,\, a]$ が成り立つ．

収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のどの項 $a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ も開区間 $(a,\, b)$ $\big($ a より大きく b より小さいすべての実数 x の集合 $\big)$ に含まれないとき，はさみうちの原理により極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n \notin (a,\, b)$ が成り立つ．

$\boxed{1}$ $a > 0$ とする．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ と定める． $\lim_{x\to\infty} a_n = 0$ を証明せよ．

$\boxed{\text{証明}}$ ある正の番号 N をとると $a < N$ となる．$M = \dfrac{a^N}{N!}$ とおくと，$\dfrac{a}{N} < 1$ であるから $n > N$ のとき，$(0 <)\ a_n = M\dfrac{a}{(N+1)}\dfrac{a}{(N+2)}\cdots\dfrac{a}{n} < M\Big(\dfrac{a}{N}\Big)^{n-N}$．これは a_n が番号 N から先で単調に 0 へ減少することを示している（参考 1.1．例 $\boxed{1}$）．正確には，

$\lim_{n\to\infty} M\Big(\dfrac{a}{N}\Big)^{n-N} = 0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ //

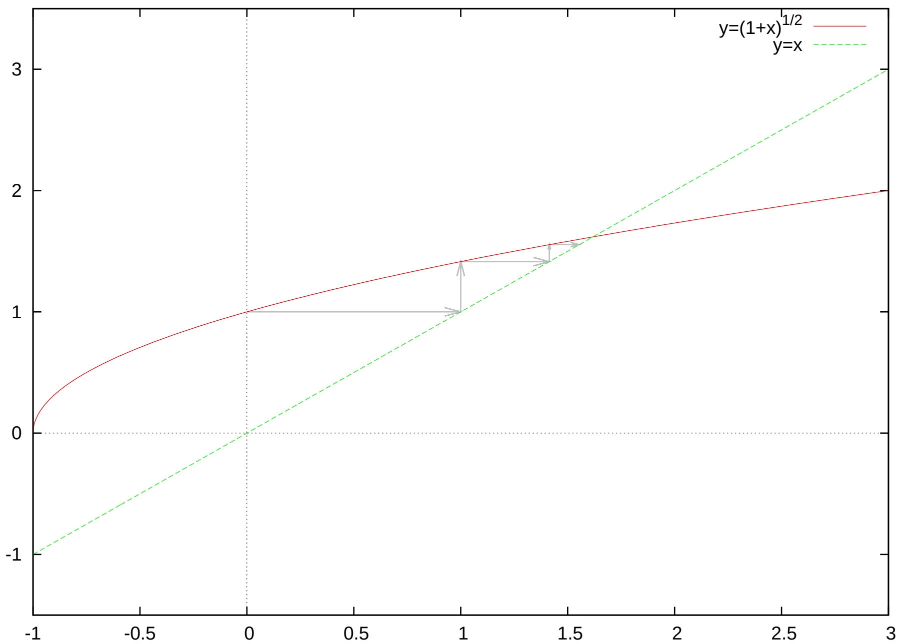
$\boxed{2}$　$a_0=0$ と漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ で定まる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える．

(1)　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である．　何故ならば，無理式の有理化によって，

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{1+a_n}-\sqrt{1+a_{n-1}}=\frac{(1+a_n)-(1+a_{n-1})}{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}.$$

$a_1-a_0=1>0$ であるから，帰納的にすべての n に対して $a_{n+1}-a_n>0$ が成り立つ．

(2)　下図に点 (a_n,a_{n+1})，$n=0,1,\cdots$ を書き込みなさい．



点の書き込みを実行してみると，平面上の点 (a_n,a_{n+1}) は関数 $y=x$ のグラフと $y=\sqrt{x+1}$ のグラフの交点に近づいていく．この交点の座標は方程式 $x=\sqrt{x+1}$ の解から $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ とわかる．

(3)　$a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を示せ．

$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と置くと $\alpha=\sqrt{1+\alpha}$ が成り立つので，　すべての正整数 n に対して帰納的に

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}-a_n=\alpha-a_n=\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1+a_{n-1}}=\frac{\alpha-a_{n-1}}{\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{1+a_{n-1}}}>0$ となる．

(4)　$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1+\alpha}$ に対して，

$$0<\alpha-a_n=\frac{\alpha-a_{n-1}}{\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{1+a_{n-1}}}\le\frac{\alpha-a_{n-1}}{2}$$

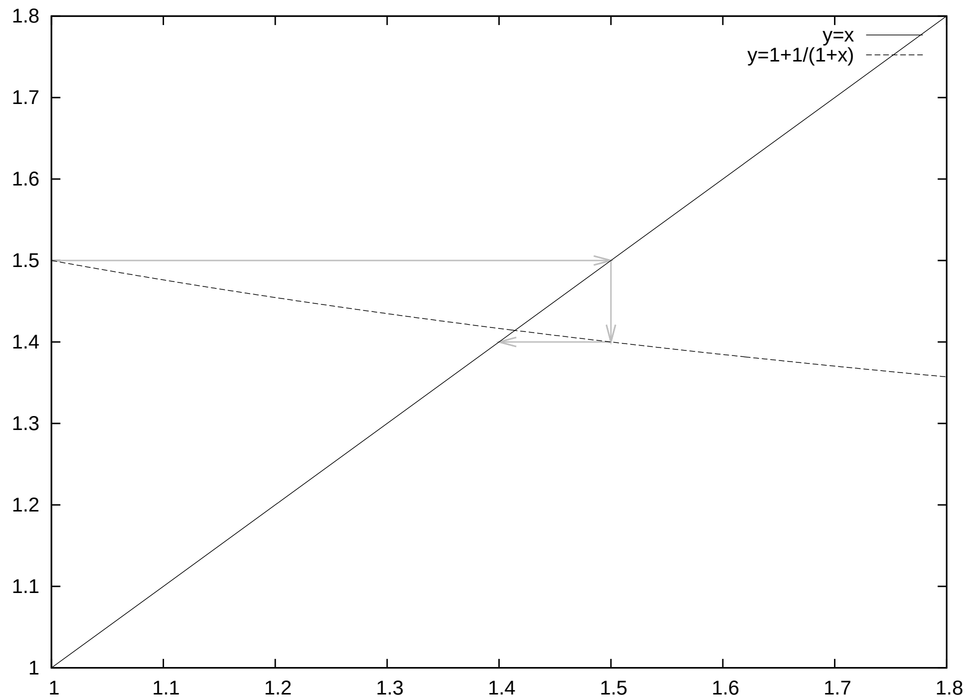
であるから，帰納的に

$$0\le\alpha-a_n\le\frac{\alpha-a_{n-1}}{2}\le\frac{\alpha-a_{n-2}}{2^2}\le\cdots\le\frac{\alpha-a_0}{2^n}=\frac{\alpha}{2^n}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$

が示され，直接に $\lim_{n\to\infty}\left|\alpha-a_n\right|=0$ すなわち $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ がわかる．

C.　$\boxed{3}$　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1=1,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n}$ と定める．

(1)　つぎの図に点 $(a_n, a_{n+1}),\ n=0,1,\cdots$ を書き込みなさい.



点の書き込みを実行してみると，平面上の点 (a_n, a_{n+1}) は関数 $y=x$ のグラフと $y=1+\dfrac{1}{1+x}$ のグラフの交点に近づいていく. この交点の座標は方程式 $x=1+\dfrac{1}{1+x}$ の解から $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ とわかる.

(2)　$\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ が成り立つことから,

$a_n-\sqrt{2}$ を計算して，　$|a_{n+1}-\sqrt{2}|<\dfrac{|\frac{3}{2}-\sqrt{2}|}{(1+\sqrt{2})^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ を示せ.

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$ を示せ.　さらに,

$a_1<a_3<\cdots<a_{2n-1}<a_{2n+1}<\cdots<\sqrt{2}<\cdots<a_{2n+2}<a_{2n}<\cdots<a_4<a_2$.

となっていることを示せ.

$\boxed{4}$　$a>0$ とする.　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$　を示せ.

$\boxed{解}$　(1)　$a\geq 1$ の場合.　$a_n=\sqrt[n]{a}-1$ とする $(n=1,2,\cdots)$.　$\lim_{n\to\infty} a_n=0$　を示すことが, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$　を示すことになる.　$a_n\geq 0$ であるから，二項定理を使うと

$$a=(a_n+1)^n=1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2+\cdots+a_n^n \quad \geq 1+na_n \quad そして \quad \frac{a-1}{n}\geq a_n.$$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}=0$ であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$

(2)　$0<a<1$ の場合.　$b=\dfrac{1}{a}>1$ に対して，　$\sqrt[n]{a}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}}=1.\quad //$$

$\boxed{5}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示せ．

$\boxed{\text{Hint.}}$ $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$ と置く．$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示すことが，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示すことになる．

$\boxed{6}$ $0 < a < 1$ とする．数列 $a_n = na^n \ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を証明せよ．

$\boxed{\text{証明}}$ ある正の数 p によって $a = \dfrac{1}{1+p}$ と表すことができるので，$a^n = \dfrac{1}{(1+p)^n}$ となる．
二項定理を使うと，$(1+p)^n \geq 1 + np + \dfrac{n(n-1)}{2}p^2 > 1$ となることがわかるので，

$$0 < na^n = \frac{n}{(1+p)^n} \leq \frac{n}{1 + np + \frac{n(n-1)}{2}p^2} \to 0 \ (n \to \infty).$$

はさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ． //

$\boxed{7}$ $0 < r < 1$ とする．$\alpha \in \mathbf{R}$ に対して，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\, r^n}{n!}$ と定める．$\lim_{x\to\infty} a_n = 0$ を証明せよ．

D. 数列の収束と $\epsilon - N$ 論法

(実) 数列の収束の「直観的説明」は，
数直線に順番に書いていく点がだんだん一点に近づいていくといったものであろう．
この言い方で問題なのは，数列の各項と極限との距離が単調に減少しているという印象を感じさせることだと思う．ー単調に減少している場合ばかりではない．
また，問題によっては，数列の各項と極限値の数量関係なしには調べがたい問題もある．
そこで数列の収束の「厳密な定義」が必要になるわけだが，それにはいわゆる $\epsilon - N$ 論法を用いる．$\epsilon - N$ 論法は，数列の各項と極限値の関係を数量的に評価することを通して数列の収束を表現している．

数列の収束の定義

$\boxed{\text{収束性}}$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するとは，

$$(*) \quad \left(\begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある正の番号 } N \text{ が存在して，} \\ \text{どの番号 } n \text{ に対しても} \\ n \ \geq \ N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| \ < \ \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つことである．このとき，α を数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値といい $\lim_{n\to\infty} a_n$ と表す．

説明 この表現が与える収束の印象は‘数列の点がすべて打ってあるところから数列の点を順番に消していくと，点の散らばっている範囲が狭まって一点に集まっていく．’というものである．

性質 $(*)$ の否定を考えると，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束しないとは，

$$\left(\begin{array}{l}\text{ある正の数 } \epsilon \text{ に対して，どんな正の番号 } N \text{ を選んでも，} \\ \text{ある番号 } n \text{ に対して} \\ n \ \geq \ N \quad \text{かつ} \quad |a_n - \alpha| \ \geq \ \epsilon \end{array}\right.$$

が成り立つことである．

上のように考えるとき，つぎのことが成り立っているのは容易にわかるであろう：

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \{a_n - \alpha\} = 0\,.}$$

$\boxed{8}$ 収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．つぎのことを示せ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 有界である，すなわち，
ある正の数 M が存在して すべての番号 n に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ．

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば，ある正の数 m と ある正の番号 N が存在して
$n \ \geq \ N \quad \Longrightarrow \quad |a_n| \geq m$ が成り立つ．

$\boxed{9}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ （∞ でもよい） のとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$ が成り立つ．

$\boxed{10}$ 収束の定義に基づいて，収束する数列の部分列は同一の極限値へ収束することを示せ．

さて，数列の収束の概念は，数列の極限値の存在に基づいて定義されるのであるが，数列の収束をその極限値に知ることなく判断できることが知られている．

$\boxed{\text{定理　コーシー の判定条件}}$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は，

$$(C) \quad \left(\begin{array}{l}\text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある正の番号 } N \text{ が存在して，} \\ \text{どの番号 } m,\ n \geq N \text{ に対しても } \ |a_n - a_m| \ < \ \epsilon \end{array}\right.$$

が成り立つことである．

注． コーシー の判定条件 (C) は，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 条件 $\lim_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0$ を満たすということである．判定条件 (C) を満たす数列はコーシー 列と呼ばれる．

$\boxed{11}$ 収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は コーシー の判定条件 (C) を満たすことを示せ．

$\boxed{12}$ コーシー 列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の単調増加 (減少) 部分列の極限値は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値であることを示せ．(この問いは，コーシー の判定条件 (C) が収束に対する十分条件であることを示すものである．)

定理 1 の証明　前に述べたつぎの定理の証明を考えよう．

$\boxed{\text{定理 1}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．つぎの (1)-(4) が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(2) $\lim_{n\to\infty} \gamma a_n = \gamma\alpha$ (γ は定数)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (b_n, $\beta \neq 0$)

さて，実数の絶対値の性質から，つぎの (p1) − (p4) が成り立っていることを注意する:

(p1) $\left|a_n + b_n - (\alpha + \beta)\right| = \left|a_n - \alpha + b_n - \beta\right| \le \left|a_n - \alpha\right| + \left|b_n - \beta\right|$

(p2) $\left|\gamma a_n - \gamma\alpha\right| = \left|\gamma\right|\left|a_n - \alpha\right|$

(p3) $\left|a_n b_n - \alpha\beta\right| = \left|(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)\right| \le \left|a_n - \alpha\right|\left|b_n\right| + \left|\alpha\right|\left|b_n - \beta\right|$

(p4) $\beta \neq 0$ かつ $b_n \neq 0$ のとき，

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\frac{a_n\beta - \alpha b_n}{b_n\beta}\right| = \left|\frac{(a_n - \alpha)\beta - \alpha(b_n - \beta)}{b_n\beta}\right| \le \frac{\left|a_n - \alpha\right|\left|\beta\right| + \left|\alpha\right|\left|b_n - \beta\right|}{\left|b_n\beta\right|}.$$

今，$\lim_{n\to\infty}|a_n - \alpha| = \lim_{n\to\infty}|b_n - \beta| = 0$ であるから，n を (無限に) 大きくするとき $\left|a_n - \alpha\right|$ と $\left|b_n - \beta\right|$ は 0 に近づく．上の (p1) と (p2) から n を (無限に) 大きくすると $\left|a_n + b_n - \alpha - \beta\right|$ と $|\gamma a_n - \gamma\alpha| = |\gamma||a_n - \alpha|$ も 0 に近づくことがわかる．このことは $\boxed{\text{定理 1}}$ の (1) と (2) を証明している．$\boxed{\text{定理 1}}$ の (3) と (4) を示すためには，先の $\boxed{8}$ の主張に注意しなければならない．
特に数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するから，つぎの (A) と (B) が成り立つことが $\boxed{8}$ からわかる：

(A) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 有界である，すなわち，
ある正の数 M が存在して すべての番号 n に対して $|b_n| \le M$ が成り立つ.

(B) 極限値 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$ ならば，ある正の数 m と ある正の番号 N が存在して
$n \ge N \implies |b_n| \ge m$ が成り立つ.

この (A) と (p3) から n を (無限に) 大きくすると

$$\left|a_n b_n - \alpha\beta\right| \le \left|a_n - \alpha\right|\left|b_n\right| + \left|\alpha\right|\left|b_n - \beta\right| \le \left|a_n - \alpha\right|M + \left|\alpha\right|\left|b_n - \beta\right|$$

も 0 に近づくことがわかる．このことは $\boxed{\text{定理 1}}$ の (3) を示している.
また，(B) と (p4) から n を (無限に) 大きくすると

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta}\right| \le \frac{\left|a_n - \alpha\right|\left|\beta\right| + \left|\alpha\right|\left|b_n - \beta\right|}{\left|b_n\beta\right|} \le \frac{\left|a_n - \alpha\right|\left|\beta\right| + \left|\alpha\right|\left|b_n - \beta\right|}{m\left|\beta\right|}$$

も 0 に近づくことがわかる．このことは $\boxed{\text{定理 1}}$ の (4) を示している． //

$\boxed{13}$ $a > 0$ とする．実数の連続性の原理から，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a}{n} = 0$ が成り立つことを導け.

1.3 級数

A. 級数の和

$\boxed{1}$ r を定数として，等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ とその部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$ を考える．

$r \neq 1$ のとき，等比級数の部分和 $S_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$ が成り立っていることは，

$$(1-r)S_n = (1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = (1-r)(1+r+r^2+\cdots+r^n) = (1-r^{n+1})$$

が成り立つことからわかる．

$|r|<1$ の場合，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} S_n = \lim_{x\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1-\displaystyle\lim_{x\to\infty} r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$ が成り立つ．このとき，等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ は収束して和 $\dfrac{1}{1-r}$ を持つといわれる．

$\boxed{2}$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ とその部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ を考える．数列 $\{S_n\}$ が収束するとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束するといわれ [1]，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} S_n$ を無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の和という．

例えば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ とその部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ を考える．この場合には，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right\} = \left\{1-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right\}+\cdots+\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\} = 1-\frac{1}{n+1}$$

と計算できるので，その和はつぎのようになる：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{x\to\infty} S_n = \lim_{x\to\infty}\left\{1-\frac{1}{n+1}\right\} = 1\,.$$

$\boxed{\text{命題}}$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．

$\boxed{\text{証明}}$ 無限級数 $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ を考えると，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\{S_n - S_{n-1}\} = S - S = 0\ . \quad //$$

B. 基本事項

$\boxed{\text{定理 1 線形性}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ とする．このとき，つぎのことが成り立つ：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \alpha+\beta$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\gamma a_n = \gamma\alpha$ 　　　(γ は定数)

[1] 無限級数は，収束しないとき，すなわち，その部分和の数列が収束しない場合，発散するといわれる．

$\boxed{\text{定理 2}}$　比較原理

(各項が正である) 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ に対して，$(0<)\, a_n \leq b_n\ (n=1,2,\cdots)$ とする．

そのとき，正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束ならば，正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ となる．

定理 1 と定理 2 は無限級数の和の定義と対応する部分和の極限値に対する線形性や比較原理によって容易に示される．

$\boxed{\text{等比級数との比較}}$

$0<r<1$ と $M>0$ を定数として，等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} Mr^n = \frac{M}{1-r}$ と正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を比較する．

(1)　一般項 $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq r$ ならば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 収束する．　（コーシー）

何故ならば，一般に $0 \leq a_n \leq r^n$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ の収束と比較原理により収束することがわかる．

(2)　一般に $0 \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ ならば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する．　（ダランベール ）

何故ならば，一般に $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ であるから，一般に

$$a_n \leq a_{n-1}r < a_{n-2}r^2 < \cdots < a_1 r^{n-1} < a_0 r^n$$

となり，$M=a_0$ と置いた等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} Mr^n = \frac{M}{1-r}$ と比較原理により収束することがわかる．

$\boxed{\text{自然対数の底 } e}$　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ を考える．

$n \geq 0$ のとき $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{2^n}$ であるから，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \ = \ 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \ < \ 3.$$

比較原理により，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ は収束する．この和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ を自然対数の底 e と定義する:　　$e = 2.7182818284590\cdots.$

C.　$\boxed{\text{自然対数の底 } e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ が成り立つ．

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ と定める．二項定理により

$$a_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} &= 1\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{1}{k!} \qquad \cdots \quad (*)\\
&\le 1\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big)\frac{1}{k!}\\
&= \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1)}{k!}\frac{1}{(n+1)^k} \quad \text{であるから,}
\end{aligned}$$

$a_n < a_{n+1}$, すなわち $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である．さらに $(*)$ から,

$$a_n = 1+1+1\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{2!}+\cdots+1\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{1}{k!}+\cdots+1\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big)\frac{1}{n!}$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!} < e.$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加有界数列であるから，収束する．

$\boxed{3}$ この極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$ は自然対数の底 e と等しいことを示せ.

$\boxed{\text{無限級数と不等式}}$ Cauchy-Schwarz の不等式を考えよう.

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \le \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

今, $\displaystyle\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $\displaystyle\beta_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $\displaystyle\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ と置いて

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i , \qquad \beta = \lim_{n\to\infty}\beta_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 , \qquad \gamma = \lim_{n\to\infty}\gamma_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$$

が存在（収束）するとしよう．このとき,

1.2 収束数列 B．基本事項 $\boxed{\textbf{定理 1}}$ **(3)** より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta_n\gamma_n = \beta\gamma$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$.

$\alpha_n \le \beta_n\gamma_n \le \beta\gamma$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ であるから，比較原理により $\displaystyle\alpha = \lim_{n\to\infty}\alpha_n \le \beta\gamma$.

すなわち，無限級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ が収束するとき，つぎが成り立つ：

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\Big| \le \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Cauchy − Schwarz の不等式)}$$

$\boxed{\text{交代級数の収束　ライプニッツ (Leibniz) の定理}}$ 単調減少正項数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つとき，無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ は交代級数といわれる.

(注意．級数 (または数列) の各項の正負の符号が交代するとき，この級数 (または数列) は交代級数 (または交代数列) といわれる．)

$\boxed{\text{定理 (Leibniz)}}$　交代級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する．その和を S とすると，部分和 $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \ \ (n = 0, 1, \cdots)$ に対して $|S - S_n| \leq a_{n+1} \ \ (n = 0, 1, \cdots)$ が成り立つ．

$\boxed{\text{証明}}$　$S_{n+2} - S_n = (-1)^n(a_{n+2} - a_{n+1}) \ \ (n = 0, 1, \cdots)$ から，

$$\begin{cases} (0 <)\ S_1 < S_3 < \cdots < S_{2n-1} < S_{2n+1} < S_{2n+2} < S_{2n} < \cdots < S_2 < S_0 \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(S_{2n} - S_{2n-1}\Big) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．有界単調数列の極限値 $\displaystyle S = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$ に対して

$$\begin{aligned} |S - S_n| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\Big| \\ &= \Big|(-1)^{n+1}\big\{a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots + a_{n+2p} - a_{n+2p+1} - \cdots\big\}\Big| \\ &= \Big|a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2p} - a_{n+2p+1}) - \cdots\Big| \\ &\leq a_{n+1}. \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることから，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$ がわかる．　　//

$\boxed{4}$　$\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ と置く $(n = 1, 2, \cdots)$.

(1)　$\big\{a_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ は有界単調増加数列であることを示せ．

(2)　$\displaystyle a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ を示せ $(n = 1, 2, \cdots)$.

D．絶対収束級数

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は，絶対値による級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ が収束するとき，絶対収束するといわれる．

$\boxed{\text{定理}}$　絶対収束級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する．

$\boxed{\text{証明}}$　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の部分和 $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ の部分和 $\displaystyle T_n = \sum_{k=0}^{n}|a_k|$ を考える．

すべての $n > m > 0$ に対して

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| = T_n - T_m\ .$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ が収束するから，その部分和の数列 $\big\{T_n\big\}$ は収束している．従って，Cauchy の判

定条件 (**1.2 収束数列 D. 数列の収束と** $\epsilon - N$ **論法**) により　$T_n - T_m \ \to \ 0 \quad (n > m \ \to \ \infty)$.

故に，　$S_n - S_m \quad \to \quad 0 \quad (n > m \quad \to \quad \infty)$.　Cauchy の判定条件により，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の部分和の数列 $\{S_n\}$ が収束する，すなわち，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する．　　//

D. 無限級数の収束の判定法

$\boxed{\text{判定法}}$　$a_n \geq 0 \quad (n = 0,\ 1,\ \cdots)$ を考える．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ = \ r$ （収束） のとき，　$0 \leq r < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束し，

$r > 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．　（コーシーの判定法）

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ = \ r$ （収束）のとき，　$0 \leq r < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 収束し，

$r > 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．　（ダランベールの判定法）

$\boxed{\text{証明}}$　(1)　$r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ < \ 1$ （収束）とす る．数列の収束の条件 （ **1.2 収束数列 D. 数列の収束と** $\epsilon - N$ **論法**) から，

$$\epsilon = \frac{1-r}{2} > 0 \text{ に対して，} \quad (*) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ある正の番号 } N \text{ が存在して，} \\ \text{どの番号 } n \text{ に対しても} \\ n \ \geq \ N \quad \Longrightarrow \quad \left| \sqrt[n]{a_n} - r \right| \ < \ \epsilon \ . \end{array} \right.$$

故に，　$s = r + \epsilon = \dfrac{r+1}{2} < 1$ と置くと，$n \geq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n} < s < 1$.　これから，

$$a_n < s^n \qquad (n = N,\ N+1,\ N+2,\ \cdots\ ) \ .$$

故に，
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad &= \quad \sum_{k=0}^{N-1} a_k \ + \sum_{n=N}^{\infty} a_n \ \leq \ \sum_{k=0}^{N-1} a_k \ + \sum_{n=N}^{\infty} s^n \\ &\leq \quad \sum_{k=0}^{N-1} a_k \ + \ \frac{s^N}{1-s} \ < \ \infty \ . \end{aligned}$$

この無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は，その部分和が有界単調増加数列であるから，収束する．

$r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ > \ 1$ （収束）とする．数列 $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$ の収束の条件から，

$$\epsilon = \frac{r-1}{2} > 0 \text{ に対して，} \quad (*) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ある正の番号 } N \text{ が存在して，} \\ \text{どの番号 } n \text{ に対しても} \\ n \ \geq \ N \quad \Longrightarrow \quad \left| \sqrt[n]{a_n} - r \right| \ < \ \epsilon \ . \end{array} \right.$$

故に，　$s = r - \epsilon = \dfrac{r+1}{2} > 1$ と置くと，$n \geq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n} > s > 1$.　これから，

$$a_n > s^n > 1 \qquad (n = N,\ N+1,\ N+2,\ \cdots\ ) \ .$$

故に，
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \sum_{n=N}^{\infty} a_n \ \geq \ \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \sum_{n=N}^{\infty} s^n \ = \ \infty \ .$$

この無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する． //

(2) $\displaystyle r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ < \ 1$ （収束）とする．数列の収束の条件（参考 **1.2 収束数列 D．数列の収束と** $\epsilon - N$ **論法**) から，

$$\epsilon = \frac{1-r}{2} > 0 \text{ に対して，} \quad (*) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ある正の番号 } N \text{ が存在して，} \\ \text{どの番号 } n \text{ に対しても} \\ n \ \geq \ N \quad \Longrightarrow \quad \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| \ < \ \epsilon \ . \end{array} \right.$$

故に， $\displaystyle s = r + \epsilon = \frac{r+1}{2} < 1$ と置くと， $n > N$ ならば $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} < s < 1$ ． これから，

$$a_n < a_N s^{n-N} \qquad (n = N+1,\ N+2,\ \cdots\ ) \ .$$

故に，
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ &= \ \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \ \leq \ \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_N s^{n-N} \\ &\leq \ \sum_{k=0}^{N} a_k + a_N \sum_{p=1}^{\infty} s^p = \sum_{k=0}^{N} a_k + \frac{s a_N}{1-s} \ < \ \infty \ . \end{aligned}$$

この無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は，その部分和が有界単調増加数列であるから，収束する．

$\displaystyle r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ > \ 1$ （収束）とする．数列 $\displaystyle\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$ の収束の条件から，

$$\epsilon = \frac{r-1}{2} > 0 \text{ に対して，} \quad (*) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ある正の番号 } N \text{ が存在して，} \\ \text{どの番号 } n \text{ に対しても} \\ n \ \geq \ N \quad \Longrightarrow \quad \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| \ < \ \epsilon \ . \end{array} \right.$$

故に， $\displaystyle s = r - \epsilon = \frac{r+1}{2} > 1$ と置くと， $n > N$ ならば $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} > s > 1$ ． これから，

$$a_n > a_N s^{n-N} > a_N \qquad (n = N+1,\ N+2,\ \cdots\ ) \ .$$

故に，
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \ \geq \ \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_N \ = \ \infty \ .$$

この無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する． //

$\boxed{5}$ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k r^{k-1} = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{n r^n}{1-r}$ を示せ．(HINT． $\displaystyle(1-r)\sum_{k=1}^{n} k r^{k-1}$ **を計算せよ．**)

(2) $|r| < 1$ のとき， $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}$ を求めよ．(HINT． **1.2 収束数列 C.** $\boxed{6}$)

1.4　指数関数

A.　(冪乗) 関数

0 でない実数 a に対して $a^0 = 1$ および $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(n \in \mathbf{N})$ と約束する．このとき，0 でない実数 a, b と整数 p, q に対して，指数法則　$(\star)$ $\begin{cases} a^{p+q} = a^p a^q, & (a^p)^q = a^{pq} \\ (a\,b)^p = a^p\,b^p \end{cases}$

が成り立つ．正の整数 n と正の実数 a に対して $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (参照．**1.1　B　十進位取り記数法**) と定義し有理数 $\dfrac{m}{n}$ $(m,\, n \in \mathbf{N})$ に対し

$$\begin{cases} a^{\frac{m}{n}} &= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \quad \left[= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ \right] \\ a^{-\frac{m}{n}} &= \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad \left[= \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \left(a^{-\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^{-m}\right)^{\frac{1}{n}}\ \right] \end{cases}$$

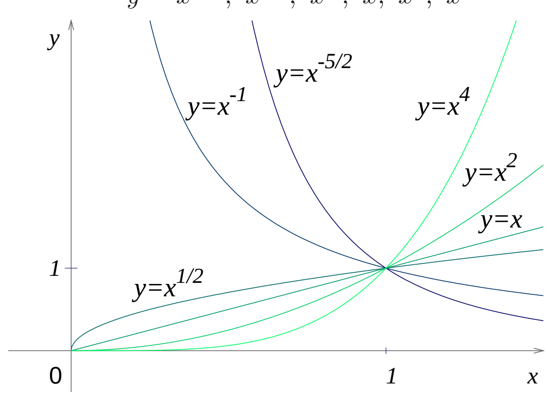
と定義すると，指数法則 $(\star)$ が正の実数 a, b と有理数の指数 p, q に対して成り立つことがわかる．数の正負に関わる性質と数の加法および乗法との関係 (参照．**1 † 実数の計算についての注意**) から，つぎのことが成り立つことがわかる：任意の有理数 p に対して，正の実数を変数とする (冪乗) 関数 x^p が定義されて

(1)　$p > 0$ のとき x^p　$(x > 0)$ は強い意味で単調増加である．

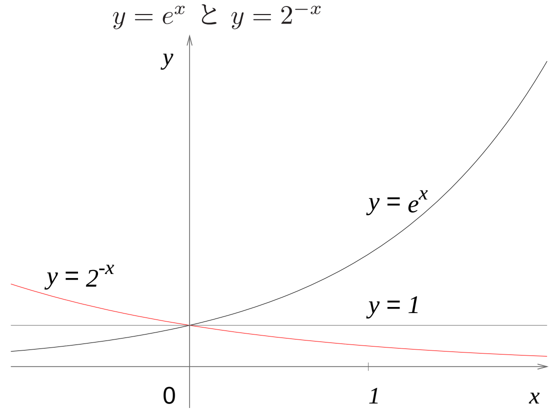
(2)　$p < 0$ のとき $x^p = \dfrac{1}{x^{-p}}$　$(x > 0)$ は強い意味で単調減少である．

(3)　$p < q$ $(p, q \in \mathbf{Q})$ のとき $\begin{cases} x^p < x^q & (x > 1) \\ x^p > x^q & (0 < x < 1) \end{cases}$ ．

$y = x^{-\frac{5}{2}},\ x^{-1},\ x^{\frac{1}{2}},\ x,\ x^2,\ x^4$



$y = e^x$ と $y = 2^{-x}$



B.　指数関数

1 でない正の数 a と正の無理数 r に対して，a^r を r に収束する有理数を項とする単調増加数列 $\{r_n \in \mathbf{Q}\}_{n=1}^{\infty}$ から定まる単調数列 $\{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ と定義する．a^r は無理数 r に収束する有理数を項とする単調増加数列の取り方によらず定まり，指数法則 $(\star)$ は正の実数 a, b と実数の指数 p, q に対して成り立つ．このとき，正の実数を変数とし実数の指数 p を持つ (冪乗) 関数 x^p は上に述べた性質 (1), (2), (3) を満たす，また指数関数についてつぎが成り立つ：

(4.1)　$a > 1$ の場合，関数 a^x $(x \in \mathbf{R})$　は強い意味で単調増加である．

(4.2)　$a < 1$ の場合，関数 a^x $(x \in \mathbf{R})$　は強い意味で単調減少である．

D.　指数関数の定義

$\boxed{1}$　正の数 a と正の無理数 r に対して，a^r は無理数 r に収束する有理数を項とする単調増加数列の取り方によらないことを示せ．

1.5　対数関数

A.　対数関数　a を 1 でない正の数とする．a を底とする対数関数の値 $y = \log_a x\ (x > 0)$ は $x = a^y$ が成り立つ実数 y と定義する．定義から

(0)　任意の $x > 0$ に対して，$y = \log_a x \iff x = a^y$．　明らかに，$\begin{cases} \log_a a = 1 \\ \log_a 1 = 0 \end{cases}$．

指数法則からつぎの (1), (2), (3) が導かれる：

(1)　任意の $x,\ y > 0$ に対して　$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(2)　任意の $x,\ y > 0$ に対して　$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

(3)　任意の $k \in \mathbf{R}$ に対して　$\log_a x^k = k \log_a x$.

指数関数の性質 (参照： **1.4 A (4), (5)**) から，つぎのことがわかる：

(4.1)　$a > 1$ の場合，$\log_a x$　は強い意味で単調増加である．

(4.2)　$a < 1$ の場合，$\log_a x$　は強い意味で単調減少である．

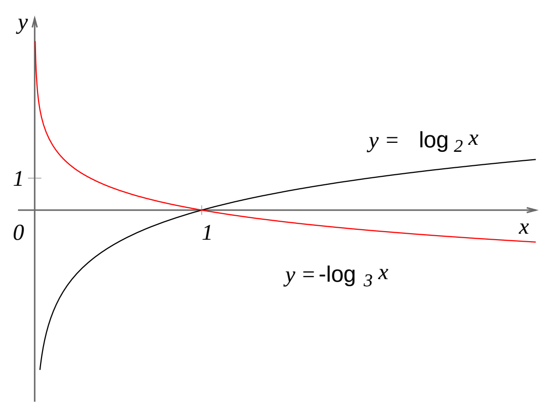
$\boxed{\text{底の変換公式}}$

すべての $a \neq 1,\ b,\ c \neq 1 > 0$　に対して，

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

が成り立つ．

右の図は
　$y = \log_2 x$ と $y = \log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$.



B.　自然対数　さて，$e = 2.7182\cdots$ を底とする対数関数 $\log_e x\ (x > 0)$ は自然対数とよばれ底 e を省いて $\log x$ と表わされる．また，関数 e^x は $e = 2.7182\cdots$ を底とする指数関数とよばれ　$\exp(x)$　と表わされることも多い．

$\boxed{\text{関数 } x^\alpha}$　指数法則を通して，整数でない任意の実数 α に対して

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} \qquad (x > 0) \qquad\qquad (*)$$

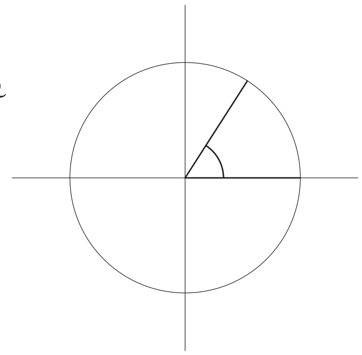
と考えられる．この関係 $(*)$ は α が整数のときも成立している．

1.6　三角関数

A.　三角関数

この章では, 円に関係した関数ー三角関数を考えます．三角関数を考えるときに，はじめに気をつけることは角の単位は何かということです．普通は直角の $\frac{1}{90}$ を単位１ °とする‘ 度 ’を使っていますが，数学の世界では，円周上で，半径と‘ 角に対応する円弧の長さ’ の比を使うのが普通ですーすなわち，半径に等しい長さの円弧に対応する中心角を１ラジアンとします.‘ ラジアン=radian ’という用語は’ 半径=radius’ にもとづいて１９世紀に造られたものです.‘ 半径との比較による角’というような意味を感じませんか．ラジアンを使う理由は，この方法（弧度法）によると，角の単位には‘ 直角 ’というような特別な概念が現れないからです．角の大きさが長さの比の値

$$\frac{\text{角を見こむ円弧の長さ}}{\text{円の半径}}$$



として表されていることは角の大きさが次元なしの数として表されている (記号 rad) ということを意味しています.
円周率を π で表すとき t 度$=x$ rad (ラジアン) の関係は

$$\frac{t}{180}=\frac{x}{\pi}$$

という関係です．180 度 の角に対する比 p で表すと

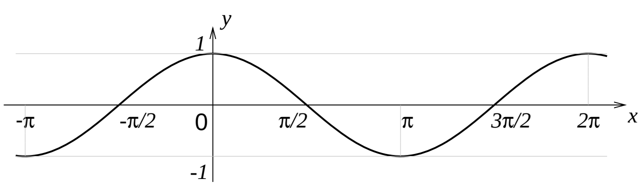
$$180\text{ 度}\times p=\pi\,\text{rad}\times p \quad \text{で}$$

$$\begin{cases} \cos t\,^\circ=\cos\dfrac{\pi t}{180}=\cos x \\ \sin t\,^\circ=\sin\dfrac{\pi t}{180}=\sin x \end{cases}$$

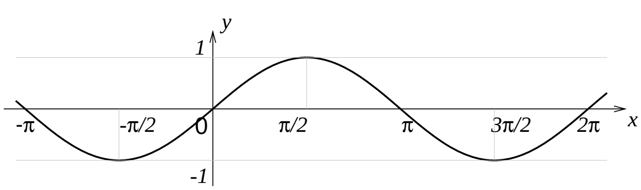
$$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

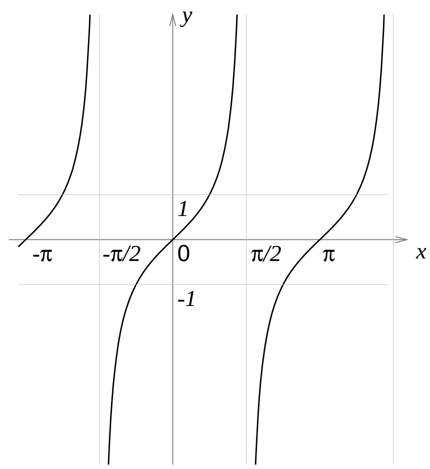
となります.

$y=\cos x$



$y=\sin x$





B.　三角関数の性質

$\boxed{1}$　三角関数の加法公式を示せ.

(1)　$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.　　　(2)　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

$\boxed{2}$ 三角関数の加法公式を示せ.

(1) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$.　　(2) $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$.

(3) $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$.　　(4) $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$.

$\boxed{3}$ 三角関数の合成.

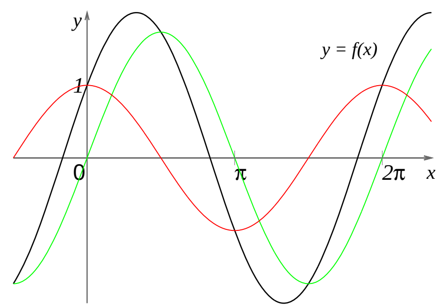
$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ （ただし，$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$）.

$\boxed{4}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ.

(1) $\sin x + \cos x$ $(-\infty < x < \infty)$

(2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ $(0 \leq x \leq \pi)$

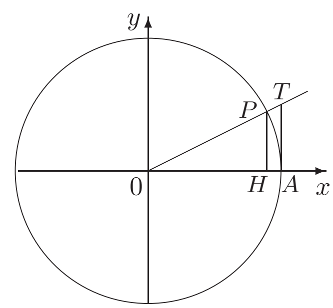
右図は $y = f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ のグラフ.



$\boxed{5}$ **不等式** $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

単位円の円周上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ をとる．点 P から線分 OA に垂線 PH を下ろす $(\mathrm{A} = (1, 0))$．さらに，点 A における円の接線と線分 OP の延長線との交点を T とする．この時，面積について つぎのことが成り立つ：

$\triangle OAP$ の面積 $<$ 扇形 OAP の面積 $<$ $\triangle OAT$ の面積.



したがって

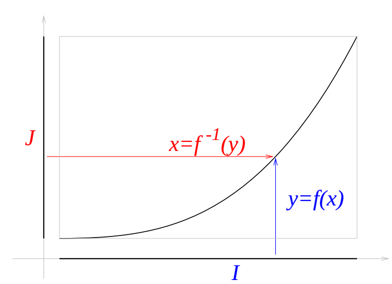
$$\frac{1}{2}\sin\theta < \pi\cdot\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\tan\theta$$

が成り立つから，

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta.$$

1.7 逆関数

A. 逆関数



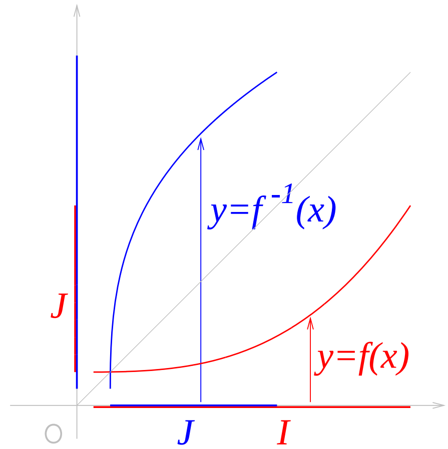
区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ $(x \in I)$ を考える；

I を関数 f の定義域という．この関数の値域を J とする；

$J = \{f(x) \mid x \in I\}$ である.

関数 $f(x)$ が区間 I から区間 J へ 1 対 1 対応である場合を考える．このとき，任意の $y \in J$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in I$ が唯一つ存在する．このとき，任意の $y \in J$ に対して $y = f(x)$ となる唯一つの $x \in I$ を対応させる関数を関数 $f(x)$ の逆関数といい $x = f^{-1}(y)$ で表す.

逆関数 $x = f^{-1}(y)$ $(y \in J)$ は関数 $y = f(x)$ $(x \in I)$ との関連で定義されているので，(関数 $y = f(x)$ の従変数) y を変数とし (関数 $y = f(x)$ の変数) x を従変数としている．この二つの関数の関係は右上図をから，観察される．さて，この逆関数の変数を x また従変数 y として $y = f^{-1}(x)$ とすると，逆関数の定義から，つぎが成り立つことがわかる：



(1)　$y = f^{-1}(x)$ $(x \in J)$ $\iff$ $x = f(y)$ $(y \in I)$

(2)　$f(f^{-1}(x)) = x$ $(x \in J)$

(3)　$f^{-1}(f(x))) = x$ $(x \in I)$.

とくに， $b = f^{-1}(a) \iff a = f(b)$ であるから，点 (a, b) が関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上の点であることと点 (b, a) が関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点であることは論理的に同値である．点 (a, b) と点 (b, a) は直線 $y = x$ に関して対称であるから，次のことがわかる：

関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフと関数 $y = f(x)$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称である．

区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ $(x \in I)$ が区間 J を値域とする強い意味での単調増加（または単調減少）関数であるとき，区間 J を定義域とする逆関数 $f^{-1}(x)$ $(x \in J)$ が存在する．

$\boxed{\text{例}}$

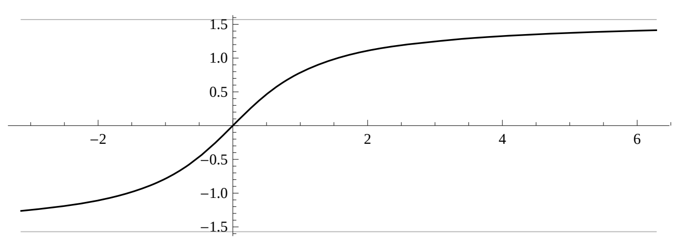
(1)　正の数 a に対して，対数関数 $y = \log_a x$ $(x > 0)$ は指数関数 $y = a^x$ $(-\infty < x < \infty)$ の逆関数である．

(2)　正の整数 $n > 1$ に対して，n 乗根 (関数) $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0)$ は $y = x^n$ $(x \geq 0)$ の逆関数である．

B．逆三角関数

$\boxed{1}$ (1)　逆正接関数 $\tan^{-1} x$ の定義．

単調増加関数 $f(x) = \tan x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ $(-\infty < x < \infty)$ と表す，すなわち，任意の $x \in (-\infty, \infty)$ とある $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に対して $x = \tan y$ が成り立っているとき $y = \tan^{-1} x$ と定義する（ $\arctan x$ とも表す）．

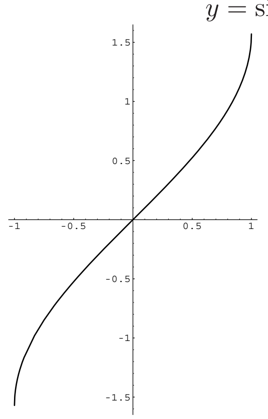


$y = \tan^{-1} x$

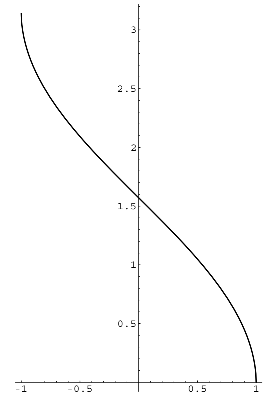
(2)　逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ の定義.

単調増加関数 $f(x) = \sin x \quad (-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2})$ の逆関数を $\sin^{-1} x \quad (-1 \leq x \leq 1)$ と表す，すなわち，任意の $x \in [-1, 1]$ とある $y \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ に対して $x = \sin y$ が成り立っているとき $y = \sin^{-1} x$ と定義する（ $\arcsin x$ とも表す）.

$y = \sin^{-1} x$



$y = \cos^{-1} x$



(3)　逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ の定義.

単調減少関数 $f(x) = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$ の逆関数を $\cos^{-1} x \quad (-1 \leq x \leq 1)$ と表す，すなわち，任意の $x \in [-1, 1]$ とある $y \in [0, \pi]$ に対して $x = \cos y$ が成り立っているとき $y = \cos^{-1} x$ と定義する（ $\arccos x$ とも表す）.

$\boxed{2}$ つぎのことを示せ.

(1)　$\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} \qquad (-1 \leq x \leq 1)$

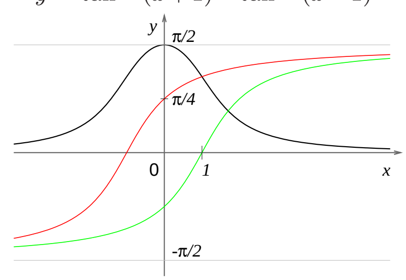
(2)　$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \qquad (x > 0)$

(3)　$\tan^{-1} \dfrac{1}{2} + \tan^{-1} \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

(4)　$\tan^{-1}(x+1) - \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \dfrac{2}{x^2} \qquad (x \neq 0)$

(5)　$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \dfrac{2x}{2 - x^2} \qquad (x^2 < 2)$

$y = \tan^{-1}(x+1) - \tan^{-1}(x-1)$



$\boxed{3}$ つぎの関係式を示せ.

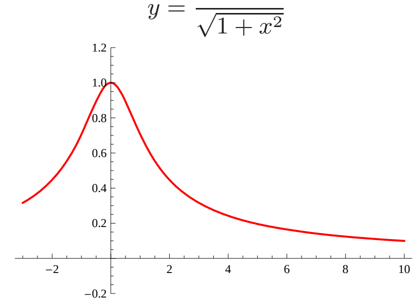
(1)　$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \leq x \leq 1)$

(2)　$\tan(2 \tan^{-1} x) = \dfrac{2x}{1 - x^2} \qquad (-1 < x < 1)$

(3)　$\cos(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad (-\infty < x < \infty)$

(4)　$\sin^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \tan^{-1} x \qquad (-\infty < x < \infty)$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$



1.8　関数の連続性

実数 $\mathbf{R}$ の部分集合 I で定義された関数 $f(x)$ を考える．

A．関数の極限値

$x\ (\neq a)$ を a に限りなく近づけるとき 関数値 $f(x)$ がある値 α に限りなく近づく (収束する) とき

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \qquad \text{または} \qquad f(x)\to\alpha \quad (x\to a)$$

と表し，α を x を a に近づけるときの $f(x)$ の極限値という．$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ が成り立つということと $\displaystyle\lim_{x\to a}\bigl|f(x)-\alpha\bigr|=0$ が成り立つということは同値である．

関数の極限値を調べるとき，右極限値または左極限値を考えることもある：

a より大きい範囲で $x\,(>a)$ を a に限りなく近づけるとき $f(x)$ がある値 α に限りなく近づく (収束する) とき

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha \ \ (\text{あるいは}\ \ \lim_{x\downarrow a} f(x)=\alpha) \qquad \text{または} \qquad f(x)\to\alpha \quad (x\to a+0)$$

などと表し，α を $x\to a+0$ のときの $f(x)$ の右極限値という．$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$ が成り立つということと $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\bigl|f(x)-\alpha\bigr|=0$ が成り立つということは同値である．同様に，

a より小さい範囲で $x\,(<a)$ を a に限りなく近づけるとき $f(x)$ がある値 α に限りなく近づく (収束する) とき

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha \ \ (\text{あるいは}\ \ \lim_{x\uparrow a} f(x)=\alpha) \qquad \text{または} \qquad f(x)\to\alpha \quad (x\to a-0)$$

などと表し，α を $x\to a-0$ のときの $f(x)$ の左極限値という．$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha$ が成り立つということと $\displaystyle\lim_{x\to a-0}\bigl|f(x)-\alpha\bigr|=0$ が成り立つということは同値である．

関数の極限値の発散について考える：

x を a に限りなく近づける場合に関数値 $f(x)$ が限りなく大きく (無限大に) なる場合に

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$　または　$f(x)\to\infty\ \ (x\to a)$　と表し "無限大に発散する" という．

また，変数 x を a に限りなく近づける場合に関数値 $f(x)$ が負の無限大になる場合

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$　または　$f(x)\to-\infty\ \ (x\to a)$　と表し負の無限大に発散するという．

右側極限値や左側極限値を考える場合も同様である．例えば，

変数 x を a より大きい方から a に限りなく近づける場合に関数値 $f(x)$ が無限大になるとき，

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$　または　$f(x)\to\infty\ \ (x\to a+0)$　と表す．

x を a より小さい方から a に限りなく近づける場合に関数値 $f(x)$ が負の無限大になるとき，

$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty$　または　$f(x)\to-\infty\ \ (x\to a-0)$　と表す．

関数の極限値の計算については，つぎの法則が成り立っている; その証明は，**1.9 D.** で行う．

$\boxed{\text{定理 1}}$ $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とする．次の (1) − (4) が成り立つ.

(1) $\lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$

(2) $\lim_{x\to a} \{\gamma f(x)\} = \gamma\alpha$ (γ は定数)

上の (1) と (2) の性質を関数の極限値計算の線形性という.

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$ のとき.)

明らかに，恒等関数 $\varphi(x) = x$ に対しては， $\lim_{x\to a} \varphi(x) = a$ なので，多項式で与えられる関数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

に対しても ($\boxed{\text{定理 1}}$ から) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, すなわち

$$\lim_{x\to a}\{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\} = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0$$

が成り立つ．さらに，多項式 $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ $(b_m \neq 0)$ による商として与えられる有理関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ についても， $g(a) \neq 0$ のときつぎが成り立つ：

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0}{b_m a^m + b_{m-1}a^{m-1} + \cdots + b_1 a + b_0} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

$\boxed{1}$ 因数分解を利用して，つぎの極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ (2) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + x - 2}$ (3) $\lim_{x\to -a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}$

無限大での極限値と発散

関数 $f(x)$ はある区間 (a, ∞) で定義されているとしよう.

変数 x が無限大に発散するときに関数値 $f(x)$ がある値 α に限りなく近づく (収束する) ならば

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \quad (x \to \infty)$$

と表し，実数値 α を x が "無限大に発散する" ときの $f(x)$ の極限値という． $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ が成り立つということは $\lim_{x\to\infty} \left|f(x) - \alpha\right| = 0$ ということと同値である.

特に，変数 x が無限大に発散するときに $f(x)$ が無限大に発散する場合，すなわち，

任意の正の数 M に対してある数 a が存在して $x > a$ ならば $f(x) > M$ が成り立つ場合に

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \Big(\text{または } f(x) \to \infty \ \ (x \to \infty)\Big) \text{ と表す.}$$

同様に，任意の負の数 L に対してある数 a が存在して $x > a$ ならば $f(x) < L$ が成り立つ場合に

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \Big(\text{または } f(x) \to -\infty \ \ (x \to \infty)\Big) \text{ と表す.}$$

つぎに，関数 $f(x)$ がある区間 $(-\infty, a)$ で定義されている場合を考えよう．

変数 x が "負の無限大" $-\infty$ に発散するときに関数値 $f(x)$ がある値 α に限りなく近づく (収束する) ならば

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \quad (x \to -\infty)$$

と表し，実数値 α を x が負の無限大に発散するときの $f(x)$ の極限値という．

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ が成り立つということは $\lim_{x\to-\infty} \left|f(x) - \alpha\right| = 0$ ということと同値である．

また， 変数 x が負の無限大に発散するときに $f(x)$ が負の無限大に発散する場合，すなわち，任意の負の数 L に対してある数 a が存在して $x < a$ ならば $f(x) < L$ が成り立つ場合に

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \Big(\text{または } f(x) \to -\infty \ \ (x \to -\infty)\Big) \qquad \text{と表す．}$$

また，任意の正の数 M に対してある数 a が存在して $x < a$ ならば $f(x) > M$ が成り立つ場合に

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \Big(\text{または } f(x) \to \infty \ \ (x \to -\infty)\Big) \qquad \text{と表す．}$$

$\boxed{\text{例}}$ $n \in \mathbf{N}$, $a > 0$ のとき，つぎのことを確かめよ． (1) $\lim_{x\to0} x^n = 0$ (2) $\lim_{x\to0} x^{-n} = \infty$

(3) $\lim_{x\to+0} x^a = 0$ (4) $\lim_{x\to+0} x^{-a} = \infty$ (5) $\lim_{x\to\infty} x^a = \infty$ (6) $\lim_{x\to\infty} x^{-a} = 0$

(7) $i \in \mathbf{Z}$ のとき $\lim_{x\to i+0} [x] = i$ および $\lim_{x\to i-0} [x] = i - 1$.

ここで $[x]$ は実数 x に対して x 以下の最大の整数を表す **Gauss 記号** である．

A. 連続関数

$\boxed{\text{定義}}$ 区間 I で定義された**関数** $f(x)$ **の** $x = a$ $(\in I)$ **での連続性**

関数 $f(x)$ は $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき，$x = a$ で連続といわれる. また，

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立たないとき，すなわち

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a) \qquad \text{または} \qquad \lim_{x\to a} f(x) \text{ が存在しない}$$

となるとき，関数 $f(x)$ は a で不連続といわれる．

関数 $f(x)$ がある区間 I のすべての点 x で連続のとき， $f(x)$ は区間 I で連続といわれるまた $f(x)$ を区間 I における連続関数であるともいう. 直感的には，関数 $f(x)$ のグラフが連なっていて切れ目がないときにだけ，関数 $f(x)$ は連続である．

明らかに，関数 $\varphi(x) = x$ は $\mathbf{R}$ で連続であり，また $\boxed{\text{定理 1}}$ により，多項式で与えられる関数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0 \in \mathbf{R})$$

も $\mathbf{R}$ で連続であることがわかる．さらに，多項式 $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ $(b_m \neq 0)$ による商として与えられる有理関数

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

は $\left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; g(x) \neq 0\right\}$ で連続となる．

$x = a$ で連続な関数 $f(x)$, $g(x)$ が与えられたとき，その和 $f(x) + g(x)$, 差 $f(x) - g(x)$, 定数 c による定数倍 $cf(x)$, 積 $f(x)g(x)$ で定義される関数も $x = a$ で連続な関数となることは，先に述べた **A. 関数の極限値** $\boxed{\textbf{定理 1}}$ により明らかである．さらに， $g(a) \neq 0$ という条件が満たされれば商として定義される関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も $x = a$ で連続な関数となる．

この事から，実数直線 $\mathbf{R}$ 内の区間 I のすべての点で (定義され) 連続な関数を考えると，つぎの定理の成り立つことがわかる．

$\boxed{\text{定理 2}}$　区間 I で定義された連続関数 $f(x)$, $g(x)$ を考える．このとき，つぎのことが成り立つ：

(1)　$f(x) + g(x)$ は区間 I で連続である．

(2)　定数 c に対して，$cf(x)$ は区間 I で連続である．(ただし， $-f(x) = (-1)f(x)$ ．)

(3)　$f(x)\,g(x)$ は区間 I で連続である．

(4)　$g(x) \neq 0$ $(x \in I)$ ならば $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も区間 I で連続な関数である．

$\boxed{\text{命題 1}}$　関数 x^a $(x \geq 0)$ は連続である．証明は **B.** を見よ．

$\left[\; a > 0 \right.$ ならば x^a $(x \geq 0)$ は狭義単調増加， $a < 0$ ならば x^a $(x > 0)$ は狭義単調減少である．$\left.\right]$

$\boxed{\text{命題 2}}$　$(1 \neq)\ a > 0$ とする．指数関数 a^x $(x \in \mathbf{R})$ は連続である．証明は **B.** を見よ．

$\boxed{\text{命題 3}}$　$(1 \neq)\ a > 0$ とする．対数関数 $\log_a x$ $(x > 0)$ は連続である．証明は **B.** を見よ．

注意.　**1.10 B.** $\boxed{\textbf{定理（逆関数の連続性）}}$ からも示される．

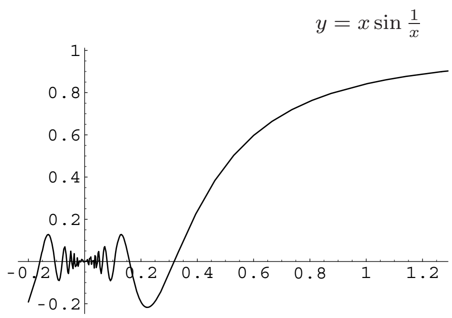
$\boxed{\text{命題 4}}$　三角関数 $\sin x$ $(x \in \mathbf{R})$, $\cos x$ $(x \in \mathbf{R})$ と $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ はその定義域で連続である．

$\boxed{2}$ **命題 4 の証明**　三角関数の性質 **1.6 B.** $\boxed{\mathbf{5}}$ に注意して，つぎの小問に応えよ．

(1)　$|\sin(x+h) - \sin x| = 2\left|\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\,\sin\dfrac{h}{2}\right| \leq |h|$ を示して，$\sin x$ の連続性を示せ．

(2)　$\cos x$ と $\tan x$ の連続性を示せ．

$\boxed{3}$ つぎの極限値を求めよ．



(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 〈 有理化 〉

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+2x}-x}$ 〈 有理化 〉

(3) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left\{\log_2(x+2)-\log_2 x\right\}$ 〈 対数の性質 〉

(4) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ 〈 三角関数の性質 〉

(5) $\displaystyle \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ 〈 三角関数の性質 〉

B. 基本事項

$\boxed{\text{(A)} \quad a>0 \text{ のとき } \displaystyle\lim_{x\to 1} x^a = 1}$ が成り立つ．証明は，**1.9 C.** で行う．

$\boxed{\text{命題 1 の証明}}$ 関数 x^a $(x>0)$ を考える．今，任意の $x_0\,(>0)$ を考えると，

$$\lim_{x\to x_0}\left\{x^a - x_0^a\right\} = \lim_{x\to x_0} x_0^a\left\{\left(\frac{x}{x_0}\right)^a - 1\right\} = x_0^a \lim_{\frac{x}{x_0}\to 1}\left\{\left(\frac{x}{x_0}\right)^a - 1\right\} = 0$$

が成り立つので，x^a $(x>0)$ は x_0 で連続である． //

$\boxed{\text{(B)} \quad a>0 \text{ のとき } \displaystyle\lim_{x\to 0} a^x = 1}$ が成り立つ．証明は，**1.9 C.** で行う．

$\boxed{\text{命題 2 の証明}}$ $a>0$ のとして，指数関数 a^x $(x\in\mathbf{R})$ を考える．任意の x_0 を考えると，

$$\lim_{x\to x_0}\left\{a^x - a_0^x\right\} = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}\left(a^{x-x_0}-1\right) = a^{x_0}\lim_{x-x_0\to 0}\left\{a^{x-x_0}-1\right\} = 0$$

が成り立つので，a^x $(x\in\mathbf{R})$ は x_0 で連続である． //

$\boxed{\text{(LB)} \quad (1\neq)\,a>0 \text{ のとき } \displaystyle\lim_{x\to 1}\log_a x = 0}$ が成り立つ．証明は，**1.9 D.** で行う．

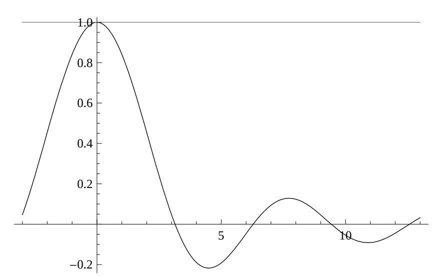
$\boxed{\text{命題 3 の証明}}$ $a>0$ として，対数関数 $\log_a x$ $(x>0)$ を考える．任意の $x_0\,(>0)$ を考えると，

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\log_a x - \log_a x_0\right\} = \lim_{x\to x_0}\log_a\frac{x}{x_0} = \lim_{\frac{x}{x_0}\to 1}\log_a\frac{x}{x_0} = 0$$

が成り立つので，$\log_a x$ $(x>0)$ は $x_0\,(>0)$ で連続である． //

$\boxed{\text{(C)} \quad \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$ が成り立つ．証明は，**2.5 B.** で行う．

下図は $y=\dfrac{\sin x}{x}$.



$x=0$ で定義されていない関数 $\dfrac{\sin x}{x}$ $(x\neq 0)$ は $x=0$ で不連続であるが，関数

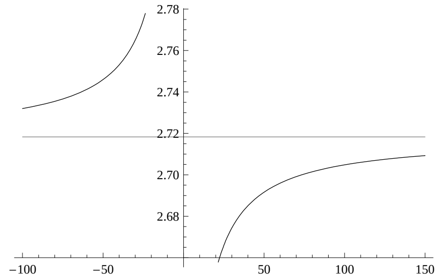
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$$

は $x=0$ で連続関数である．

$$\boxed{\text{(D)} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

が成り立つ． 証明は，**1.9 C.** で行う．

右図は $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$．



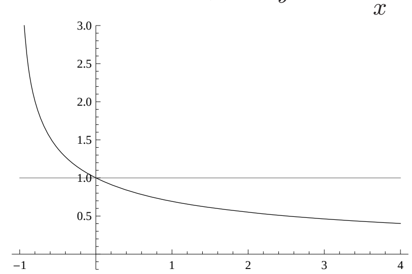
$x \to 0$ のとき， $t = \dfrac{1}{x} \to \pm\infty$ であるから，

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ が成り立つ． 故に，

$\displaystyle\left(\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} =\right) \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+x)}{x}} = e$ が成り立つ．

対数関数の連続性からつぎのことが示される：

下図は $y = \dfrac{\log(1+x)}{x}$ ．



$$\boxed{\text{(E)} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1 \ .}$$

$\boxed{4}$ 次の極限値を求めよ． (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 5x}{2x}$ (2) $b \neq 0$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$\boxed{5}$ (1) 関数 $\dfrac{1}{\sin x}$ は連続か． 関数 $y = \dfrac{1}{\sin x}$ のグラフを画け．

(2) 関数 $\sin\dfrac{1}{x}$ は連続か． 関数 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ のグラフを画け．

(3) 関数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ は連続か． 関数 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ のグラフを画け．

$\boxed{6}$ 指数関数と対数関数の連続性に注意してつぎのことを示せ： 正項数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ （∞ でもよい） のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \alpha$ が成り立つ．

$\boxed{7}$ 上の $\boxed{6}$ を使ってつぎのことを示せ： 正項 (各項が正である) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ が収束する（または ∞ に発散）とき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ が成り立つ．

1.9 基本的極限値 および $\epsilon - \delta$ 論法

C. 基本的極限値の計算

$\boxed{\text{補題}}$　正の整数 n に対して，$\begin{cases} 0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \dfrac{a-1}{n} & (a \geq 1) \\ 0 < 1 - a^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{a} - 1\Big) & (0 < a < 1) \end{cases}$.

$\boxed{\text{証明}}$　$a \geq 1$ の場合．　$\delta = a^{\frac{1}{n}} - 1$ と置く．$\delta \geq 0$ であるから，二項定理を使うと

$$a = (\delta+1)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \cdots + \delta^n \geq 1 + n\delta. \qquad \therefore \quad \frac{a-1}{n} \geq \delta.$$

$0 < a < 1$ の場合 $\dfrac{1}{a} > 1$ であるから，　$0 < 1 - a^{\frac{1}{n}} = \dfrac{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} < \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 < \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{a} - 1\Big)$.　//

$\boxed{\text{(A)}\quad a > 0 \text{ のとき } \lim_{x \to 1} x^a = 1}$ の証明．**1.8 A.** $\boxed{\text{定理 1}}$ に従って，a が非整数の場合を考える．a を超えない最大の整数 $[a] = n$ と $p, q\,(\in \mathbf{N})$ をとって $n + \dfrac{p-1}{q} < a \leq n + \dfrac{p}{q}$ とする．

指数関数の狭義単調増加性により，$x > 1$ ならば

$$\begin{aligned} 0 < x^a - 1 &\leq x^{n+\frac{p}{q}} - 1 = x^n \cdot x^{\frac{p}{q}} - 1 = x^n\big(x^{\frac{p}{q}} - 1\big) + x^n - 1 \\ &= x^n\big((x^p)^{\frac{1}{q}} - 1\big) + x^n - 1 \leq x^n\Big(\frac{x^p - 1}{q}\Big) + x^n - 1 \ \to\ 0 \quad (x \to 1+0). \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ ならば

$$\begin{aligned} 0 < 1 - x^a &\leq 1 - x^{n+\frac{p}{q}} = 1 - x^n \cdot x^{\frac{p}{q}} = 1 - x^n + x^n\big(1 - x^{\frac{p}{q}}\big) \\ &= 1 - x^n + x^n\big(1 - (x^p)^{\frac{1}{q}}\big) < 1 - x^n + x^{n-p}\Big(\frac{1 - x^p}{q}\Big) \ \to\ 0 \quad (x \to 1-0). \quad // \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(B)}\quad a > 0 \text{ のとき } \lim_{x \to 0} a^x = 1}$ の証明．$a = 1$ の場合は明らか．$a > 1$ の場合は，$\boxed{\text{補題}}$ から導かれる

$$\begin{cases} 0 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \dfrac{a-1}{n} & \Big(0 \leq x < \dfrac{1}{n}\Big) \\ 0 < 1 - a^x = 1 - \Big(\dfrac{1}{a}\Big)^{-x} < 1 - \Big(\dfrac{1}{a}\Big)^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{n}(a-1) & \Big(0 > x > -\dfrac{1}{n}\Big) \end{cases}$$

により明らか．$0 < a < 1$ の場合 $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ であるから，$\lim_{x \to 0} a^x = \dfrac{1}{\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 1$ を得る．　//

$\boxed{\text{(D)}\quad \lim_{x \to \infty}\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)^x = \lim_{x \to -\infty}\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)^x = e}$ が成り立つことの証明.

(1)　任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$n \leq x < n+1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\big(1 + \frac{1}{n+1}\big)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} &= \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^n < \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^n \leq \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x < \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{n+1} \\ &\leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って，

$n \leq x < n+1$ のとき　$\dfrac{\big(1 + \frac{1}{n+1}\big)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} < \Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)^x < \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$　が成り立つ．

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ であるから,

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\
&\le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.
\end{aligned}
$$

これは $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ を意味している．つぎに, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ を示そう．

$x \to -\infty$ のとき, $y = -x \to \infty$ である． $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{-y}}\right)^y = \left(1+\dfrac{1}{y-1}\right)^y$ より

$$
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e.
$$

こうして, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ が示された． //

$\boxed{1}$ $a \in \mathbf{R}$ に対して，極限値 $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$ および $\lim_{x\to 0}(1-ax)^{\frac{1}{x}} = e^{-a}$ を示せ.

D．連続性と $\epsilon-\delta$ 論法

関数の極限値の取扱いにおいて，曖昧さが生じないように明確に極限値を計算するための考え方がある；それが $\epsilon-\delta$ 論法である．区間 I で定義された関数 $f(x)$ $(x \in I)$ を考え，$x_0 \in I$ とする．

極限値 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha\,(\in \mathbf{R})$ の意味は,

(∗) $\left(\begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対してある正の数 } \delta \text{ が存在して,} \\ \text{定義域 } I \text{ のどの } x\,(\neq x_0) \text{ に対しても} \quad |x-x_0| \ < \ \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\alpha| \ < \ \epsilon \end{array}\right.$

が成り立つことである (と定義する)．極限値 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ は関数値 $f(x_0)$ に依らないことに注意する．

$\boxed{\text{説明}}$ 極限値 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ を定義する場合に, (∗) とは異なる表現 (意味付け) の一つに,

(∗∗) x_0 に収束する任意の数列 $\left\{(x_0 \neq)\, x_n \in I\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ が必ず成り立つこと

と定義することがある．表現 (∗) と (∗∗) の同値性を示そう．(∗∗) の否定はつぎのことを意味する：

(#) ある数列 $\left\{(x_0 \neq)\, x_n \in I\right\}_{n=1}^{\infty}$ を選ぶと，$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \alpha$ である．

一方，極限値の性質 (∗) の否定はつぎの性質である：

$\left(\begin{array}{l} \text{ある正の数 } \epsilon \text{ に対してどんな (に小さい) 正の数 } \delta \text{ を選んでも,} \\ \text{定義域 } I \text{ のある } x_\delta\,(\neq x_0) \text{ に対して} \quad |x_\delta - x_0| \ < \ \delta \ \text{ かつ } \ |f(x_\delta)-\alpha| \ \geq \ \epsilon \end{array}\right.$

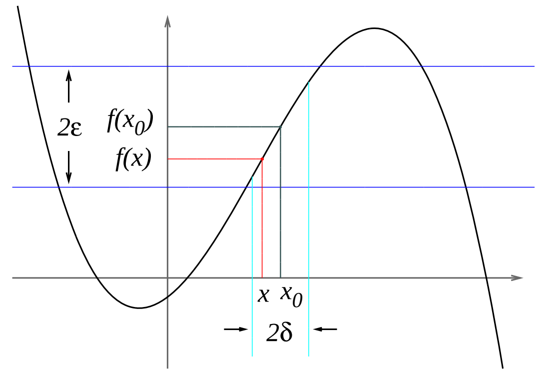
が成り立つことである．関数 $f(x)$ に対して，x_0 で上に述べた (∗) の否定が成り立っているとする．このとき，各番号 n に対して，$\delta = \dfrac{1}{n}$ のときの $x_\delta\,(\neq x_0)$ を x_n と選ぶと,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \alpha. \qquad (\because \quad \lim_{n\to\infty} |f(x_n)-\alpha| \geq \epsilon.\ )$$

これは (#) が成り立つことを意味している．逆に，(#) が 成り立っていると仮定しよう．

1.2 D．数列の収束と $\epsilon - N$ **論法** での数列の収束性の定義の説明から理解されるように，

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ でありながら，ある正の数 ϵ に対して $\lim_{n\to\infty} |f(x_n)-\alpha| \geq \epsilon$ が成り立つことになり，性質 $(*)$ の否定が成り立つ．こうして，関数 $f(x)$ の $x = x_0$ での極限値の二通りの表現の $(*)$ と $(**)$ の否定の同値性が示されたので，$(*)$ と $(**)$ は論理的に同値であることがわかる．



さて，関数 $f(x)$ の $x_0\,(\in I)$ での連続性 ‘ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ’ は次のように言い表される：

連続性　関数 $f(x)$ $(x \in I)$ が $x_0\,(\in I)$ で連続 (すなわち $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$) であるとは

$$(*) \quad \left(\begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対してある正の数 } \delta \text{ が存在して，} \\ \text{定義域 } I \text{ のどの } x \text{ に対しても } \ |x - x_0| \ < \ \delta \ \implies \ |f(x) - f(x_0)| \ < \ \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つことである (上図参照).

$\boxed{\text{(LB)} \quad (1 \neq)\, a > 0 \text{ のとき } \lim_{x\to 1} \log_a x = 0}$ の証明　　$a > 1$ の場合について，述べる．

任意の正の数 ϵ が与えられたとき，指数関数の性質により $a^{-\epsilon} < 1 < a^{\epsilon}$ が成り立っている．
正の数 $\delta = \min\{a^{\epsilon} - 1, 1 - a^{-\epsilon}\}$ を取ると $a^{-\epsilon} \leq 1 - \delta$ また $1 + \delta \leq a^{\epsilon}$ であるから

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \implies a^{-\epsilon} < x = a^y < a^{\epsilon} \quad ,\text{すなわち，} \quad -\epsilon < y = \log_a x < \epsilon$$

が (対数関数の狭義単調増加性により) 成り立つ．これは，$\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$ を意味している．　　//

$\boxed{2}$　つぎの関数 $f(x)$ に対して，その定義域にある x_0 で，任意の正の数 ϵ に対して，条件 $(*)$ を満たす正の数 δ を求めよ．　(1) $f(x) = 2x$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$　　(3) $f(x) = \log x$.

$\boxed{3}$　**補題**　x_0 を含む区間 I で定義された関数 $f(x)$ を考える．

(A)　$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha\,(\in \mathbf{R})$ のとき，$x = x_0$ の近くで関数 $f(x)$ は 有界である，すなわち，
ある正の数 M と δ が存在して つぎが成り立つ：　$|x - x_0| < \delta \implies |f(x)| \leq M$.

(B)　極限値 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$ ならば，ある正の数 m と δ が存在してつぎが成り立つ：

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x)| \geq m\ (> 0).$$

$\boxed{4}$　関数 $f(x)$ $(a<x<b)$ は連続で, ある $x_0 \in (a,b)$ で $f(x_0)>0$ (又は $f(x_0)<0$) とする.
次の事を示せ :

$$\exists\,\delta>0\ :\ x_0-\delta<x<x_0+\delta \quad\Longrightarrow\quad f(x)\ge \frac{f(x_0)}{2}>0 \quad (\text{又は } f(x)\le \frac{f(x_0)}{2}<0\ ).$$

(ある正の数 δ が在って，x が $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ を満たすならば $f(x)\ge \dfrac{f(x_0)}{2}>0$ である．)

1.8　A．関数の極限値 で述べた関数の極限値の計算法についての**定理の証明**を考えよう.

$\boxed{\text{定理 1}}$　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\quad \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ とする．次の (1) − (4) が成り立つ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big\{f(x)+g(x)\Big\} \;=\; \alpha+\beta$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\Big\{\gamma f(x)\Big\} \;=\; \gamma\alpha$　　　(γ は定数)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) \;=\; \alpha\beta$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{\alpha}{\beta}$　　　($\beta\neq 0$ のとき.)

(参照．**1.2 D．数列の収束と** $\epsilon-N$ **論法**での数列の極限値についての**定理 1 の証明**は関数の極限値についてのこの定理の証明の考え方と類似している．)

さて，実数の絶対値の性質から，つぎの (p1) − (p4) が成り立っていることを注意する:

(p1) $\big|f(x)+g(x)-(\alpha+\beta)\big| \;=\; \big|f(x)-\alpha+g(x)-\beta\big| \;\le\; \big|f(x)-\alpha\big|+\big|g(x)-\beta\big|$

(p2) $\big|\gamma f(x)-\gamma\alpha\big| \;=\; \big|\gamma\big|\big|f(x)-\alpha\big|$

(p3) $\big|f(x)g(x)-\alpha\beta\big| \;=\; \big|(f(x)-\alpha)g(x)+\alpha(g(x)-\beta)\big| \;\le\; \big|f(x)-\alpha\big|\big|g(x)\big|+\big|\alpha\big|\big|g(x)-\beta\big|$

(p4) $\beta\neq 0$ かつ $g(x)\neq 0$ のとき,

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\Big| \;=\; \Big|\frac{f(x)\beta-\alpha g(x)}{g(x)\beta}\Big| \;=\; \Big|\frac{(f(x)-\alpha)\beta-\alpha(g(x)-\beta)}{g(x)\beta}\Big| \;\le\; \frac{\big|f(x)-\alpha\big|\big|\beta\big|+\big|\alpha\big|\big|g(x)-\beta\big|}{\big|g(x)\beta\big|}.$$

今，$\displaystyle\lim_{x\to a}|f(x)-\alpha|=\lim_{x\to a}|g(x)-\beta|=0$ であるから，x が x_0 に近づくと $\big|f(x)-\alpha\big|$ と $\big|g(x)-\beta\big|$ は 0 に近づく．上の (p1) と (p2) から x が x_0 に近づくと $\big|f(x)+g(x)-\alpha-\beta\big|$ と $|\gamma f(x)-\gamma\alpha|$ も 0 に近づくことがわかる．このことは $\boxed{\text{定理 1}}$ の (1) と (2) を示している.

$\boxed{\text{定理 1}}$ の (3) と (4) を示すためには，先の $\boxed{3}$ **補題** に注意しなければならない :
この補題の (A) と (p3) から x が x_0 に近づくと

$$\big|f(x)g(x)-\alpha\beta\big| \;\le\; \big|f(x)-\alpha\big|\big|g(x)\big|+\big|\alpha\big|\big|g(x)-\beta\big| \;\le\; \big|f(x)-\alpha\big|M+\big|\alpha\big|\big|g(x)-\beta\big|$$

も 0 に近づくことがわかる．このことは $\boxed{\text{定理 1}}$ の (3) を示している.

また，補題の (B) と (p4) から x が x_0 に近づくと

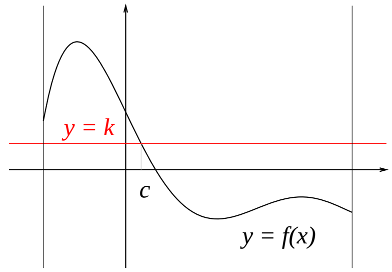
$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\Big| \;\le\; \frac{\big|f(x)-\alpha\big|\big|\beta\big|+\big|\alpha\big|\big|g(x)-\beta\big|}{\big|g(x)\beta\big|} \;\le\; \frac{\big|f(x)-\alpha\big|\big|\beta\big|+\big|\alpha\big|\big|g(x)-\beta\big|}{m\,\big|\beta\big|}$$

も 0 に近づくことがわかる．このことは $\boxed{\text{定理 1}}$ の (4) を示している．　//

$\boxed{5}$　$a>1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x}=\infty$ を示せ.

1.10　連続関数の性質

B. 中間値の定理と最大値・最小値定理



中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続とする．

$f(a) \neq f(b)$ のとき，関数 $f(x)$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての値をとる．

すなわち，　$f(a) < k < f(b)$ （または，$f(b) < k < f(a)$） である任意の　k　に対して，

$$k = f(c) \quad となるある \quad c \in [a,\ b] \quad がある．$$

例えば，関数 $f(x) = x^n \ \ (0 \leq x < \infty)$ の場合には，任意の正の数　k　に対して，$k = f(c)$　となる正の数　c　を求めることができる．この場合，　c は k の n 乗根　$\sqrt[n]{k}$　であるから，平方根 $\sqrt{2}$ を計算するように，$|c_p^n - k| < 10^{-p}$ となる正の数列 $\{c_p\}_{p=1}^{\infty}$ を計算すれば，$\lim_{p\to\infty} c_p = c$ となる．

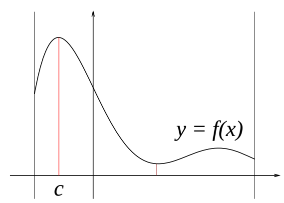
中間値の定理は定理にいう連続関数 $f(x)$ に対して $k = f(c)$ となる数 c があることを，どのようにして計算するかについては教えないが，そのような数 c が必ず存在することだけは教えてくれる重要な定理である．

$\boxed{1}$　実数を係数とする奇数次の代数方程式　$x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$　は少なくとも一つの実数解をもつことを示せ．

最大値・最小値定理　閉区間 $[a,\ b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ は必ず最大値 (最小値) をとる．すなわち，

すべての $x \in [a, b]$ で $f(x) \leq f(c)$ となるある $c \in [a, b]$ がとれる．

(すべての $x \in [a, b]$ で $f(x) \geq f(c)$ となるある $c \in [a, b]$ がとれる．)



定理（逆関数の連続性）　区間 I で定義された連続関数 $y = f(x) \ \ (x \in I)$ が強い意味での単調増加（または単調減少）であるとき，逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在して $f^{-1}(x)$ は強い意味での単調増加（または単調減少）連続関数である．

系　$a > 0$ を底とする対数関数 $\log_a x$ は $(0,\ \infty)$ で連続である．何故ならば，対数関数 $\log_a x$ は (連続関数である) 指数関数 a^x の逆関数であるから．

D. 証明

逆関数の連続性の証明

$y=f(x)\ \ (x\in I)$ が強い意味で単調増加とする．中間値の定理から，連続関数 $y=f(x)\ \ (x\in I)$ の値域 J は区間であることがわかる．さらに，逆関数 $f^{-1}(x)\ \ (x\in J)$ は強い意味で単調増加である．何故ならば， $x<x'\in J$ のとき，

$$y=f^{-1}(x),\quad y'=f^{-1}(x')\in I\quad \text{に対して}\qquad f(y)=x<x'=f(y')$$

が成り立つから（関数 $f(x)$ の強い意味での単調増加性により） $y<y'$ が成り立たねばならない．任意の $x_0\in J$ と $y_0=f^{-1}(x_0)\in I$ を考える．任意に小さい正の数 ϵ に対して

$$f(y_0-\epsilon)=x_0-\delta_1,\qquad f(y_0+\epsilon)=x_0+\delta_2$$

とすると，$x_0-\delta_1<x<x_0+\delta_2$ のとき

$$y_0-\epsilon=f^{-1}(x_0-\delta_1)<f(x)<f^{-1}(x_0+\delta_2)=y_0+\epsilon$$

が成り立つ．これは逆関数の連続性を示している．　　//

中間値の定理および最大値・最小値定理を証明するために，つぎの定義と補題を置く．補題は **1.1 B． 定理 1.1　実数の連続性の原理** と論理的に同値である．

実数直線 $\mathbf{R}$ 内に含まれる**集合** K **が上に有界であるとは，ある正の数** M **を取るとすべての** $x\in K$ **に対して** $x\leq M$ **となることである．**(集合 K が下に有界であるとは，ある正の数 L を取るとすべての $x\in K$ に対して $x\geq L$ となることである．集合 K が上にも下にも有界であるとき，集合 K は有界であるといわれる．)

補題 上限の存在　実数直線 $\mathbf{R}$ 内の上に有界な集合 K に対して，つぎの二つの性質を持つ数 λ (K の上限と呼ばれ， $\sup K$ と表される) が存在する：

(1)　すべての $x\in K$ に対して， $x\leq\lambda$ ．（ K に含まれる数は $\sup K$ を超えない．）

(2)　すべての正の数 ϵ に対して， $\lambda-\epsilon<x$ となるある $x\in K$ が存在する．

（ $\sup K$ より小さい数に対しては，それより大きい集合 K の数がある．
このことは次のようにも言える：
$\sup K$ に収束する数列 $\{k_n\in K\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．）

証明　集合 K にその最大の要素 $\mu=\max\{x\,|\,x\in K\}$ がある場合には，$\lambda=\sup K=\max K=\mu$ である．今，集合 K の最大の要素 $\max\{x\,|\,x\in K\}$ がない場合を考える．集合 K は上に有界であるから，K に含まれるどの数 x より大きいか等しい数 μ_0 が存在する．K に含まれるある数 k_0 をとり $\mu=\dfrac{k_0+\mu_0}{2}$ を考えると $k_0\leq\mu\leq\mu_0$．K に含まれるどの数 x も μ 以下である場合は $k_1=k_0$ そして $\mu_1=\mu$ とし，そうではない場合には μ より大きい K に含まれる数 k_1 をとり $\mu_1=\mu_0$ とする．どちらの場合でも

$$\begin{cases} k_0\leq k_1\leq\mu_1\leq\mu_0\\ 0\leq\mu_1-k_1\leq\dfrac{\mu_0-k_0}{2}\end{cases}$$

が成り立つ. 帰納的に, 数列 $\{k_i\}_{i=0}^{n-1}$ と $\{\mu_i\}_{i=0}^{n-1}$ を取りだしすことができたとき，$\mu=\dfrac{k_{n-1}+\mu_{n-1}}{2}$ を考えると $k_{n-1}\leq\mu\leq\mu_{n-1}$．$K$ に含まれるどの数 x も μ 以下である場合は $k_n=k_{n-1}$ そして

$\mu_n = \mu$ とし，そうではない場合には μ より大きい K に含まれる数 k_n をとり $\mu_n = \mu_{n-1}$ とする．どちらの場合でも

$$\begin{cases} k_0 \le k_1 \le \cdots \le k_n \le \mu_n \le \cdots \le \mu_1 \le \mu_0 \\ 0 \le \mu_n - k_n \le \dfrac{\mu_0 - k_0}{2^n} \end{cases}$$

が成り立つ．こうして，数列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取り出すことができる．このとき，下に有界な単調減少数列の極限 $\lambda = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ が集合 K の上限である．すなわち，以下が成り立つ．

(1) すべての $x \in K$ に対しても $x \le \mu_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるから， $x \le \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda$.

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lim_{n\to\infty} k_n$ であるから，

(2) すべての正の数 ϵ に対して，

$\lambda - \epsilon < k_m$ となる m 番目の項 $k_m \in K$ が存在する． //

$\boxed{\text{中間値の定理の証明}}$

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続で $f(a) < k < f(b)$ が成り立っているとする．集合 $K = \{x \in [a,\ b] \mid f(x) \le k\}$ を考えると， (1) K は上に有界 (2) $a \in K$ (3) $b \notin K$ が成り立つ．
$\boxed{\text{補題 上限の存在}}$ により，$x_0 = \sup K$ に対して 数列 $\{k_n \in K\}_{n=1}^{\infty}$ を $\lim_{n\to\infty} k_n = x_0$ が成り立つようにとれる．このとき，$f(k_n) \le k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ であるから関数 $f(x)$ の連続性により

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(k_n) \le k.$$

また K の性質 (3) より $x_0 = \sup K < b$ であるから，十分大きい番号 n に対して
$\begin{cases} x_n = x_0 + \dfrac{1}{n} \in [a,\ b] \setminus K \\ f(x_n) > k \end{cases}$ が成り立つので， $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ge k$. 故に， $f(x_0) = k$. //

$\boxed{\text{最大値・最小値定理の証明}}$

最初に，関数 $f(x)$ が $[a,\ b]$ で上に有界であることを示す．関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で上に有界でないと仮定すると，どんな正の整数 n に対しても $f(x_n) > n$ が成り立つ点 $x_n \in [a,\ b]$ がとれる．数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界閉区間 $[a,\ b]$ に含まれるから，Bolzano-Weierstrass の定理により収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ がとれる． $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,\ b]$ とすると $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$ となる．これは関数値 $-\infty < f(x_0) < \infty$ に矛盾する．関数 $f(x)$ が $[a,\ b]$ で上に有界であることが示されたので，

$$\text{ある正の数 } M \text{ があって，すべての } x \in [a,\ b] \text{ に対して} \quad f(x) \le M$$

が成り立つ．こうして 関数値の集合 $V = \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in [a,\ b] \right\}$ は実数 $\mathbf{R}$ の中で上に有界であることが示された．補題により，関数値の集合 V の上限 $\sup\ V$ に収束する数列 $\{f(x_n) \in V\}_{n=1}^{\infty}$ がとれる．このとき，$\{x_n \in [a,\ b]\}_{n=1}^{\infty}$ であるから，収束する部分列が取れる－収束する部分列の番号を付け直して数列 $\{x_n \in [a,\ b]\}_{n=1}^{\infty}$ がある $x_0 \in K$ に収束すると考えることができる．関数 $f(x)$ の連続性により $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup\ V$.

$$\text{このとき} \qquad f(x) \le \sup\ V = f(x_0) \qquad (\ \forall x \in [a,\ b]\ ). \qquad //$$

1.11　関数の極限

C. べき級数の収束判定

$x_0 \in \mathbf{R}$ とする．変数 x と $a_n \in \mathbf{R}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ から決まる無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ を x_0 中心のべき (冪) 級数という．明らかに， x に x_0 を代入した場合のべき級数の和は a_0 であると考えられるが， x に x_0 と異なる実数を代入した場合にべき級数の和が考えられるか否かは無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ が収束するか否かによると考えられるであろう．

補題 べき級数の収束半径の存在　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ に対して，$|x| < R$ のときべき級数は絶対収束し，$|x| > R$ のときべき級数は発散するような非負の数 R が存在する．この $R \geq 0$ をべき級数の収束半径という．特に，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ x^n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\ x^n$ の収束半径は一致する．

1　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1 である．
この無限級数は等比級数 （ 1.3 級数 A. 級数の和 ） と考えられるから， $0 \leq |x| < 1$ のとき収束し， $|x| > 1$ のとき 発散する．

定理　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ が存在（収束）するとき， 収束半径 $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$．すなわち $0 \leq |x| < \dfrac{1}{r}$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束し， $|x| > \dfrac{1}{r}$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する．

(コーシーの判定法)

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$ が存在（収束）するとき， 収束半径 $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$．すなわち $0 \leq |x| < \dfrac{1}{r}$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束し， $|x| > \dfrac{1}{r}$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する．

(ダランベールの判定法)

証明　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n\, x|^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\ |x| = r\ |x|$ であるから，**1.3 級数　D．コーシーの判定法** により

$$0 \leq |x| < \frac{1}{r} \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は絶対収束し，} \quad |x| > \frac{1}{r} \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は発散する．}$$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}\, x^{n+1}|}{|a_n\, x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\, x\right| = r|x|$ であるから，**1.3 級数　D．ダランベールの判定法** により

$$0 \leq |x| < \frac{1}{r} \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は絶対収束し，} \quad |x| > \frac{1}{r} \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は発散する．} \quad //$$

$\boxed{2}$ つぎのべき級数の収束する範囲を求めよ．(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

$\boxed{3}$ つぎのべき級数の収束半径を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ を示せ．

D. 補題 べき級数の収束半径の存在 の証明

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0$ で収束しているとする．このとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$ となる (**1.3 級数 A. 級数の和** **命題**) から，ある正の数 M に対して $|a_n x_0^n| < M$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ が成り立つ．このとき，

$$|x| < |x_0| \implies |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \Big(\frac{|x|}{|x_0|}\Big)^n < M \Big(\frac{|x|}{|x_0|}\Big)^n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)\ .$$

故に，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| \ \leq\ \sum_{n=1}^{\infty} M \Big(\frac{|x|}{|x_0|}\Big)^n \ =\ \frac{M|x|}{|x_0| - |x|} \ < \infty.$$

従って べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < |x_0|$ で絶対収束する，そして **1.3 級数 D. 絶対収束 定理** によりもちろん収束している． このことから， つぎのことがわかる： $x = x_0$ に対して，

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ は収束する} \quad \implies \quad |x| < |x_0| \text{ のとき} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|x|^n \text{ は収束する．} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ は発散する} \quad \implies \quad |x| \geq |x_0| \text{ のとき} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|x|^n \text{ は発散する．} \end{cases}$$

従って， $\displaystyle r \ = \ \sup\Big\{\ |x| \ \Big|\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|x|^n < \infty \text{ (収束)} \Big\}$ がべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径であることがわかる． //

$\boxed{5}$ べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ と べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径は一致することを示せ．

第2章　微分法

2.1　曲線の表示

A. パラメータ（媒介変数，径数）表示

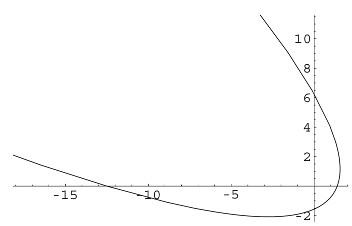
曲線 C は，曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ を指示することによって，どんな曲線であるかが明確になる．

曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ を区間 I を動く変数 t の関数 $f(t),\ g(t)$ を使って表すこと，

$$(\star)\qquad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \qquad (t \in I) \end{cases}$$

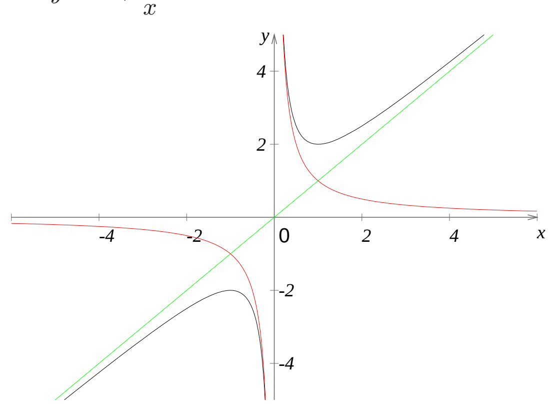
のように表すことを曲線 C のパラメータ（媒介変数，径数）表示と言う．
関係式 $(\star)$ は曲線を定める．
区間 $I = [a,\ b]$ のとき，
点 $(f(a),\ g(a))$ を曲線 C の始点、
点 $(f(b),\ g(b))$ を曲線 C の終点という．

例．$$\begin{cases} x = f(t) = -4t^2 + 3t + 1 \\ y = g(t) = 3t^2 + 4t - \dfrac{3}{4} \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$



注意．　右上図の曲線は関係式 $\dfrac{-4x+3y}{5} = \dfrac{1}{5}\Big(\dfrac{3x+4y}{5}\Big)^2 - \dfrac{4}{5}$ を満たしている放物線である．

例．　$y = x + \dfrac{1}{x}$



関数のグラフ

関数　$f(x)$　$(a \leq x \leq b)$　のグラフはパラメータ表示

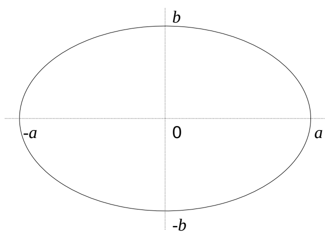
$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \quad (a \leq t \leq b) \end{cases}$$

を持つ曲線と考えられる．

$\boxed{\text{例. 楕円} \ (a,\ b > 0)}$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のパラメータ表示 :

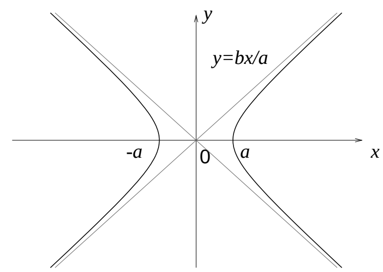
$$(\star) \qquad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \qquad (0 \leq t < 2\pi) \end{cases}$$



$\boxed{\text{例. 双曲線} \ (a,\ b > 0)}$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のパラメータ表示 :

$$(\star) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}(t + \dfrac{1}{t}) \\ y = \dfrac{b}{2}(t - \dfrac{1}{t}) \qquad (-\infty < t\ (\neq 0) < \infty) \end{cases}$$



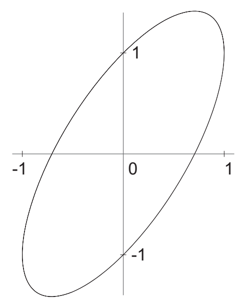
注意.　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ は $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ を漸近線としていることを示せ.

(定義. 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = cx$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x) - cx\} = 0$ が成り立つとき, 直線 $y = cx$ は曲線 $y = f(x)$ の漸近線といわれる.)

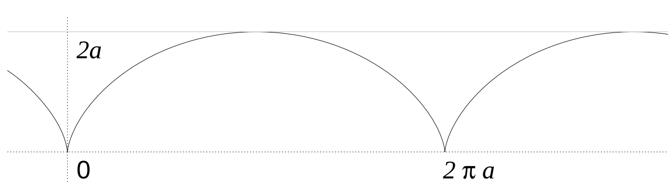
$\boxed{\text{例. 楕円}}$　曲線[1] $2x^2 - 2xy + y^2 = 1$ のパラメータ表示.

$2x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + (x-y)^2 = 1$ であるから,

$$(\star) \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t - \sin t \qquad (0 \leq t < 2\pi) \end{cases}$$



$\boxed{\text{例. Cycloid}}$　サイクロイドのパラメータ表示 $(a > 0)$: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \qquad (-\infty < t < \infty) \end{cases}$



[1] $2x^2 - 2xy + y^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{(1+\sqrt{5})\,x}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \dfrac{2y}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2 + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{(1-\sqrt{5})\,x}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} - \dfrac{2y}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)^2 = 1$
は楕円の方程式である.

B. 極座標

$\boxed{\text{極 (座標) 表示}}$

平面上の点 P は，xy 平面上では，原点 O からの距離 r と線分 PO が x 軸に対してなす角 θ によって

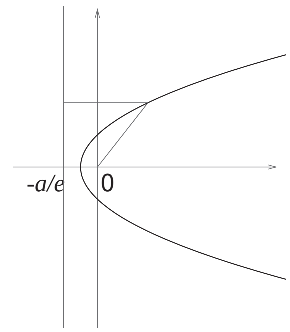
$$P(x,\ y)\ :\ x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

という関係式で表される．

$\boxed{\text{例}}$ 半径 a の円の極表示は $r = a$.

$\boxed{\text{例. 円錐曲線の極表示 } (a,\ e > 0)}$

$$r = \frac{a}{1 - e\cos\theta} \qquad (0 < \theta < 2\pi)\ .$$



$e = 1$

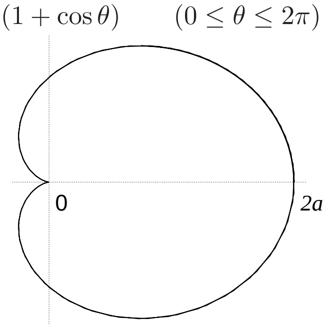
注意. 上例の円錐曲線は直線 $x = -\dfrac{a}{e}$ を準線，原点 O を焦点としていて，

$$(1 - e^2)x^2 - 2aex + y^2 = a^2$$

を満たしている．

$\boxed{\text{例. カージオイド Cardioid } (a > 0)}$

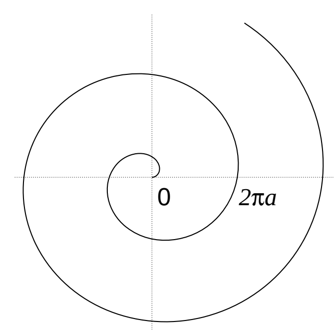
$$r = a(1 + \cos\theta) \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)\ .$$



$a = 1$

$\boxed{\text{例. アルキメデスの螺旋 Archimedes Spiral } (a > 0)}$

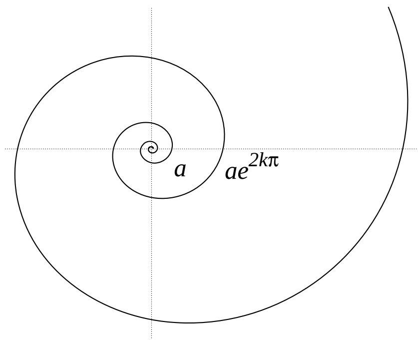
$$r = a\theta \qquad (\theta > 0)\ .$$



$a = 1$

例. 対数螺旋 Logarithmic Spiral $(a > 0)$

$$r = ae^{k\theta} \qquad (-\infty < \theta < \infty)\ .$$



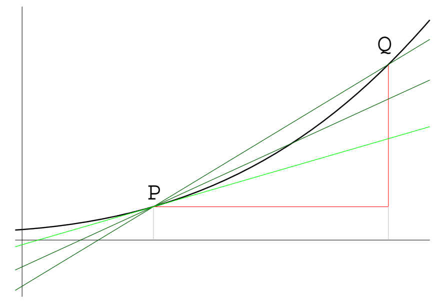
C. 平面曲線の陰（関数）表示

問 $\quad \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2}$ で与えられる平面曲線はどんな曲線か.

2.2 曲線の接線と微分

A. 微分係数と接線

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ を考える．この点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ を通る傾き κ の直線は方程式 $y = \kappa\,(x-a) + f(a)$ で表される．グラフ上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ と点 $\mathrm{Q}(a+h,\ f(a+h))$ を通る直線を考えよう．この直線 PQ の傾きは $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ であるから，この直線 PQ を表す方程式は



$$y = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a) + f(a)$$

である．点 $\mathrm{Q}(a+h,\ f(a+h))$ が点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ に近づく，すなわち，$h \to 0$ となるにつれて直線 PQ の**傾き**

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

がある一定値 λ に近づくとき，この極限値 λ を $x = a$ での $f(x)$ の**微分係数**といい $f'(a)$ と表す:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

このとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能と言われ，点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ を通る傾き $f'(a)$ の直線

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

を曲線 $y = f(x)$ の**接線**という； 点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ は**接点**といわれる．

$\big($ 関数 $f(x)$ が定義されている $\big)$ 変数 x に微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を $f(x)$ の**導関数**といい，y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$f'(x)$，$\dfrac{d\,f(x)}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などと表す．

$\boxed{\text{命題 } x^n \text{ の導関数}}$ $\big\{x^n\big\}' = nx^{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$．

証明． 因数分解 $a^n - b^n = \big(a-b\big)\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\big)$ より，

$(x+h)^n - x^n = h\big\{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\big\}$ が成り立つ．故に，

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\big\{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\big\} = nx^{n-1}$ ． //

$\boxed{\text{命題 } \sqrt[n]{x} \text{ の導関数}}$ $\big\{\sqrt[n]{x}\big\}' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ すなわち，$\big\{x^{\frac{1}{n}}\big\}' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$ ．

証明． 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h}$ を求めるために，$k = \sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}$ を考える．今，$y = \sqrt[n]{x}$ と置くと $x = y^n$ が成り立ち，また $y + k = \sqrt[n]{x+h}$ であるから $(y+k)^n = x + h$ が成り立つ．

従って $h=\big(y+k\big)^n-y^n=k\big\{(y+k)^{n-1}+(y+k)^{n-2}y+\cdots+(y+k)y^{n-2}+y^{n-1}\big\}$ となっている．指数関数 $y=\sqrt[n]{x}$ は区間 $[0,\infty)$ で連続であるから，$h\to 0$ のとき $k\to 0$ となる．故に

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{\big(y+k\big)^n-y^n}\\
=\;&\lim_{k\to 0}\frac{1}{(y+k)^{n-1}+(y+k)^{n-2}y+\cdots+(y+k)y^{n-2}+y^{n-1}}=\frac{1}{n\,y^{n-1}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \quad //
\end{aligned}$$

B. 微分の基本的性質

$\boxed{\text{定理 1}}$　関数 $f(x),\ g(x)$ が微分可能であるとする．次の (1) − (4) が成り立つ．

(1)　$\{f(x)+g(x)\}' \;=\; f'(x)+g'(x)$

(2)　$\{\alpha f(x)\}' \;=\; \alpha f'(x)$　(α は定数)

上の (1) と (2) の性質を微分 (係数) の線形性という．

(3)　$\{f(x)g(x)\}' \;=\; f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(4)　$g(x)\neq 0$ のとき，　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' \;=\; \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$

$\boxed{\text{証明}}$　これらの性質は，極限値の計算によって示される．

(1)
$$\begin{aligned}
\{f(x)+g(x)\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-\big(f(x)+g(x)\big)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)\ .
\end{aligned}$$

(2)
$$\{\alpha f(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha f(x+h)-\alpha f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}=\alpha f'(x)\ .$$

(3)
$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)g(x+h)+f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\ .
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\Big)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left\{\frac{\big(f(x+h)-f(x)\big)g(x)-f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}\right\}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\\
&=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\ . \qquad //
\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ 次の関数を微分せよ． (1) $x^7 + 3x - 1$ (2) $\dfrac{x^2 - x + 4}{x}$ (3) $\dfrac{x^2 + 3}{2 - x}$

合成関数の微分法

$\boxed{\text{定理}}$ 関数 $z = g(y)$, $y = f(x)$ が微分可能で，合成関数 $z = g(f(x))$ が意味を持つ（定義される）とき $z = g(f(x))$ は微分可能で $\{g(f(x))\}' = g'(f(x))\, f'(x)$ が成り立つ，すなわち，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

$\boxed{\text{例題}}$ (1) 関数 $y = \left(3x^2 - 1\right)^{17}$ の導関数はつぎのようにして容易に計算される．
関数 $t = 3x^2 - 1$ を関数 $t = f(x)$ とし，関数 $y = t^{17}$ を関数 $y = g(t)$ と考えると，関数 $y = (3x^2 - 1)^{17}$ は合成関数として $g(f(x)) = (3x^2 - 1)^{17}$ と表される．合成関数の微分法により

$$\left\{\left(3x^2 - 1\right)^{17}\right\}' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 17f(x)^{16} \cdot 6x = 17(3x^2 - 1)^{16} \cdot 6x = 102x(3x^2 - 1)^{16}.$$

(2) $f(x^2)$ の導関数． $y = x^2$ とおくと，$z = f(x^2) = f(y)$ となるから，合成関数の微分法より

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f'(y) \cdot 2x = 2xf'(x^2)\ , \text{ すなわち } \frac{d}{dx}f(x^2) = 2xf'(x^2).$$

$\boxed{2}$ $p,\ q\ (\neq 0) \in \mathbb{Z}$ に対して，つぎのことを示せ: $\left\{x^{\frac{p}{q}}\right\}' = \dfrac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1}$.

$\boxed{3}$ 次の関数を微分せよ．

(1) $(x^3 + 1)^7$ (2) $(2x + 1)^2(x - 2)^3$ (3) $\left(\dfrac{1}{1 - x^2}\right)^{12}$ (4) $\dfrac{x^2 - x + 4}{\sqrt[3]{x}}$ (5) $\sqrt{x^2 + 1}$

$\boxed{4}$ $f(x)$ が微分可能であるとき，つぎの関数を微分せよ．

(1) $f(f(x))$ (2) $\left\{f(x) - \dfrac{1}{f(x)}\right\}^2$ (3) $\sqrt{f(2x + 1)}$

$\boxed{\text{例．熱膨張係数}}$ ある物質 (個体) の熱膨張について調べてみると，長さ L は温度 T の関数 $L(T)$ と考えられる．長さ L の物体が温度 T から $T + \Delta T$ (単位 $1/K$) まで加熱されるとき，その長さは L から $L + \Delta L$ へ変化する： ただし

$$\Delta L = \alpha L\, \Delta T.$$

ここで 数 α は

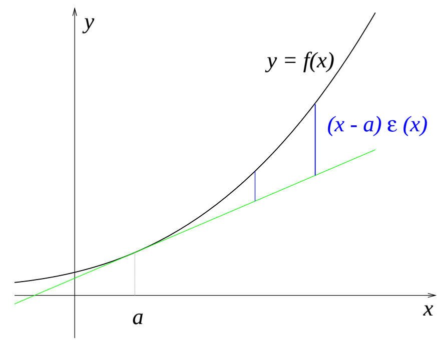
$$\alpha = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{\Delta T} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dT}$$

と考えられる定数で物質の線膨張率 (線膨張係数) と言われる (例えば，鉄の線膨張率は 12.1 $\times 10^{-6}/K$)．この物質の立方体の体積 $V(T) = L(T)^3$ の変化率 $\dfrac{dV(T)}{dT}$ はつぎのように計算できる：

$$\frac{dV(T)}{dT} = \frac{dL(T)^3}{dT} = 3L(T)^2\frac{dL(T)}{dT} = 3\alpha L(T)^3 = 3\alpha V(T).$$

$\boxed{5}$ 変化する状態を表現するものとしての変化率の例 (速度，生物の体長の成長速度，物価上昇率など) について計算法を調べよ．これらの例において，その瞬間変化率はどのような関数の微分係数と考えられるか．

C. 合成関数の微分法の証明



$\boxed{\text{命題}}$ 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能で $f'(a) = \lambda$ であるための必要十分条件は，関数 $\epsilon(x)$ が存在して

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\epsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0 \end{cases}$$

が成り立つことである．

(この命題から見れば，微分可能関数の連続性‘ $x = a$ で微分可能な関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続である．’は明白である．)

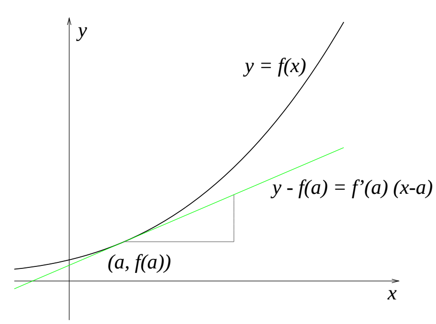
$\boxed{\text{証明}}$ 条件が成り立つとき，明らかに $f'(a) = \lim_{x\to a}\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lambda$ であるから，必要性を示そう．$y = f(x)$ のグラフと接線 $y = \lambda(x-a) + f(a)$ のずれは，つぎの関数 $\delta(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x-a)$ で表される．このとき，関数

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\delta(x)}{x-a} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} - \lambda & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$

は $x = a$ で連続な関数であって定理の条件を満たしていることが容易にわかる． //

注． この命題は微分可能な関数 $f(x)$ のグラフとして与えられる曲線の接線は接点 $(a, f(a))$ の近くで関数 $f(x) - f(a)$ の一次近似

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$



を与えるものだということを示している．いわゆる微分式

$$dy = f'(a)\,dx$$

はこの意味での接線の表現であり，$df = f'(x)\,dx$ を関数 $f(x)$ の微分 (形) 式という．

合成関数の微分法の証明　$b=f(a)$ で合成関数 $z=g(f(x))$ が意味を持つとする．

関数 $z=g(y)$ は $y=b$ で, また関数 $y=f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるから,

$\mu=g'(b),\ \lambda=f'(a)$ とすると 関数 $\xi(y)$ と $\eta(x)$ が存在して

$$\begin{cases} g(y)=g(b)+\mu\cdot(y-b)+(y-b)\xi(y), & \lim_{y\to b}\xi(y)=0 \\ f(x)=f(a)+\lambda\cdot(x-a)+(x-a)\eta(x), & \lim_{y\to b}\eta(y)=0 \end{cases}$$

が成り立っている．故に

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a))+\mu\cdot(f(x)-f(a))+(f(x)-f(a))\xi(f(x)) \\ &= g(f(a))+\mu\cdot\Big(\lambda\cdot(x-a)+(x-a)\eta(x)\Big)+\Big(\lambda\cdot(x-a)+(x-a)\eta(x)\Big)\xi(f(x)) \\ &= g(f(a))+\mu\lambda(x-a)+(x-a)\Big\{\mu\eta(x)+\eta(x)\xi(f(x))\Big\} \end{aligned}$$

が成り立っている．さらに $\lim_{x\to a}\Big\{\mu\eta(x)+\eta(x)\xi(f(x))\Big\}=0$ が成り立つから,

$\epsilon(x)=\mu\eta(x)+\eta(x)\xi(f(x))$ と置くと
$$\begin{cases} g(f(x))=g(f(a))+\mu\lambda(x-a)+(x-a)\epsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\epsilon(x)=0 \end{cases}$$

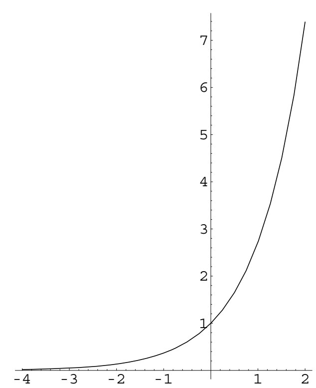
が成り立つ．先の命題により，$z=g(f(x))$ は微分可能で

$$\{g(f)\}'(a) \ = \ \mu\lambda=g'(f(a))\,f'(a)$$

が成り立つ．　//

2.3 指数関数の微分

$y=e^x$



A. 指数関数の導関数

$\boxed{1}$ 指数関数の導関数　　$\left(e^x\right)'=e^x$.

$\boxed{\text{(F)}\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1}$　である (証明は **B.** で行う．) から,

$$\left(e^x\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x.$$

$\boxed{2}$ $a>0$ のとき，指数関数 a^x の導関数は合成関数の微分法から,

$$\left(a^x\right)'=\left(e^{x\log a}\right)'=a^x\log a.$$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\log a$ を示してから，上と同様の計算で導くこともできる：

$$\left(a^x\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\log a.$$

$\boxed{3}$ つぎの関数を微分せよ.

(1) e^{3x} (2) e^{-x^2} (3) $e^{\frac{x}{x+1}}$ (4) 2^x+3^x

B. (F)

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\left(\text{一般に } a>0 \text{ のとき } \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a \text{ が成り立つこと}\right)$ の説明

1.8 B. で $\boxed{\text{(E)}\quad \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1}$ が成り立つていることを注意した.

$z=a^x-1$ と置くと $\displaystyle\frac{a^x-1}{x}=\frac{z}{\log_a(1+z)}=\frac{z}{\frac{\log(1+z)}{\log a}}=\frac{\log a}{\frac{\log(1+z)}{z}}$ が成り立つ. 指数関数の連続性より $x\to 0$ のとき $z=a^x-1\to 0$ となるから，つぎのように計算できる：

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{\log a}{\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z}}=\log a\,. \qquad //$$

2.4 対数関数の微分

A. 対数関数の導関数

$\boxed{1}$ 対数関数の導関数 $\displaystyle\big(\log x\big)'=\frac{1}{x}$.

何故ならば **1.8 B.** で示したように $\boxed{\text{(E)}\quad \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1}$ であるから,

$$\begin{aligned}\big(\log x\big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\log\Big(1+\frac{h}{x}\Big)\\ &= \frac{1}{x}\cdot\lim_{t=\frac{h}{x}\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

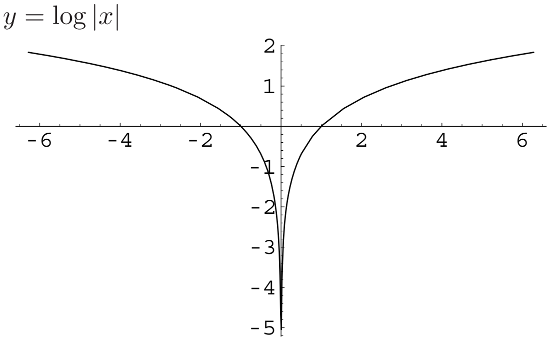
$\boxed{2}$ 関数 $\log|x|$ $(x\in\mathbb{R})$ の導関数は

$$\big(\log|x|\big)'=\frac{1}{x}.$$

$\boxed{3}$ $a\ (>0)$ を底とする対数関数の導関数は

$$\big(\log_a x\big)'=\Big(\frac{\log x}{\log a}\Big)'=\frac{1}{x\log a}.$$

$y=\log|x|$



$\boxed{4}$ 指数法則から 任意の実数 α に対して $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ $(x > 0)$ と考えられるから，

$$\left(x^\alpha\right)' = \left(e^{\alpha \log x}\right)' = \frac{\alpha}{x}\ e^{\alpha \log x} = \frac{\alpha}{x}\ x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}\ .$$

$\boxed{5}$ つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) $\log|\log x|$ (2) $x^{\sqrt{2}}$ (3) $e^x \log x$

(4) $\log \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ (5) $\log|x+\sqrt{x^2+a}|$

B. 対数微分法

関数 $y = f(x)$ の対数 $\log\bigl|f(x)\bigr|$ の導関数を考えると，次の公式が得られる：

$$f'(x) = f(x)\left(\log\bigl|f(x)\bigr|\right)'.$$

$\boxed{6}$ 対数微分法を使って微分せよ．

(1) $x^2(x+1)^3(x+2)^3$ (2) x^x (3) $(1+x)^x$ (4) $x^{\sqrt{x}}$

2.5 三角関数の微分

B. 三角関数の微分係数

1.8 関数の連続性 B. 基本事項 で述べた基本的等式を証明しよう．

(C)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad \text{の説明}$$

1.6 三角関数 B. $\boxed{5}$ **不等式** $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ より，

$1 < \dfrac{\theta}{\sin\theta} < \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ が成り立つ． $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ であるから， はさみうちの原理により $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{1}{\cos\theta} = 1$ が成り立つ． $\theta < 0$ の時，上式で θ を $-\varphi$ とおきかえて，

$$\lim_{\theta\to 0-}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\varphi\to 0+}\frac{\sin(-\varphi)}{-\varphi} = \lim_{\varphi\to 0+}\frac{-\sin\varphi}{-\varphi} = \lim_{\varphi\to 0+}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1.$$

以上より， $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ． //

$\boxed{1}$ 三角関数の導関数

(1) $\quad \bigl(\sin x\bigr)' = \cos x \qquad \because \quad \lim_{h\to 0}\dfrac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h} = \lim_{h\to 0}\cos\bigl(\theta+\dfrac{h}{2}\bigr)\dfrac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \cos\theta\ .$

(2) $\quad \bigl(\cos x\bigr)' = \sin x \qquad \because \quad \lim_{h\to 0}\dfrac{\cos(\theta+h)-\cos\theta}{h} = -\lim_{h\to 0}\sin\bigl(\theta+\dfrac{h}{2}\bigr)\dfrac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = -\sin\theta\ .$

$\boxed{2}$ $\bigl(\tan x\bigr)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を示せ.

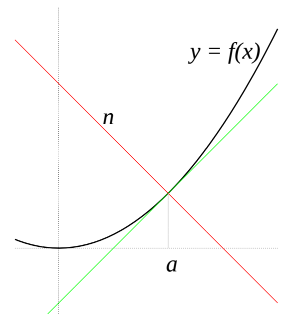
$\boxed{3}$ つぎの関数の導関数を求めよ.

(1) $\cos x^2$ (2) $\sec x\ \bigl(= \dfrac{1}{\cos x}\bigr)$ (3) $\sin^2 x$

(4) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$ (5) $\log|\cos x|$ (6) $e^{\sin x}$

さて，微分可能な関数 $f(x)$ について，ある $x=a$ で $f'(a)\neq 0$ のとき，接点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ を通り接線に直交する直線を曲線 $y=f(x)$ の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ での**法線**という： 法線 n の方程式は

$$n\ :\ y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)\,.$$



$\boxed{4}$ 曲線 $y=\tan x\ (0\leq x<\dfrac{\pi}{2})$ について，傾きが 2 である接線の方程式を求めよ，またこの曲線との接点および接点での法線を示せ.

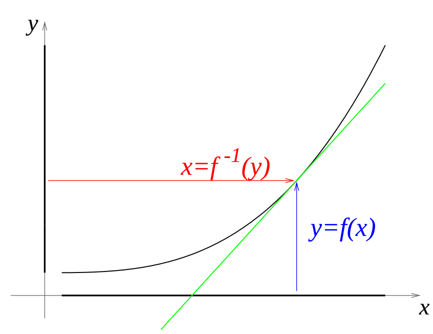
2.6 逆関数の微分

B. 逆関数の導関数

定理　逆関数の微分可能性

関数 $f(x)$ が開区間 $(a,\ b)$ 上で微分可能で $f'(x)>0$ (または $f'(x)<0$) とする．このとき，開区間 $(\alpha,\ \beta)$ 上で定義される（ $y=f(x)$ の逆関数 ） $x=f^{-1}(y)$ は微分可能で，$\bigl(f^{-1}\bigr)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \quad (a<x<b)$.

ここで $\alpha = \lim_{x\to a+0} f(x),\quad \beta = \lim_{x\to b-0} f(x)$.



$\boxed{\text{説明}}$ 開区間 $(a,\ b)$ 上で微分可能で $f'(x)>0$ である関数 $f(x)$ は $(a,\ b)$ 上で狭義単調増加である（**2.9　A 単調増加関数，単調減少関数**）．微分可能関数 $y=f(x)$ は連続であるから，狭義単調増加性から逆関数の存在がわかる（**1.7　A 逆関数**）．
関数 $y=f(x)$ が微分可能であるから，$y=f(x)$ のグラフは接線を持ち，その傾きは $f'(x)$ である．このことから，$x=f^{-1}(y)$ のグラフは接線を持つことがわかる． $f^{-1}(f(x))=x$ であるから，合成関数の微分法により $\left(f^{-1}\right)'(y)f'(x)=1$，すなわち $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ ．
見やすいように変数を x として逆関数を $y=f^{-1}(x)$ と表すときは ($x=f(y)$ で)

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}\ ,\quad \text{すなわち}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\,.$$

逆三角関数の導関数

$\boxed{1}$ (1)　$\left(\sin^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$

逆三角関数 $\sin^{-1}x\ (-1\leq x\leq 1)$ は単調増加関数 $f(x)=\sin x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である，すなわち，任意の $x\in[-1,\ 1]$ とある $y\in[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}]$ に対して $x=\sin y$ が成り立っているとき $y=\sin^{-1}x$ である．逆関数の導関数に関する定理から，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(-1<x<1).\end{aligned}$$

(2)　$\left(\cos^{-1}x\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$

逆三角関数 $\cos^{-1}x\ (-1\leq x\leq 1)$ は単調減少関数 $f(x)=\cos x\ (0\leq x\leq\pi)$ の逆関数である，すなわち，任意の $x\in[-1,\ 1]$ とある $y\in[0,\ \pi]$ に対して $x=\cos y$ が成り立っているとき $y=\cos^{-1}x$ である．逆関数の導関数に関する定理から，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\sin y}\\&=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(-1<x<1).\end{aligned}$$

(3)　$\left(\tan^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}\quad(-\infty<x<\infty)$

逆三角関数 $\tan^{-1}x\ (-\infty<x<\infty)$ は単調増加関数 $f(x)=\tan x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数である，すなわち，任意の $x\in(-\infty,\ \infty)$ とある $y\in(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2})$ に対して $x=\tan y$ が成り立っているとき $y=\tan^{-1}x$ である．逆関数の導関数に関する定理から，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

$\boxed{2}$ つぎの関数の導関数を求めよ.

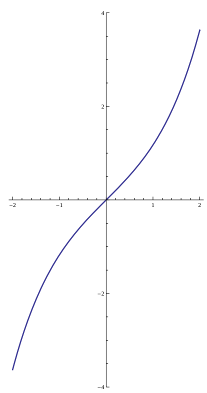
(1) $\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1} x$ (2) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ (3) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$ (4) $\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

C. 双曲線関数とその逆関数

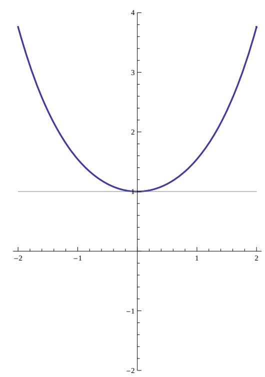
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad (\forall x \in \mathbf{R})$$

を双曲線正弦（hyperbolic sine）関数，双曲線余弦（hyperbolic cosine）関数，双曲線正接（hyperbolic tangent) 関数という.

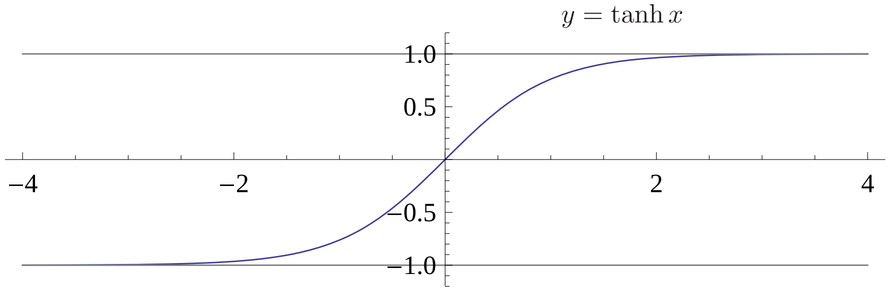
$y = \sinh x$



$y = \cosh x$



$y = \tanh x$



$\boxed{4}$ つぎの関係式を示せ.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(2) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

(3) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

(4) $(\cosh x)' = \sinh x, \qquad (\sinh x)' = \cosh x, \qquad (\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

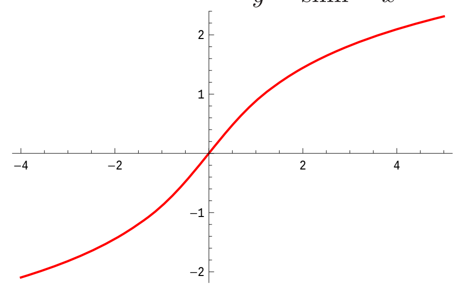
双曲線正弦関数の逆関数について考えよう． $\{\sinh x\}' = \cosh x > 0$ であるから，$\sinh x$ は $\mathbf{R}$ 上で単調増加である．また $\sinh x \ (= \dfrac{e^x - e^{-x}}{2})$ の値域は $\mathbf{R}$ である．$\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} x \quad (x \in \mathbf{R})$ と表す．すなわち，

$\forall x \in \mathbf{R}$ と $\exists y \in \mathbf{R}$ に対して

$$x = \sinh y$$

が成り立っているとき $y = \sinh^{-1} x$ と定義できる．

$y = \sinh^{-1} x$



$\boxed{5}$ 双曲線関数の逆関数関数 $\sinh^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ を定義し，つぎの関係式を示せ．

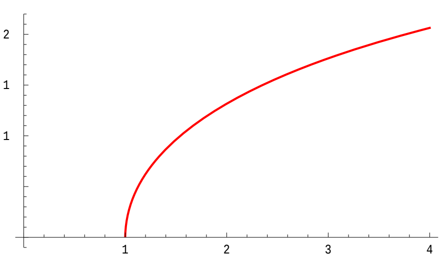
(1) $\sinh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr) \qquad (-\infty < x < \infty)$

HINT. $x, y \in \mathbf{R}$ に対する関係式 $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ を y について解く．

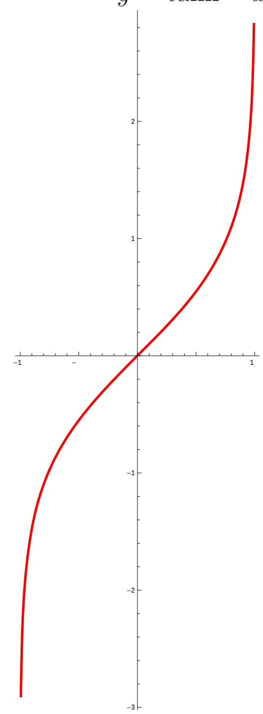
(2) $\cosh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr) \qquad (x \geq 1)$

(3) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+x}{1-x} \qquad (-1 < x < 1)$

$y = \cosh^{-1} x$



$y = \tanh^{-1} x$



$\boxed{6}$ 逆双曲線関数の導関数を示せ．

(1) $\bigl(\sinh^{-1} x\bigr)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (-\infty < x < \infty)$.

(2) $\bigl(\cosh^{-1} x\bigr)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x > 1)$.

(3) $\bigl(\tanh^{-1} x\bigr)' = \dfrac{1}{1-x^2} \qquad (-1 < x < 1)$.

$\boxed{7}$ 双曲線関数 $y = \sinh^{-1} x$ は $x \to \infty$ のとき $y = \log 2x$ を漸近曲線とすることを示せ．
(定義． 関数 $f(x)\ (x > c_0)$ と関数 $g(x)\ (x > c_1)$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Bigl\{ f(x) - g(x) \Bigr\} = 0$ が成り立つとき， 関数 $g(x)$ は関数 $f(x)$ の ∞ での漸近曲線といわれる．)

C. パラメータ表示された曲線の接線

$\boxed{\text{パラメータ表示された曲線の接線}}$

曲線 C が C^1 級関数 $\varphi(t),\ \psi(t)\ (a \le t \le b)$ によって

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad\qquad (a \le t \le b)$$

とパラメータ表示されているとき，

$\varphi'(t) \neq 0$ ならば 曲線 C の点 $(\varphi(t), \psi(t))$ での接線の傾きは $\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ で与えられる．

このことを考えるため 曲線 C の点 $\mathrm{P}_0 = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ を固定しよう．

点 P_0 の近くの点 $\mathrm{P}_t = (\varphi(t), \psi(t))$ をとり，点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_t$ を通る直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_t$ を考える：

$$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_t \quad : \quad y - \psi(t_0) = \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)}\,(x - \varphi(t_0))\ .$$

$\varphi'(t) \neq 0$ のとき，

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)} = \lim_{t \to t_0} \frac{\dfrac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0}}{\dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

が成り立つ．これは 点 P_t が点 P_0 に近づく $(t \to t_0)$ とき, 直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_t$ の傾きが $\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$ に近づくことを意味している．そして 点 P_t が点 P_0 に近づく $(t \to t_0)$ とき, 直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_t$ は直線

$$\mathrm{T}_0 : \quad y - \psi(t_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\,(x - \varphi(t_0))\ .$$

に近づくことになる．この直線を曲線 C の点 $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ での接線という．

実際，C^1 級関数 $f(x)\ \big(x \in D\big)$ に対しては，曲線 $y = f(x)$ はパラメータ表示された曲線

$$(t,\ f(t)) \in \mathbf{R}^2 \quad \big(t \in D\big)$$

と考えることもできる．この場合

パラメータ表示された曲線 $(t,\ f(t)) \in \mathbf{R}^2 \quad \big(t \in D\big)$ の接線

$$y - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1}\,(x - x_0)$$

は曲線 $y = f(x)$ の $x = x_0$ での接線

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

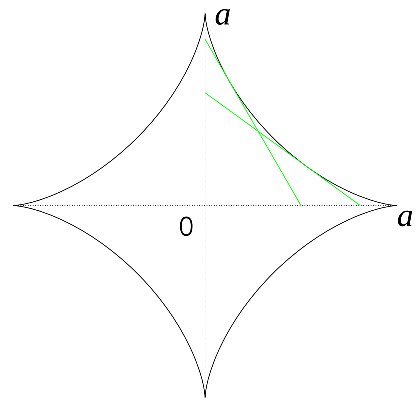
に一致しているから，曲線の接線の定義をパラメータ表示された曲線の範囲まで拡げられることがわかる．

$\boxed{8}$ パラメータ表示された曲線

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

を考える $(a > 0)$.

この曲線上の点 (x_0, y_0) での接線から x 軸および y 軸との交点によって切り取られる線分の長さは a であることを示せ．この曲線は星芒形 (Asteroid) と呼ばれる．



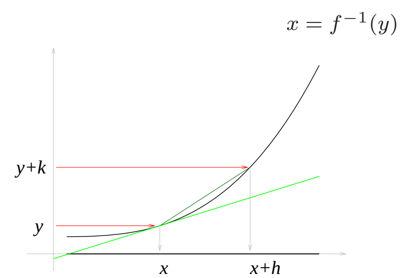
D．逆関数の微分可能性の証明

定理　逆関数の微分可能性

関数 $f(x)$ が開区間 $(a,\ b)$ 上で微分可能で $f'(x) > 0$ (または $f'(x) < 0$) とする．このとき，開区間 $(\alpha,\ \beta)$ 上で定義される（ $y = f(x)$ の逆関数 ） $x = f^{-1}(y)$ は微分可能で，

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (a < x < b).$$

ここで　$\alpha = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad \beta = \lim_{x \to b-0} f(x).$



証明　開区間 $(a,\ b)$ 上で微分可能で $f'(x) > 0$ である関数 $f(x)$ は $(a,\ b)$ 上で狭義単調増加である（**2.9　A 単調増加関数，単調減少関数**）．中間値の定理により，任意の $y \in (\alpha,\ \beta)$ に対して，$f(x) = y$ となる $x \in (a,\ b)$ があるが，関数 $f(x)$ は $(a,\ b)$ 上で強い意味で単調増加であるから，このような $x \in (a,\ b)$ は唯一つである．このとき $x = f^{-1}(y)$ である（**1.7　A 逆関数**）．関数 $f(x)$ の連続性から，逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の連続性が証明される．（**1.10 連続関数の性質　D.**）

逆関数 $x = f^{-1}(y)$ を $x = g(y)$ と表すとき，　$g(y) = x, \quad g(y+k) = x + h$　とすると，

$$f(x) = y, \quad f(x+h) = y + k, \quad h \to 0 \ \ (k \to 0)$$ 　が成り立つから，

$$g'(y) = \lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

(**2.2 A.** $\boxed{\textbf{命題}\ \sqrt[n]{x}\ \textbf{の導関数}}$ の証明は具体的計算例である．)

2.7 高階導関数

A. 高階導関数

変数 x に微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を $f'(x)$ または $\dfrac{df(x)}{dx}$ と表し，$f(x)$ の（1 階）導関数という．

導関数 $f'(x)$ の導関数 $\{f'(x)\}'$ を $f''(x)$，$f^{(2)}(x)$ または $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ と表し，（$f(x)$ の）2 階導関数という．

帰納的に，

$n-1$ 階導関数 $f^{(n-1)}(x)$ の導関数 $\{f^{(n-1)}(x)\}'$ を $f^{(n)}(x)$，または $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ と表し，（$f(x)$ の）n 階導関数という．

B. 基本事項

$\boxed{1}$ 　三角関数の n 階導関数の公式を数学的帰納法で示せ．

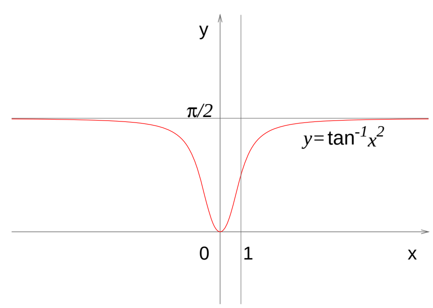
(1) $\big(\sin x\big)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$ 　　(2) $\big(\cos x\big)^{(n)} = \cos(x + \dfrac{n\pi}{2})$

$\boxed{2}$ 次の関数の n 階導関数を求めよ．

(1) x^α 　$(\alpha \notin \mathbf{N})$ 　　(2) e^{2x} 　　(3) $\log x$

$\boxed{3}$ 次の関数 y の導関数 y'，y'' を求めよ．

(1) $y = \dfrac{1}{(1-x^2)^\alpha}$ 　$(\alpha \in \mathbf{R})$ 　　(2) $y = \tan^{-1}\, x^2$



C. 巧妙な計算

ライプニッツの定理 　関数 $f(x)$，$g(x)$ が n 回微分可能とする．このとき

$$\big\{f(x)g(x)\big\}^{(n)} = {}_n\mathrm{C}_0 f^{(n)}(x)g^{(0)}(x) \ + \ {}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}(x)g^{(1)}(x) \ + \ \cdots \ + \ {}_n\mathrm{C}_n f^{(0)}(x)g^{(n)}(x)$$

が成り立つ．

証明 　数学的帰納法で証明する．

$n=1$ のとき，関数の積に関する微分法から，定理の主張が成り立つ：

$$\{f(x)g(x)\}^{(1)} = f^{(1)}g(x) \ + \ f(x)g^{(1)}(x).$$

$n=k$ のとき，定理の主張が成立すると仮定すると，

$$\left\{f(x)g(x)\right\}^{(k)} \;=\; {}_k\mathrm{C}_0 f^{(k)}(x)g(x) \;+\; {}_k\mathrm{C}_1 f^{(k-1)}(x)g^{(1)}(x) \;+\; \cdots \;+\; {}_k\mathrm{C}_k f(x)g^{(k)}(x)$$

この両辺を微分すると， ${}_n\mathrm{C}_{m-1} \;+\; {}_n\mathrm{C}_m \;=\; {}_{n+1}\mathrm{C}_m$ であるから，

$$\begin{aligned}\left\{f(x)g(x)\right\}^{(k+1)} \;&=\; {}_k\mathrm{C}_0\left\{f^{(k+1)}(x)g(x)+f^{(k)}(x)g^{(1)}(x)\right\} \;+\; {}_k\mathrm{C}_1\left\{f^{(k)}(x)g^{(1)}(x) \;+\; f^{(k-1)}(x)g^{(2)}\right\}\\ &\qquad +\;\cdots\;+\;{}_k\mathrm{C}_k\left\{f^{(1)}(x)g^{(k)}(x)+f(x)g^{(k+1)}(x)\right\}\\ &=\; {}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g(x) \;+\; {}_{k+1}\mathrm{C}_1 f^{(k)}(x)g^{(1)}(x) \;+\; \cdots \;+\; {}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} f(x)g^{(k+1)}(x).\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときにも定理の主張が成立することがわかり，数学的帰納法の原理から，全ての自然数 n について定理の主張が成り立つことがわかる． //

$\boxed{4}$ 次の関数の n 階導関数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ (2) $e^x\sin x$ (3) $x^2\log x$

D. 技法 Technics

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $f(x)=\tan^{-1}x$ の n 階導関数の値 $f^n(0)$ を求めよう．

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

であるから，$y(x)=f'(x)$ と置くと，

$$(1+x^2)y(x)=1$$

が成り立っている．ライプニッツの定理を使って，両辺を n 回微分すると，

$${}_n\mathrm{C}_0(1+x^2)^{(0)}y^{(n)}(x)+{}_n\mathrm{C}_1(1+x^2)^{(1)}y^{(n-1)}(x)+{}_n\mathrm{C}_2(1+x^2)^{(2)}y^{(n-2)}(x)=0.$$

$y(x)=f'(x)$ であるから，

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0.$$

上の式で $x=0$ を代入して，

$$f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0,$$

すなわち，漸化式

$$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0)$$

が得られる． $f(0)=\tan^{-1}0=0,\ f'(0)=1$ であるから，

$$\begin{cases} f^{(2n)}(0)=0\\ f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)! \end{cases}$$

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$ の n 階導関数の値 $f^n(0)$ を求めよ．

2.8 平均値の定理

A. 平均値の定理

ロールの定理 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能とする．$f(a)=f(b)$ が成り立つとき，

$$f'(c)=0 \quad (a<c<b)$$

となる c がある．

平均値の定理 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能とする．

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a}=f'(c) \quad (a<c<b)$$

となる c がある．この $c\in(a,\ b)$ は $c=a+\theta(b-a)$ $(0<\exists\theta<1)$ のように表される．

例 $\sqrt{4.06}$ の近似値を探すために，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ $(x>0)$ を考えよう．

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから，平均値定理により

$$|\sqrt{x}-2|=\frac{|x-4|}{2\sqrt{4+\theta(x-4)}} \quad (0<\exists\theta<1)$$

が成り立つ．$2<\sqrt{4+\theta(4.06-4)}$ であるから

$$|\sqrt{4.06}-2|=\frac{0.06}{2\sqrt{4+0.06\,\theta}}<\frac{0.06}{4}=0.015 \quad (0<\exists\theta<1)$$

となる．故に $\sqrt{4.06}<2+0.015=2.015$ で

$$|\sqrt{4.06}-2|=\frac{0.06}{2\sqrt{4+0.06\,\theta}}>\frac{0.06}{2\sqrt{4.06}}>\frac{0.06}{4.03}=0.0148$$

となる．こうして $2.014<\sqrt{4.06}<2.015$ であることがわかる．

$\boxed{1}$ $\sqrt[3]{8}=2$ を使って $\sqrt[3]{8.20}$ の近似値を求めよ．

コーシーの平均値の定理

関数 $f(x),\ g(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能とする．開区間 $(a,\ b)$ で $g'(x)\neq 0$ が成り立つとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad a<c<b$$

となる c がある．

D. ロールの定理 および 平均値の定理の証明

ロールの定理の証明 **1.10 最大値・最小値定理** により，閉区間 $[a,\ b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ は必ず最大値と最小値をとる．関数 $f(x)$ が定数関数の場合には，定理は自明であるから，関数 $f(x)$ が定数関数でない場合を考える．このとき，関数 $f(x)$ の最大値と最小値を

$$f(\xi) = \max_{a \le x \le b} f(x) \qquad (a \le \exists \xi \le b), \qquad\qquad f(\eta) = \max_{a \le x \le b} f(x) \qquad (a \le \exists \eta \le b)$$

とすると，$f(a) = f(b)$ であるから，

$$a < \xi < b \qquad \text{または} \qquad a < \eta < b$$

が成り立つ．今， $a < \xi < b$ の場合 $c = \xi$ に対して

$$0 \le \lim_{h \to +0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = f'(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \le 0\ .$$

こうして $f'(c) = 0$ を得る． $a < \eta < b$ の場合，同様にして $f'(c) = 0 \quad (c = \eta)$ を得る． //

平均値の定理の証明 閉区間 $[a,\ b]$ で定義された連続関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

を考える． $F(x)$ は $[a,\ b]$ で連続で $(a,\ b)$ で微分可能，さらに $F(a) = F(b) = 0$ が成り立つから**ロールの定理** により， $F'(c) = 0 \quad (a < \exists c < b)$ ． さて， $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ であるから， $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ ， すなわち $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ． //

コーシーの平均値の定理の証明 閉区間 $[a,\ b]$ で定義された連続関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left(g(x) - g(a)\right)$$

を考える． $F(x)$ は $[a,\ b]$ で連続で $(a,\ b)$ で微分可能，さらに $F(a) = F(b) = 0$ が成り立つから **ロールの定理** により，$F'(c) = 0 \quad (a < \exists c < b)$ ． さて，$F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$ であるから， $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$ ， すなわち $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ ． //

2.9 関数の増減

A. 単調増加関数，単調減少関数

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ は単調増加関数である (**1.1 † 実数の計算についての注意**).

この関数 $f(x) = \sqrt{x}$ の微分係数を計算してみれば， $x > 0$ のとき正であることがわかる：

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 .$$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ は単調減少関数であり， $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ である.

B. 基本事項

$\boxed{\text{定理 1}}$ 微分可能な関数 $f(x)$ が開区間 (a, b) で $f'(x) = 0$ を満たすならば，関数 $f(x)$ は定数関数である.

$\boxed{\text{証明}}$ どの二点 $a < x < x' < b$ に対しても，平均値定理により

$$f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x) = 0 \ (x < \exists c < x').$$

故に，どの二点 $a < x < x' < b$ に対しても，$f(x') = f(x)$ が成り立つからである.

$\boxed{\text{定理 2}}$ 微分可能な関数 $f(x)$ を考える.

(1) $f'(x) > 0$ ならば，関数 $f(x)$ は狭義単調増加関数である.

(2) $f'(x) < 0$ ならば，関数 $f(x)$ は狭義単調減少関数である.

$\boxed{\text{証明}}$ どの二点 $a < x < x' < b$ に対しても，平均値定理により

$$f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x) = 0 \ (x < \exists c < x')$$

が成り立つからである.

$\boxed{\text{定理 3}}$ 関数 $f(x)$ $(a < x < b)$ は微分可能とする. $f(x)$ が単調増加 (減少) 関数であれば $f'(x) \geq 0$ $(a < x < b)$ $\big(\ f'(x) \leq 0\ (a < x < b)\ \big)$. 逆も成り立つ.

$\boxed{\text{証明}}$ $f(x)$ が単調増加関数とすると，$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$

逆に $f'(x) \geq 0$ とする. $x_2 > x_1$ とすると，平均値の定理により，

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0 \quad (x_1 < \exists c < x_2).$$

これは， $f(x)$ が単調増加であることを示している.

極大値，極小値，最大値，最小値

さて，区間 I で定義された関数 $f(x)$ の最大値 とは，すべての $x \in I$ で $f(x) \leq f(c)\ (\exists c \in I)$ となる関数値 $f(c)$ のことである．
また，区間 I で定義された関数 $f(x)$ の最小値 とは，すべての $x \in I$ で $f(x) \geq f(c)\ (\exists c \in I)$ となる関数値 $f(c)$ のことである．

関数の値が変数の変化によってどう変化するかを調べるために，関数の最大値や最小値とは異なる極大値や極小値の考え方について述べて置こう．

定義．
区間 I で定義された関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極大値を取る (極大となる) とは
ある正の数 δ が在って

$$x_0 - \delta < x(\in I) < x_0 + \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x_0) \geq f(x)$$

が成り立つことである．

区間 I で定義された関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極小値を取る (極小となる) とは
ある正の数 δ が在って

$$x_0 - \delta < x(\in I) < x_0 + \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x_0) \leq f(x)$$

が成り立つことである．

開区間 I で定義された関数 $f(x)$ の最大値は極大値でありまた $f(x)$ の最小値は極小値であるが，一般には，最大 (小) 値は極大 (小) 値とは限らない．

区間 I で定義された関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極大値や極小値を取るとき，関数 $f(x)$ は $x = x_0$ で極値を取るといわれる．

$\boxed{\text{定理 4}}$ 微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で極値をとれば， $f'(c) = 0$.

$\boxed{\text{証明}}$ $f(c)$ が極小値の場合には，

$$0 \leq \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0\ .$$

が成り立つからである． $f(c)$ が極大値の場合も同様である． //

$\boxed{\text{定理 5}}$ 微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で $f'(a) = 0$ を満たすとき，

(1) 関数 $f'(x) > 0\ (x < a)$, $f'(x) < 0\ (x > a)$ ならば $f(a)$ は極大値である．
(2) 関数 $f'(x) < 0\ (x < a)$, $f'(x) > 0\ (x > a)$ ならば $f(a)$ は極小値である．

定理 5 から，つぎの定理が従う．

$\boxed{\text{定理 6}}$　関数 $f(x)$ が C^2 級で $x = a$ で $f'(a) = 0$ を満たすとき,

(1)　関数 $f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値である.

(2)　関数 $f''(x) > 0$ ならば $f(a)$ は極小値である.

$\boxed{3}$　つぎの不等式を示せ.

(1)　$x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x \quad (x \geq 0)$

(2)　$1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \quad (-\infty < x < \infty)$

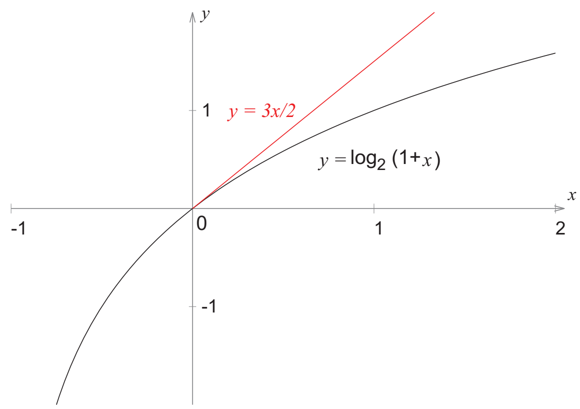
(3)　$x - \dfrac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x \quad (x \geq 0)$

(4)　$x - \dfrac{x^3}{3} \leq \tan^{-1} x \leq x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \quad (x \geq 0)$

(5)　$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2} \quad (x \geq 0)$

$\boxed{4}$　$3\log 2 = 3 \times 0.693\cdots = 2.079\cdots > 2$
(**3.16 応用　C．巧妙な計算**) に注意して,
つぎの不等式を示せ.

$$f(x) = \log_2(1+x) < \frac{3x}{2} \quad (x > 0) \ .$$



$\boxed{5}$　$\boxed{\text{定理 1}}$ を使ってつぎのことを示せ.

(1)　$\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} \qquad (-1 \leq x \leq 1)$

(2)　$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \qquad (x > 0)$

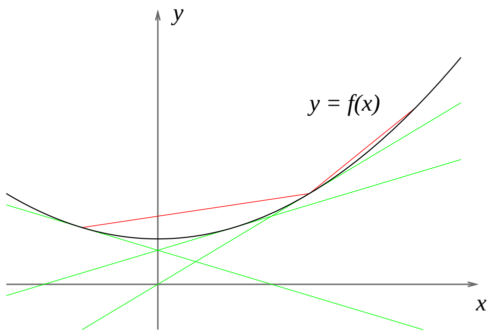
$\boxed{6}$　関数 $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ は微分可能で $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f'(x)| < \infty$ とする．このとき，つぎのことが成り立つ：

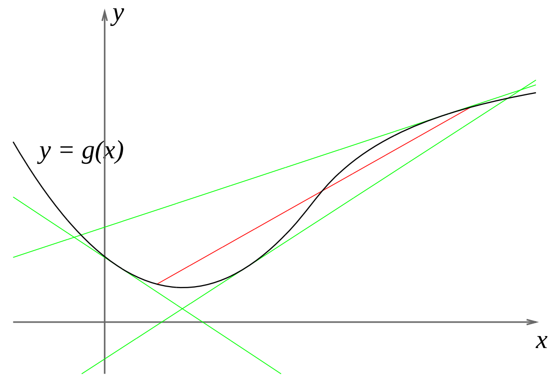
$$\bigl|f(x') - f(x)\bigr| \leq M\bigl|x' - x\bigr| \qquad (a \leq \forall x,\, x' \leq b).$$

2.10　関数の凸凹

凸性と凹性

凸





ある微分可能な関数 $f(x)$ および $g(x)$ のグラフが，$y=f(x)$ のグラフは左上図で $y=g(x)$ のグラフが右上図のようである場合，どんな差異を見出すことができるだろうか．つぎの事に気がつく：

$(\star)$　　　$y=f(x)$ のグラフ上の任意の二点を結ぶ線分はグラフの上方にある．

しかし $y=g(x)$ のグラフではそのようなことは必ずしも成り立っていない．

$y=f(x)$ のグラフについては，つぎの事にも気がつく：

$(\star\star)$　　　$y=f(x)$ のグラフの接線の傾き $f'(x)$ が x の増加に伴って増加している．

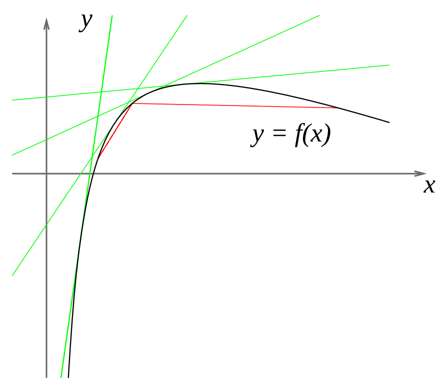
しかし $y=g(x)$ のグラフではそのようなことは必ずしも成り立っていない．

曲線 $y=f(x)$ のグラフのこのような特徴 $(\star)$ と $(\star\star)$ は関係があるのであって，関数 $y=f(x)$ が微分可能な場合，特徴 $(\star)$ が成り立つためには，特徴 $(\star\star)$ が成り立つ事が必要十分条件なのである(定理．凸の判定)．

そこで，一般に，連続関数 $y=f(x)$ が特徴 $(\star)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は凸であるという．

A．微分可能な関数の凸性と凹性

凹



定義．微分可能な関数 $y=f(x)$ に対して，曲線 $y=f(x)$ の接線の傾き $f'(x)$ が x の増加に伴って増加するとき，この曲線は下に凸であるといい，関数 $f(x)$ は下に凸であるという．また接線の傾き $f'(x)$ が x の増加に伴って減少するとき，この曲線は下に凹 (上に凸) であるといい，関数 $f(x)$ は下に凹 (上に凸) であるという．明らかに，$-f(x)$ が下に凸であるとき，$f(x)$ は下に凹である．

定理．凸凹の判定　関数 $f(x)$ が区間 I で二回微分可能とする．

$f''(x) \geq 0$ であることは，関数 $f(x)$ が凸関数であるための必要十分条件である．

$f''(x) \leq 0$ であることは，関数 $f(x)$ が凹関数であるための必要十分条件である．

$\boxed{\text{変曲点}}$ 関数 $f(x)$ が区間 I で二回微分可能とする．

関数 $f(x)$ のグラフが凸から凹に変る点または凹から凸に変る点を関数 $f(x)$ のグラフの変曲点という (定義する)．例えば，

$$f''(x) < 0 \ (x < x_0), \quad f''(x) > 0 \ (x > x_0) \quad \text{かつ} \quad f''(x) = 0$$

ならば，点 $(x_0,\ f(x_0))$ は関数 $f(x)$ のグラフの変曲点である．また

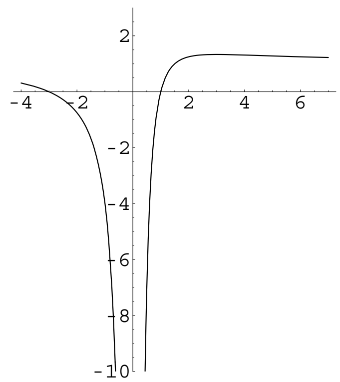
$$f''(x) > 0 \ (x < x_0), \quad f''(x) < 0 \ (x > x_0) \quad \text{かつ} \quad f''(x) = 0$$

ならば，点 $(x_0,\ f(x_0))$ は関数 $f(x)$ のグラフの変曲点である．

B. 基本事項

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x^2}$ の増減，極値，グラフの凸凹 および 変曲点を調べ，そのグラフの概形を書け．

関数 $\dfrac{(x-1)(x+3)}{x^2}$ $(-4 \leq x \leq 7)$.



$f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2} = 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$.

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{6}{x^3}$ ，そして $f''(x) = \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{18}{x^4}$.

$f(x) = 0$ となるのは，$x = -3,\ 1$ の場合に限る．

$f'(x) = 0$ となるのは，$x = 3$ の場合に限る．

$f''(x) = 0$ となるのは，$x = \dfrac{9}{2}$ の場合に限る．

増減表

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	$\frac{9}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	-		$+$	0	-	-	-
$f''(x)$	-		-		-	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\frac{35}{27}$	$\searrow$

この増減表から, 関数 $f(x)$ の極大値は $\dfrac{4}{3}$ であり， $\dfrac{9}{2}$ は変曲点であることがわかる．また $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ であるから，直線 $y = 1$ は漸近線である．

$\boxed{\text{補題}}$ 関数 $f(x)$ が区間 I で下に凸 (または，下に凹) とする． そのとき，

$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ $(0 < t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n < 1,\ \ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \in I)$ ならば，

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) \ \geq\ f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n)$$

(下に凹の時， $t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) \ \leq\ f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n)$)

が成り立つ．

$\boxed{\text{証明}}$ 関数 $f(x)$ が区間 I で下に凸の場合に，数学的帰納法で証明する． $n = 1$ のときは自明である． $n = 2, 3, \cdots, k$ のときに補題が成り立っていると仮定すると， $n = k + 1$ のときも

補題が成り立つことが次の計算からわかる：

$t_1+t_2+\cdots+t_k+t_{k+1}=1\ \ (0<t_1,\,t_2,\,\cdots,\,t_{k+1}<1)$　に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} t_i f(x_i) &= \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i)+t_{k+1}f(x_{k+1})\\
&= \bigl(t_1+t_2+\cdots+t_k\bigr)\sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{t_1+t_2+\cdots+t_k}f(x_i)+t_{k+1}f(x_{k+1})\\
&= \bigl(1-t_{k+1}\bigr)\sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{1-t_{k+1}}f(x_i)+t_{k+1}f(x_{k+1})\\
&\geq \bigl(1-t_{k+1}\bigr)f\Bigl(\sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{1-t_{k+1}}x_i\Bigr)+t_{k+1}f(x_{k+1}) \qquad \because\quad \sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{1-t_{k+1}}=1\\
&\geq f\Bigl(\bigl(1-t_{k+1}\bigr)\sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{1-t_{k+1}}x_i+t_{k+1}x_{k+1}\Bigr)=f\Bigl(\sum_{i=1}^{k+1}t_ix_i\Bigr).
\end{aligned}$$

数学的帰納法の原理により，すべての番号 $n\geq 1$ に対して，補題が成り立つ．　//

$\boxed{2}$　$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n>0$ に対し，つぎの不等式を導け．

(1) $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.　　(2) $\Bigl(x_1+x_2+\cdots+x_n\Bigr)\Bigl(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\Bigr)\geq n^2.$

C. （必ずしも微分可能ではない関数に対する）凸性と凹性

凸関数の定義　区間 I で定義された関数 $f(x)$ が凸であるとは，$y=f(x)$ のグラフ上の任意の二点を結ぶ線分はグラフの上方にあることである．関数 $f(x)$ が凸であるとき，区間 I に含まれる $a,\ b$ に対して，点 $(a,f(a))$ と $(b,f(b))$ を結ぶ線分

$$\Bigl\{\ (ta+(1-t)b,\ tf(a)+(1-t)f(b))\ \Big|\ 0\leq t\leq 1\ \Bigr\}$$

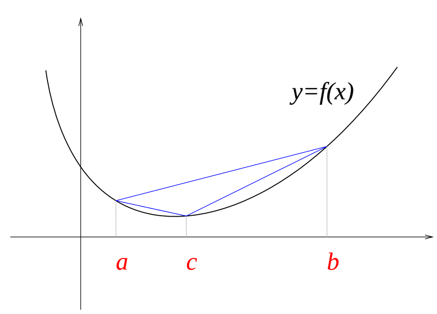
は $y=f(x)$ のグラフの上方にあるので

$$(\star\star\star)\qquad f(ta+(1-t)b)\ \leq\ tf(a)+(1-t)f(b)\qquad ({}^{\forall}a,\ b\in I,\ 0\leq{}^{\forall}t\leq 1)$$

が成り立つ．逆も明らかなので，凸関数とは条件 $(\star\star\star)$ を満たす関数 $f(x)$ のことである．

凸関数のグラフの幾何的特徴は，つぎのようにも捉えられる：

任意の $c\in[a,b]$ は $c=ta+(1-t)b\ (0\leq t\leq 1)$ と表される．このとき $c-a=(1-t)(b-a)$ と表されるから



$$f(c)-f(a)\leq tf(a)+(1-t)f(b)-f(a)=(1-t)(f(b)-f(a)).$$

$$\therefore\qquad \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

が成り立つ．さらに $b-c=t(b-a)$ より

$$f(b)-f(c)\geq f(b)-(tf(a)+(1-t)f(b))=t(f(b)-f(a)).$$

$\therefore \qquad \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c} \geq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$．こうして，　$a<c<b\ (a,b,c \in I)$　のとき

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

が成り立っていることがわかる．

区間 I で定義された関数 $f(x)$ が凸関数で微分可能あれば，区間 I に含まれる $a<b$ に対して

$$f'(a) = \lim_{c \to a+0} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \lim_{c \to b-0} \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(b) \qquad (a<c<b).$$

が成り立つ，すなわち $f'(x)$ は単調増加である．実は，微分可能な関数については，関数の凸性の二つの条件は同値である．そのことを述べているのがつぎの定理である．

定理．凸の判定　関数 $f(x)$ は区間 I で微分可能とする．

$f'(x)$ が単調増加であることは，関数 $f(x)$ が凸関数であるための必要十分条件である．

証明　必要性は上に示したので，十分性を示すために $f'(x)$ が単調増加であるとする．

$a<c<b \in I$ とすると，平均値の定理により

$$\begin{aligned} \frac{f(c)-f(a)}{c-a} &= f'(\xi) \qquad (a < \exists\xi < c) \\ \frac{f(b)-f(c)}{b-c} &= f'(\eta) \qquad (c < \exists\eta < b) \end{aligned}$$

が成り立つので，$\xi < \eta$ より $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ となるから

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \qquad \text{すなわち} \qquad f(c)(b-a) \leq f(a)(b-c) + f(b)(c-a)$$

が成り立つ．これから $c = ta + (1-t)b \quad (0 \leq t \leq 1)$ に対して

$$f(c) \leq \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) = tf(a) + (1-t)f(b)$$

が成り立つことがわかる．　　//

凹関数の定義　区間 I で定義された関数 $f(x)$ に対して

$$tf(a) + (1-t)f(b) \ \geq\ f(ta+(1-t)b) \qquad (\ \forall a,\ b \in I,\ 0 \leq {}^{\forall}t \leq 1)$$

が成り立つとき，関数 $f(x)$ は凹関数であるといわれ，曲線 $y=f(x)$ は区間 I で下に凹 (上に凸) であるといわれる．関数 $f(x)$ が凹関数であるのは $-f(x)$ が凸関数であることである．

定理. 凸の判定 の証明と同様にして，つぎの定理が証明される．

定理．凹の判定　関数 $f(x)$ は区間 I で微分可能とする．

$f'(x)$ が単調減少であることは，関数 $f(x)$ が凹関数であるための必要十分条件である．

$\boxed{3}$ $a > 0,\ k > 0,\ m \neq 1$ を定数とする．

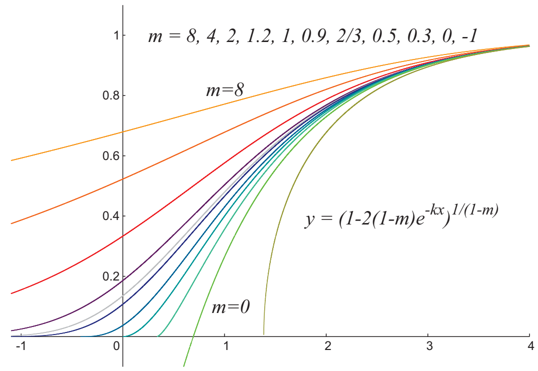
(1) 関数 $f_m(x) = \left(1-(1-m)a\,e^{-kx}\right)^{\frac{1}{1-m}}$

の定義域を示し，この関数の変曲点 $(x_m,\ y_m)$

を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to 1} y_m$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{m\to 1} f_m(x)$ を求めよ．



2.11 ロピタルの定理

C. ロピタルの定理

定理　$\dfrac{0}{0}$ 型の不定形　関数 $f(x),\ g(x)$ が開区間 $(a,\ b)$ で微分可能で

$\displaystyle\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ とする．さらに， $g'(x) \neq 0\ (a < x < b)$ とする．このとき，

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在すれば，}\quad \lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\boxed{\text{証明}}$ $f(a) = g(a) = 0$ と定義すると， 関数 $f(x),\ g(x)$ は半開区間 $[a,\ b)$ で連続で開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるから，コーシーの平均値の定理により

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{c\to a+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad //$$

定理　$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形　関数 $f(x),\ g(x)$ が開区間 $(a,\ b)$ で微分可能で

$\displaystyle\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \infty$ とする．さらに， $g'(x) \neq 0\ (a < x < b)$ とする．このとき，

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在すれば，}\quad \lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\boxed{\text{証明}}$ $a < x < b' < b$ である b' をとると，コーシーの平均値の定理により

$$\frac{f(x)-f(b')}{g(x)-g(b')} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (x < \exists c < b').$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a+}\frac{f(x)(1-\dfrac{f(b')}{f(x)})}{g(x)(1-\dfrac{g(b')}{g(x)})} = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(b')}{g(x)-g(b')} = \lim_{b'\to a+}\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(b')}{g(x)-g(b')} \\
&= \lim_{b'\to a+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad //
\end{aligned}$$

ロピタルの定理は，$f(x),\ g(x) \to 0$ のときも $f(x),\ g(x) \to \infty$ のときにも成り立つ．さらに左から近づく $x \to b-0$ の場合または 発散 $x \to \pm\infty$ の場合でも同じような形式で成り立つ．

定理　∞ で $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形　関数 $f(x),\ g(x)$ が開区間 $(a,\ \infty)$ で微分可能で $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ とする．さらに，$g'(x) \neq 0$ $(a < x < \infty)$ とする．このとき，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在すれば，}\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

証明　$\varphi(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right),\ \psi(t) = g\left(\dfrac{1}{t}\right)\ \left(0 < t < \dfrac{1}{a}\right)$ と定義すると，関数 $\varphi(t),\ \psi(t)$ は開区間 $\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ で微分可能で $\displaystyle\lim_{t\to0+} \varphi(t) = \lim_{t\to0+} \psi(t) = 0$ であるから，前に述べたロピタルの定理から

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad //$$

基本例　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ $(n \in \mathbf{N})$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

解答　(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形である．ロピタルの定理を繰り返し用いて，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

(2) $0 \times \infty$ の形の不定形である．$x\log x = \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}}$ と変形すると，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形の不定形となる．そこで，ロピタルの定理を用いて，

$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (-x) = 0.$$

(3) ∞^0 の形の不定形である．$y = x^{\frac{1}{x}}$ とおいて両辺の対数をとると，$\log y = \dfrac{\log x}{x}$.

ここでロピタルの定理を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log y = 0.$　　$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\log y} = e^0 = 1.$

1　次の極限値を求めよ．

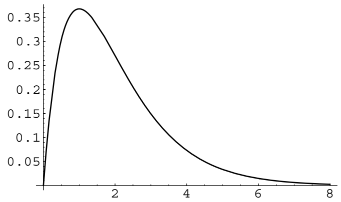
(1) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - \cos x}{x}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{3^x + 7^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(3^x + 7^x\right)^{\frac{1}{x}}$

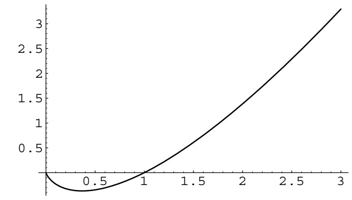
(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x}$　　(8) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$　　(9) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin^{-1} x - x}{x^3}$

参考.

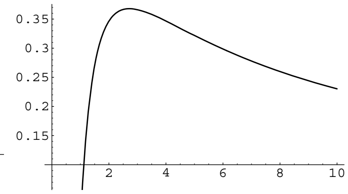
$$y = \frac{x}{e^x}$$



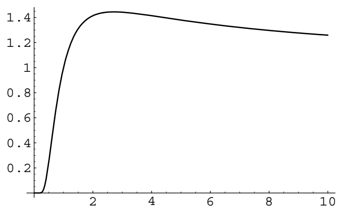
$$y = x \log x$$



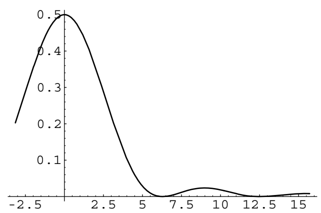
$$y = \frac{\log x}{x}$$



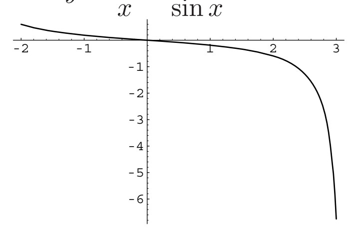
$$y = x^{\frac{1}{x}}$$



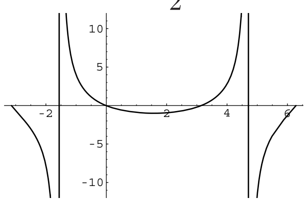
$$y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$



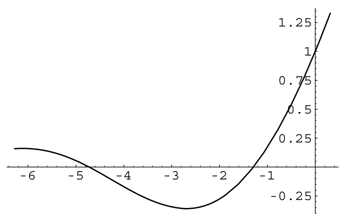
$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$



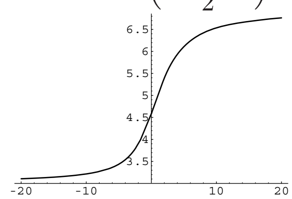
$$y = (x - \frac{\pi}{2}) \tan x$$



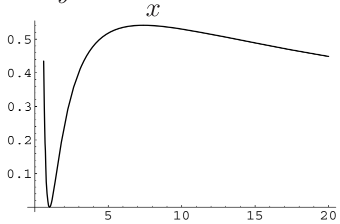
$$y = \frac{e^x - \cos x}{x}$$



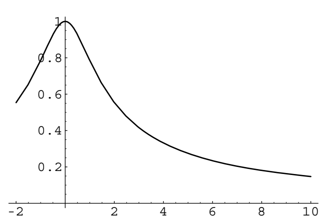
$$y = \left(\frac{3^x + 7^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$



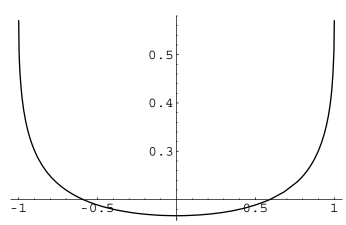
$$y = \frac{(\log x)^2}{x}$$

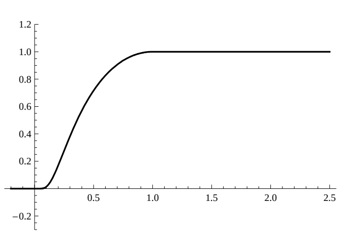


$$y = \frac{\tan^{-1} x}{x}$$



$$y = \frac{\sin^{-1} x - x}{x^3}$$





$$y = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ e^{1 - \frac{1}{1-(1-x)^2}} & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

2.12　テイラーの定理

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で n 回微分可能で，その各 k 階導関数 $f^{(k)}(x)$ $(0 \le k \le n)$ が $[a,b]$ で連続であるとき，関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で C^n 級であると言う．また，関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で何回でも微分可能であるとき，関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で C^∞ 級であると言う：この場合，微分可能関数の連続性により，すべての n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ は $[a,b]$ で連続である．

B. テイラー (Taylor) 展開 とマクローリン (Maclaurin) 展開

$\boxed{\text{テイラーの定理}}$　$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で C^{n-1} 級，開区間 (a,b) で n 回微分可能とする．このとき，

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + R_n = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n \\ R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n}{n!} \qquad (0<\exists\theta<1) \qquad \text{剰余項} \end{cases}$$

が成り立つ．$T_{n-1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$ を $f(x)$ の $x=a$ での $n-1$ 次 Taylor 多項式という．$f(x)$ と $T_{n-1}(x)$ の差の表現 R_n はラグランジェ(Lagrange) の剰余項と呼ばれている．

$^{(*)}$ 一般に，a $(\in \mathbb{R})$ を含むある開区間で定義された関数 $F(x)$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to a}\left|\frac{F(x)}{(x-a)^n}\right| \le M$ が成り立つとき $F(x) = O\big(|x-a|^n\big)$ と表わす；ランダウ (Landau) の記号 O ラージオー である．
特に，$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で C^n 級であれば，$[a,b]$ 上の連続関数 $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}$ の最大絶対値
$M = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n)}(x)\right| < \infty$ に対して，(各 $x \in [a,b]$ ごとに，ある $\theta \in (0,1)$ が存在して)

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k\right| = \left|\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n}{n!}\right| \le M|x-a|^n$$

が成り立つので，$f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k = O\big(|x-a|^n\big)$ と表される．

$^{(**)}$ 一般に，a $(\in \mathbb{R})$ を含むある開区間で定義された関数 $F(x)$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{(x-a)^n} = 0$ が成り立つとき $F(x)$ は $(x-a)^n$ より ($x=a$ で) 高位の無限小であるといい，$F(x) = o\big(|x-a|^n\big)$ と表わす；Landau の記号 o スモールオー である．
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で C^n 級の場合には，$\boxed{\text{テイラーの定理}}$ と $f^{(n)}(x)$ の連続性から

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k\right| \cdot \frac{1}{(x-a)^n} = \left|\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a)) - f^n(a)}{n!}\right| \longrightarrow 0 \quad (x \to a)$$

が成り立つことがわかるので，$f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k = o\big(|x-a|^n\big)$ が成り立つ．実は，つぎの定理が成り立っている．

$\boxed{\text{定理}}$　$f(x)$ は a $(\in \mathbb{R})$ を含むある開区間で n 回微分可能とする．このとき，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + o\big(|x-a|^n\big)\ , \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} R(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k \\ \displaystyle\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．

$a=0$ を含む開区間 $(-b, b)$ で n 階微分可能な関数 $f(x)$ に $\boxed{\text{テイラーの定理}}$ を適用して：

$\boxed{\text{マクローリンの定理}}$　$f(x)$ を 0 を含む開区間で n 階微分可能とする．このとき，

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(0)}{k!}x^k + R_n = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n \\ R_n = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)x^n}{n!} \qquad (0<\exists\theta<1) \qquad\qquad \text{剰余項} \end{cases}$$

が成り立つ．$f(x)$ の $x=0$ での $n-1$ 次 Taylor 多項式 $T_{n-1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(0)}{k!}x^k$ を

$f(x)$ の $n-1$ 次 Maclaurin 多項式ということもある．

関数 $f(x)$ が $x=a$ を含む開区間 I で C^∞ 級で (I の各点で) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ が成り立つ場合には，$f(x)$ はテイラー展開 ($a=0$ の場合には，マクローリン展開ともいう) で表される：

$$f(x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k\right).$$

基本例

$\boxed{1}$　(1)　関数 $\dfrac{1}{1-x}$ の n 次導関数を求めよ．

(2)　関数 $\dfrac{1}{1-x}$ の Maclaurin 多項式と剰余項を調べよ．

$\boxed{\text{解}}$　(1)　$f(x) = (1-x)^{-1}$ と置くと，　$f^{(1)}(x) = (1-x)^{-2}$，$f^{(2)}(x) = 2!\,(1-x)^{-3}$，　$\cdots$.

帰納的に　$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-n-1}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(2)　(1) より $f^{(n)}(0) = n!$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ であるから，Maclaurin 多項式と剰余項は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} \ = \ f(0) + \dfrac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n \\ \qquad\quad = \ 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\exists\theta<1). \qquad // \end{cases}$$

等比級数の知識から，　$-1 < x < 1$ のとき，実は，剰余項 $R_n = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ であることがわかる．任意の $x \in (-1,\ 1)$ を固定したとき，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = 0$ であるから，

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

が $f(x) = (1-x)^{-1}$ の Maclaurin 展開である．

$\boxed{2}$ 指数関数 e^x の Maclaurin 多項式と剰余項を調べよ.

[解] $f(x) = e^x$ とすると，n 階導関数 $f^{(n)}(x) = e^x$ であるから，

$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$. Maclaurin 多項式と剰余項は

$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \dfrac{x^k}{k!} + R_n \\ R_n = \dfrac{e^{\theta x}\ x^n}{n!} \qquad (0<\exists\theta<1). \qquad // \end{cases}$$

任意の x を固定したとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |R_n| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{e^{|x|}\ |x|^n}{n!} = 0$ であるから，

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

が指数関数 e^x の Maclaurin 展開である.

$\boxed{3}$ 三角関数 $\cos x$ の Maclaurin 多項式と剰余項を調べよ.

[解] $f(x) = \cos x$ とすると，n 階導関数 $f^{(n)}(x) = \cos(x + \dfrac{n\pi}{2})$ であるから， $f^{(n)}(0) = \cos\dfrac{n\pi}{2}$.

従って $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$, $f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ であるから， Maclaurin 多項式と剰余項は

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{(n-1)} \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n} \\ R_{2n} = \dfrac{\cos(\theta x) x^{2n}}{(2n)!} \qquad (0<\exists\theta<1). \qquad // \end{cases}$$

任意の x を固定したとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |R_{2n}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$ であるから，

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\left\{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

が $\cos x$ の Maclaurin 展開である.

C. 巧妙な計算

$\boxed{4}$ 双曲線関数 $\cosh x\ (= \dfrac{e^x + e^{-x}}{2})$ の Maclaurin 多項式と剰余項を調べよ.

[解] $f(x) = \cosh x$ とすると，n 階導関数 $f^{(n)}(x) = \dfrac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2}$ であるから，

$f^{(2n)}(0) = 1$, $f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$. Maclaurin 多項式と剰余項は

$$\begin{cases} \cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n} \\ R_{2n} = \dfrac{(\cosh\theta x) x^{2n}}{(2n)!} \qquad (0<\exists\theta<1). \qquad // \end{cases}$$

任意の x を固定したとき， $\lim_{n\to\infty} |R_{2n}| \leq \lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{|x|}x^{2n}}{(2n)!} = 0$ であるから，

$$\cosh x = \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

が $\cosh x$ の Maclaurin 展開である.

$\boxed{5}$ 指数 e^x の $x=a$ での Taylor 多項式と剰余項を調べよ.

[解] $f(x)=e^x$ とすると，n 階導関数 $f^{(n)}(x)=e^x$ であるから，

$f^{(n)}(a)=e^a \qquad (n=0,1,2,\cdots).$ Taylor 多項式と剰余項は

$$\begin{cases} e^x = e^a + e^a(x-a) + \dfrac{e^a(x-a)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{e^a(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^a(x-a)^k}{k!} + R_n \\ R_n = \dfrac{e^{a+\theta(x-a)}(x-a)^n}{n!} = e^a\cdot\dfrac{e^{\theta(x-a)}(x-a)^n}{n!} \qquad (0<\exists\theta<1). \qquad // \end{cases}$$

さらに，任意の x を固定したとき， $\lim_{n\to\infty}|R_n| \leq e^a\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{|x-a|}\ |x-a|^n}{n!} = 0$ であるから，

$$\text{Taylor 展開} \qquad e^x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^a(x-a)^k}{k!} = e^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

が成り立つ.

$\boxed{6}$ つぎの Maclaurin 展開を導け.

(1)
$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1} \\ R_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n(\cos\theta x)x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (0<\exists\theta<1). \end{cases}$$

さらに，任意の x を固定したとき， $\lim_{n\to\infty}|R_{2n+1}| \leq \lim_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ であるから，

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left\{x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

が成り立つ.

(2) $\log(1+x)$ の n 階導関数 $\dfrac{d^n}{dx^n}\log(1+x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ であるから $(n=1,2,\cdots)$，

$$\begin{cases} \log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2}\dfrac{x^{n-1}}{n-1} + R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_n \\ R_n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n(1+\theta x)^n} \qquad (0<\exists\theta<1). \end{cases}$$

実は，

$$\log(1+x) = \lim_{n\to\infty}\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ.

(3)
$$\begin{cases} (1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \\ \qquad\qquad = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^k}{k!} + R_n \\ R_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+\theta x)^{\alpha-n}\ x^n}{n!} \qquad (0<\exists\theta<1). \end{cases}$$

実は，
$$(1+x)^\alpha = \lim_{n\to\infty}\Big\{1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)x^{n-1}}{(n-1)!}\Big\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} \qquad (-1<x<1)$$
が成り立つ.

$\boxed{7}$ 関数 $f(x)$ が $x=a$ を含む開区間 I で n 回微分可能で

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-a)^k + o(|x-a|^n)$$

が成り立つならば，$a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ $(k=0,1,\cdots,n)$ である.

$\boxed{8}$ 原点を中心とする半径 1 の円周上の点 $A(1,0)$ と $B(\cos\theta, \sin\theta)$ $(\theta\in\mathbf{R})$ を考える.

円弧 AB の中点を $C\big(\cos\dfrac{\theta}{2}, \sin\dfrac{\theta}{2}\big)$ とする. $a=|AB|$ (弦 AB の長さ) と $b=|AC|$ (弦 AC の長さ) で与えられる $\dfrac{8b-a}{3}$ を θ の関数として $\phi(\theta)$ $(0\le\theta\le\pi)$ と置く.

(1) 5 階導関数 $\phi^{(5)}(\theta)$ を求めよ.

(2) $\phi^{(5)}(\theta)$ $(0\le\theta\le\pi)$ の最大最小値を求めよ.

(3) $\phi(\theta)=\theta+\epsilon$, とする時, $|\epsilon| \le \dfrac{\theta^5}{7680}$.

(円弧 AB の長さ θ と $\dfrac{8b-a}{3}$ の差 ϵ は $\dfrac{\theta^5}{7680}$ 以下であることを示している.)

HINT. 関数 $\phi(\theta)$ の Maclaurin 多項式と剰余項を調べよ.

$\boxed{9}$ 上の $\boxed{8}$ に於いて,

(1) b を a を用いて表せ.

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ の場合に b を計算し，円周率 π の近似値 $3\cdot\dfrac{8b-a}{3}=8b-a$ を小数点以下 2 桁まで求めよ，また 誤差を評価しなさい（$\pi<3.30$ を使ってよい）.

$\boxed{10}$ Maclaurin の定理を利用して角 1 度に対する $\sin 1^\circ$ の値を小数点以下 4 桁まで求めよ.

$\boxed{11}$ Maclaurin の定理を利用して $n=0,1,\cdots$ の場合に

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}\leq \sin x\leq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\quad (0\leq x\leq \pi)$$ を示せ.

$\boxed{12}$ Taylor の定理を利用して，角３１度に対する $\sin 31^\circ$ の値を小数点以下 3 桁まで求めよ.

$\boxed{13}$ Maclaurin の定理を利用して $n=1,2,\cdots$ の場合につぎのことを示せ：

$$1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^k}{k!}+\cdots-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\leq e^{-x}\leq 1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^k}{k!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad (x\geq 0).$$

D. 技法 Technics $\boxed{\text{テイラーの定理}}$ の証明

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で C^{n-1} 級，開区間 (a,b) で n 回微分可能とする. $a<x\leq b$ のとき

$$K=\frac{n!}{(x-a)^n}\Big(f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2-\cdots-\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\Big)\qquad\cdots\quad(*)$$

と置いて，変数 t の関数

$$\begin{aligned}F(t)&=f(x)-\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{f^k(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{K}{n!}(x-t)^n\\&=f(x)-\Big(f(t)+f'(a)(x-t)+\cdots+\frac{f^{n-1}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{K}{n!}(x-t)^n\Big)\end{aligned}$$

を考える.

明らかに $F(x)=0$ で，さらに $(*)$ から $F(a)=0$ が成り立つから，平均値の定理により

$F'(a+\theta(x-a))=0 \qquad (0<\exists\theta<1)$. さて

$$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{d}{dt}\Big\{f(x)-\Big(f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{n-1}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{K}{n!}(x-t)^n\Big)\Big\}\\&=-\Big(f'(t)+\big(f''(t)(x-t)-f'(t)\big)+\Big(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)\Big)+\cdots\\&\qquad+\Big(\frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-\frac{f^{n-1}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2}\Big)-\frac{K}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\Big)\\&=-\frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{K}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}=\frac{K-f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\end{aligned}$$

であるから，

$K=f^n(a+\theta(x-a)) \qquad (0<\exists\theta<1)$

が成り立つ. こうして

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2-\cdots-\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n}{n!}$$

$(0<\exists\theta<1).$ //

(*) $\boxed{\text{テイラーの定理}}$ の証明において，閉区間 $[a,b]$ に含まれる条件 $a<b$ はどのような役割も果たしていないので，$\boxed{\text{テイラーの定理}}$ は閉区間 $[b,a]$ の場合にも成り立っている.

2.13　極値と不等式

B．基本例

$\boxed{1}$　$\sin x \geq \dfrac{2\,x}{\pi}$　$\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$　を示せ．

[解]　関数 $f(x) = \sin x - \dfrac{2\,x}{\pi}$　$\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の導関数 $f'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}$ について調べる．
$\cos x$　$\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$　は単調減少であるから，$f'(x)$　も単調減少で

$$\begin{cases} f'(0) = 1 - \dfrac{2}{\pi} > 0 \\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{\pi} < 0. \end{cases}$$

中間値の定理により　$f'(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在して，次の増減表が成り立つ．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

この増減表から，関数 $f(x)$　$\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$　の最小値は 0 であることがわかる．故に
$f(x) \geq 0$　$\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$，　すなわち，　$\sin x \geq \dfrac{2\,x}{\pi}$　$\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$　が示された．　//

[別解]　関数 $F(x) = \sin x$　$\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$　の二階導関数は　$F''(x) = -\sin x \leq 0$　$\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$
を満たしているから，$F(x)$　は区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ で凹である．凹性から，関数 $y = F(x)$ のグラフは二点 $(0, 0)$ と $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ を結ぶ線分 $y = \dfrac{2\,x}{\pi}$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフの上にある，故に

$$\frac{2\,x}{\pi} \leq F(x) = \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right). \qquad //$$

C．巧妙な計算

$\boxed{2}$　関数 $y = x^x$ $(= e^{x\log x})$ の極値および極限値 $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ を求め，グラフを描け．

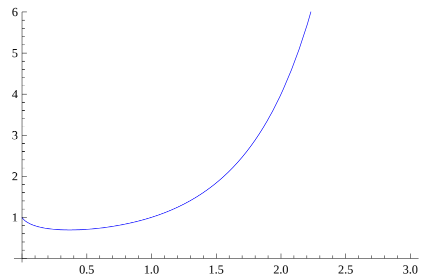
[解]　関数 $y = x^x$ $(= e^{x\log x})$　を考える場合，その定義域は $x > 0$ である．
導関数　$y' = e^{x\log x}\big(\log x + 1\big) = x^x\big(\log x + 1\big)$ であるから，　$y' = 0$ の解は $\log x + 1 = 0$ の解 $x = e^{-1}$ である．
二階導関数　$y'' = x^x\big(\log x + 1\big)\big(\log x + 1\big) + x^x \cdot \dfrac{1}{x} = x^x\big(\log x + 1\big)^2 + x^{x-1} > 0$ は明らかである．つぎに，関数値の変化を増減表によって調べる：

x	0	$\cdots$	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	-	
y''		$+$	$+$	$+$	
y	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	∞

この増減表から, 関数 $y = x^x$ $(x > 0)$ の極小値は最小値 $e^{-\frac{1}{e}}$ であることがわかる． さらにロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$y = x^x$



であるから

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log x} = e^{\lim_{x\to 0} x\log x} = e^0 = 1 \\ \lim_{x\to\infty} x^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log x} = e^{\lim_{x\to\infty} x\log x} = \infty \end{cases}$$

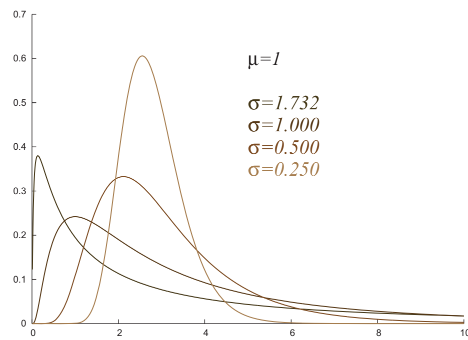
もわかる．　　//

$\boxed{3}$　関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(x > 0)$ に対して，つぎの問に答えよ ($\sigma > 0,\ \mu \in \mathbf{R}$).

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ.

(2) $\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を示せ.

右図は $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\log x-1)^2}{2}}$ のグラフ ($\mu = 1$).



D. 技法 Technics

$\boxed{1}$　$p,\ q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ とする.

(1)　$f(x) = \dfrac{x^p}{p} - x + \dfrac{1}{q}$　$(x > 0)$　の最小値を求め，　$\dfrac{x^p}{p} - x + \dfrac{1}{q} \geq 0$　を示せ.

(2)　$a > 0,\ b > 0$　に対して，　ヤング (Young) の不等式　$ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$　を示せ.

(3)　$a_i > 0,\ b_i > 0$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$　のとき，ヘルダー (Hölder) の不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \ \leq\ \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

が成り立つ.

$\boxed{\text{証明}}$ (1) $f'(x) = x^{p-1} - 1$ であるから, 増減表を調べる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-1	-	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{q}$	↘	0	↗

この増減表から，関数 $f(x)$ $(x \geq 0)$ の極小値は 0 であることがわかる．これは,

$f(x) \geq 0$ $(x \geq 0)$ を意味している.

(2)　さて，　$-\dfrac{q}{p} = -q\dfrac{1}{p} = -q(1-\dfrac{1}{q}) = 1-q$　であるから，　$x = ab^{-\frac{q}{p}} = ab^{1-q} > 0$　で

$$f(ab^{-\frac{q}{p}})b^q = \Big(\frac{a^p b^{-q}}{p} - ab^{-\frac{q}{p}} + \frac{1}{q}\Big)b^q = \frac{a^p}{p} - ab^{1-q}b^q + \frac{b^q}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \geq 0 \ .$$

故に　　$\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \geq ab$　(等号は　$ab^{-\frac{q}{p}} = 1$　すなわち　$a = b^{q-1}$ の時に限る).

(3)　今，　$\alpha_i = \dfrac{a_i}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}}$,　$\beta_i = \dfrac{b_i}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}}$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$　を考えると，

$$\alpha_i \beta_i \leq \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\Big)} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\Big)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)\ .$$

従って，$\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i = \frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}} \leq \sum_{i=1}^n\Big(\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\Big)} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\Big)}\Big) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ .$

これから，　$\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^n b_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}\ .$　　//

$\boxed{2}$　$p,\ q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$　とする．　$a_i > 0,\ b_i > 0\ \ (i = 1, 2, \cdots)$　のとき，

$$\sum_{i=1}^\infty a_i b_i \ \leq\ \Big(\sum_{i=1}^\infty a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^\infty b_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \qquad \text{(Hölder の不等式)}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{証明}}$　今，

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i\ , \qquad \beta_n = \sum_{i=1}^n a_i^p\ , \qquad \gamma_n = \sum_{i=1}^n b_i^q$$

と置くと，　$a_i > 0,\ b_i > 0\ \ (i = 1, 2, \cdots)$　であるから，数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ は単調増加である．これらの単調増加数列の極限値を（正の無限大 ∞ に発散する場合も許して）

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \sum_{i=1}^\infty a_i b_i\ , \quad \beta = \lim_{n\to\infty}\beta_n = \sum_{i=1}^\infty a_i^p\ , \quad \gamma = \lim_{n\to\infty}\gamma_n = \sum_{i=1}^\infty b_i^q$$

と置く．$\alpha_n \leq \beta_n\gamma_n\ \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$　であるから，比較原理により　$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n \leq \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\gamma_n$.

1.2　収束数列 B．基本事項　$\boxed{\textbf{定理 1}}$　**(3)** により，　$\alpha \leq \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\gamma_n = \beta\gamma\ \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$

が成り立つ．(左辺が正の無限大に発散する場合，右辺もそうである．)　//

第3章　積分法

3.1　不定積分

A.　不定積分

中世の科学者 N. Oresme(1323?-1382) は初歩的な（連続量の）グラフ的表現を初めて導入し，時間に依存する大きさや量の考えを我々になじみあるものとしたと言われている．関数のグラフが（関数で表現された現象についての）我々の直感的理解をたすけるものだということは（知識の理解と獲得において）重要なことである．

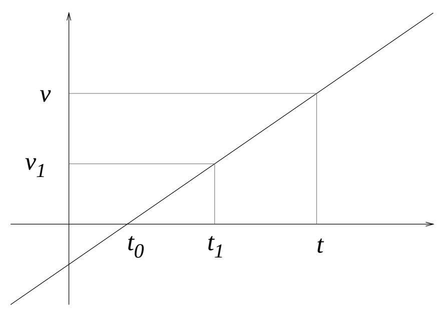
例えば，時刻 t_1 時のとき速度 v_1 km/h，定加速度 a km/h^2 で直線上を等加速度運動している物体の時刻 t 時での速度 v km/h は

$$v = v_1 + a \cdot (t - t_1)$$

で表される．この物体の速度 v と時刻 t の関係は平面上で Descartes の直交座標系を用いて幾何的にグラフ表示される．この場合，時刻 t_1 から時刻 t までの時間に運動した距離 S km は

$$S = \frac{(v_1 + v)}{2} \cdot (t - t_1)$$

で表される．



‘ どの瞬間にも同じように速度が早くなる (等加速) 運動の t 時間で移動する距離は、始めから終わりまでの運動時間の真ん中での速度で t 時間移動した距離と同じである．’という事実を Merton の定理と言うそうだが，この定理をを最初に証明したのが、オレームだと言われている．

このような変化する連続量（例えば物体の物理的運動）の研究は，近代数学を古典数学から区別しているものである，そして変化する連続量の数学的表現は関数で与えられる．関数の概念は微分積分学の発見とともに生じ，”関数 = Function” の語は Leibniz の 1692 年頃の論文に初めて表れたとされている．

さて，直線上を等加速度運動している物体の速度が 0 km/h であった時刻 t_0 は，未知数 t の

$$\text{方程式と解} \qquad \begin{cases} 0 = v_1 + a \cdot (t - t_1) \\ t_0 = t_1 - \dfrac{v_1}{a} \end{cases}$$

より求められる．物体の速度と時刻の関係をグラフで表すことによって，この時刻 t_0 はグラフと t 軸の交点の座標として幾何的にも理解されるようになる．さらに 時刻 t_1 から時刻 t まで

の時間に運動した距離 S km を経過時間 $t-t_1$ で表してみる：

$$v = v_1 + a\cdot(t-t_1)$$

であるから，

$$S = (v_1+v)\cdot\frac{(t-t_1)}{2} = v_1\cdot(t-t_1) + a\cdot\frac{(t-t_1)^2}{2}.$$

速度 v，距離 S を時刻 t の関数 $v(t)$, $S(t)$ として表すと

$$\begin{cases} v(t) = v_1 + a\cdot(t-t_1) \\ S(t) = v_1\cdot(t-t_1) + a\cdot\dfrac{(t-t_1)^2}{2} \end{cases}$$

が成り立つ．これらの 2 つの関数は，微分と積分の関係から見ると，$v(t)$ は $S(t)$ の導関数で $S(t)$ は $v(t)$ の不定積分という関係になっている．このように，関数の概念はただ現象を記述するということではなく，さまざまな関数との数学的（演算）関係を通して問題を解析できる可能性を開くものである．

原始関数/不定積分　関数 $f(x)$ が与えられたとき，$F'(x)=f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数といい，$F(x)$ と $f(x)$ についてのこの事実を $F(x)=\int f(x)\,dx$ と表現する．$\int f(x)\,dx$ は後で述べる定積分との関連で $f(x)$ の不定積分と呼ばれる（**3.7 B．微分積分学の基本定理**）.

不定積分の定数を除いての一意性

今、$G(x)$ を $f(x)$ の $F(x)$ とは異なる原始関数とすると，　$G'(x)=f(x)$　であるから $G'(x)=F'(x)$ が成り立つ．故に，**2.9 関数の増減 B．基本事項　定理 1** により

$$G(x) = F(x) + C = \int f(x)\,dx \qquad (C\ :\ \text{積分定数といわれる.})$$

が成り立つ.

定理 1 不定積分の線形性

(1) $\displaystyle\int \Big\{f(x)+g(x)\Big\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int \lambda f(x)\,dx = \lambda\int f(x)\,dx \quad (\lambda\ :\ \text{定数})$

簡単な不定積分

(1) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$

(2) $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \log|x| + C$

(3) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

(4) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(5) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$

B. 基本事項

$\boxed{\textbf{簡単な不定積分の公式}}$ が合成関数の微分法から得られる．これを示せ.

(1) $\displaystyle\int f(x)^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1} + C$ （$\alpha \neq -1$ かつ $f(x)^{\alpha}$ が定義されているとき．）

(2) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ （ もちろん $f(x) \neq 0$ のとき．）

$\boxed{1}$ 右辺の関数の導関数を計算することによって，次の不定積分を示せ.

(1) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

$\boxed{2}$ 次の関数の不定積分を計算せよ.

(1) $x^5 - 2x - 1$

(2) $\dfrac{1}{3x}$

(3) $x(x^2+1)^5$

(4) $\dfrac{x}{1+x^2}$

(5) $\dfrac{1}{(\sin^{-1} x)\sqrt{1-x^2}}$

(6) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(7) $\sin x\ \cos^3 x$

(8) $\dfrac{\log x}{x}$

(9) $\dfrac{\tan^{-1} x}{1+x^2}$

(10) $\sqrt[3]{x}$

(11) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3.2　置換積分

B. 基本事項

置換積分　関数 $\phi(t)$ が微分可能で　$x=\phi(t)$ と置けるとき，

$$\int f(x)\,dx \;=\; \int f(\phi(t))\;\phi'(t)\,dt\;\;.$$

証明　$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$　とすると，合成関数 $F(\phi(t))$ の導関数は

$$\Big\{F(\phi(t))\Big\}' \;=\; F'(\phi(t))\,\phi'(t) \;=\; f(\phi(t))\,\phi'(t)\;.$$

故に，$\displaystyle\int f(x)\;dx \;=\; F(x) \;=\; F(\phi(t)) \;=\; \int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt\;.$　　//

例．**簡単な不定積分の公式**

(1)　$\displaystyle\int f(x)^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

$\because$　$\displaystyle\int t^{\alpha}\,dt$ を $t=f(x)$ として置換積分すると，置換積分の公式から $\displaystyle\int t^{\alpha}\,dt \;=\; \int f(x)^{\alpha} f'(x)\,dx.$

$$\therefore\quad \int f(x)^{\alpha} f'(x)\,dx \;=\; \int t^{\alpha}\,dt \;=\; \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}+C \;=\; \frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1}+C.$$

(2)　$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

$\because$　$t=f(x)$　として置換積分すると，置換積分の公式から $\displaystyle\int \frac{1}{t}\,dt \;=\; \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$

$$\therefore\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \;=\; \int \frac{1}{t}\,dt \;=\; \log|t|+C \;=\; \log|f(x)|+C.$$

(3)　$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$　とすると，　$\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C\;.$

$\because$　$t=ax+b$　として 置換積分の公式を考えると

$$\begin{aligned}\int f(ax+b)\,dx \;&=\; \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot a\,dx \;=\; \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot\frac{dt}{dx}\,dx\\ &=\; \int f(t)\,dt \;=\; F(t) \;=\; F(ax+b)+C.\end{aligned}$$

例　$\displaystyle\int \cos(2x-1)\,dx$　を求めよう．

$t=2x-1$，すなわち　$x=\dfrac{t+1}{2}$ で置換積分すると，　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$　であるから，

$$\int \cos(2x-1)\,dx \;=\; \int \frac{\cos t}{2}\,dt \;=\; \frac{\sin t}{2}+C \;=\; \frac{\sin(2x-1)}{2}+C\;.$$

$\boxed{1}$　次の関数の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int (3x+1)^3\,dx$　(2) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \sin(3x+2)\,dx$　(4) $\displaystyle\int e^{4x+1}\,dx$

3.3　部分積分

B. 基本事項

$\boxed{\text{部分積分}}$

$$\int f(x)g'(x)\,dx \;=\; f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \quad .$$

$\boxed{\text{証明}}$　関数の積の微分法から,

$$\Big\{f(x)g(x)\Big\}' \;=\; f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

故に,　$\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \;=\; f(x)g(x) + C\ .$　　//

$\boxed{\text{例. \textbf{簡単な不定積分の公式}}}$

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

$\boxed{1}$ 部分積分によって，次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx$　(2) $\displaystyle\int xe^x\,dx$　(3) $\displaystyle\int \sin^{-1}x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \cos^{-1}x\,dx$　(5) $\displaystyle\int \tan^{-1}x\,dx$

C. 巧妙な計算

$\boxed{\text{例}}$

$$\begin{aligned}
\int x\tan^{-1}x\,dx \;&=\; \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&=\; \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&=\; \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x = \frac{x^2+1}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + C\ . \qquad //
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$　(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$　(3) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx$　(5) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$　(6) $\displaystyle\int x(\log x)^2\,dx$

3.4 有理関数，無理関数や三角関数の不定積分

A. $\boxed{1}$ つぎの不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+1}{x-2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x}{(x-2)(x^2+1)}\,dx$

C. 巧妙な計算

$\boxed{\text{有理関数の不定積分の例}}$

(1)

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

$$\left(t=\frac{x-1}{2}\quad \text{で置換積分する.}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\tan^{-1}t}{4}+C = \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x-1}{2}+C\ .$$

(2)

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)(x-1)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{-1}{x+3}+\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\Big\{-\log|x+3|+\log|x-1|\Big\}+C = \log\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C\ .$$

(3) $$\int \frac{1}{4x^2+4x+1}\,dx = \int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(2x+1)}+C\ .$$

(4)

$$\int \frac{2x-3}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{2x-4+1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{(x^2-4x+5)'}{x^2-4x+5}\,dx+\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx$$

$$= \log\ (x^2-4x+5)+\tan^{-1}(x-2)+C\ .$$

(5)

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}\,dx = \log x-\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \log x-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \log x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C = \frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1}+C\ .$$

$\boxed{\text{無理関数の不定積分の例}}$

無理関数の不定積分は, 残念ながら, いつでも求められるとは限らない. ここでは, 適当な変換により有理関数の不定積分に帰着できるものを扱う.

$\boxed{\text{例 1}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$ を計算せよ. 無理関数の不定積分は, 無理関数を有理関数に変えればよいので, $\sqrt{x}=t$ とおいて置換積分を行う. $x=t^2$, $dx=2t\,dt$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}} &= \int \frac{2t}{1-t}\,dt = \int\Big(-2+\frac{2}{1-t}\Big)\,dt \\ &= -2t-2\log|1-t|+C = -2\sqrt{x}-2\log|1-\sqrt{x}|+C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例 2}}$ $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\Big)+C \qquad (a>0)$

$$\begin{aligned}\because\qquad \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\ &= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx+a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\ &= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}+C\ . \\ \therefore\qquad 2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx &= x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}+C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例 3}}$ $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$ を計算せよ $(A\neq 0)$.

$t-x=\sqrt{x^2+A}$ として，置換積分しよう． $x^2+A=(t-x)^2=t^2-2xt+x^2$ から

$$x = \frac{t^2-A}{2t}\ ,\qquad dx = \frac{t^2+A}{2t^2}\,dt\ ,\qquad \sqrt{x^2+A}=t-x=\frac{t^2+A}{2t}\ .$$

故に

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} &= \int\frac{2t}{t^2+A}\,\frac{t^2+A}{2t^2}\,dt = \int\frac{dt}{t} = \log|t|+C \\ &= \log\big|x+\sqrt{x^2+A}\big|+C\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例 4}}$ $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx$ を計算せよ $(A\neq 0)$. 上の $\boxed{\text{例 3}}$ の結果より

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+A}\,dx &= x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}\,dx \\ &= x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2+A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx+A\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx \\ &= x\sqrt{x^2+A}-\int\sqrt{x^2+A}\,dx+A\log\big|x+\sqrt{x^2+A}\big|+C\ . \\ \therefore\qquad \int\sqrt{x^2+A}\,dx &= \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2+A}+A\log\big|x+\sqrt{x^2+A}\big|\Big)+C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ つぎの不定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx$

$\boxed{\text{三角関数の不定積分の例}}$

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ を求めよう.　$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ であるから,

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(x+\frac{\sin 2x}{2}\Big)+C = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C\ .$$

(2) $\displaystyle\int \sin^4 x\ \cos x\,dx$ を求めよう.

$t=\sin x$ で置換積分すると,　$\dfrac{dt}{dx}=\cos x$　であるから,

$$\int \sin^4 x\ \cos x\,dx = \int t^4\,dt = \frac{t^5}{5}+C = \frac{\sin^5 x}{5}+C\ .$$

(3) $\displaystyle\int \sin 3x\ \cos 2x\,dx$ を求めよう.　三角関数の加法公式から,

$$\int \sin 3x\ \cos 2x\,dx = \int \frac{\sin 5x+\sin x}{2}\,dx = -\frac{\cos 5x}{10}-\frac{\cos x}{2}+C\ .$$

(4) 三角関数の加法公式から, $m,\ n\,(\neq 0)$ に対して

$$\begin{aligned}\int \sin mx\ \sin nx\,dx &= -\frac{1}{2}\int\Big\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\Big\}\,dx\\ &= \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}-\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big)+C & (m\neq n)\\ -\dfrac{\sin 2nx}{4n}+\dfrac{x}{2}+C & (m=n).\end{cases}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 三角関数の加法公式を使って, $m,\ n\,(\neq 0)$ に対してつぎのことを示せ.

(1) $$\int \cos mx\ \cos nx\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}+\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big)+C & (m\neq n)\\ \dfrac{\sin 2nx}{4n}+\dfrac{x}{2}+C & (m=n).\end{cases}$$

(2) $$\int \sin mx\ \cos nx\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\cos(m+n)x}{m+n}+\dfrac{\cos(m-n)x}{m-n}\Big)+C & (m\neq n)\\ -\dfrac{\cos 2nx}{4n}+C & (m=n).\end{cases}$$

D. 計算の技術

有理関数の不定積分　　実数を係数とする有理関数

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \cdots + \alpha_m}{x^n + \beta_1 x^{n-1} + \cdots + \beta_n} \qquad (m, n \in \mathbb{N},\ \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R})$$

の不定積分

$$I = \int f(x)\, dx$$

を考える.

Step 1　最初の注意

分子の次数 m が分母の次数 n 以上のときは, まず割り算を行い,

$$f(x) = (m-n)\ \text{次の多項式} + \frac{(n-1)\ \text{次以下の多項式}}{n\ \text{次の多項式}}$$

とする. このとき多項式の部分は積分可能である. 故に, 有理関数の分子の次数 m は分母の次数 n より小さい $(m < n)$ 場合に, 積分可能であることを示す.

例１　分子の次数が分母の次数以上の場合は, まず分子を分母で割り,

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - x + 23}{x^2 + 3} = x + 4 - \frac{4x - 11}{x^2 + 3}$$

のように変換する. この式に対して積分すると,

$$I = \int f(x)\, dx = \int (x+4)\, dx - \int \frac{x - 11}{x^2 + 3}\, dx = \frac{x^2}{2} + 4x - \int \frac{4x - 11}{x^2 + 3}\, dx$$

となる. 多項式部分は積分される. 残るは有理式の積分である. 以後は $n < m$ となる有理関数の積分のみを考える.

Step 2　分母を因数分解する.

有理関数 $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ の分母の多項式 $q(x)$ を実数の範囲で因数分解する. このとき,

$$q(x) = (x + b_1)^{m_1} (x + b_2)^{m_2} \ldots (x^2 + c_i x + d_i)^{m_i} (x^2 + c_{i+1} x + d_{i+1})^{m_{i+1}} \ldots$$

$$(\ b_i, \cdots, c_i, \cdots, d_i, \cdots \in \mathbb{R},\ \text{ここで}\ \ c_i^2 - 4d_i < 0.\ )$$

と表される. m_j $(\in \mathbb{N})$ は方程式 $q(x) = 0$ の解の重複度である. 2 次式の判別式は負である.

例２　$\dfrac{1}{x^3 + 1} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$,　　$\dfrac{x+1}{x^3 + x^2 - 2x} = \dfrac{x+1}{x(x-1)(x+2)}$

Step 3　部分分数分解する.

有理式 $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ を部分分数分解する. すなわち,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x+b_1)^{m_1}(x+b_2)^{m_2}\cdots(x^2+c_ix+d_i)^{m_i}(x^2+c_{i+1}x+d_{i+1})^{m_{i+1}}\cdots} \\
&= \frac{A_{1,1}}{x+b_1}+\cdots+\frac{A_{1,m_1}}{(x+b_1)^{m_1}}+\frac{A_{2,1}}{x+b_2}+\cdots+\frac{A_{2,m_2}}{(x+b_2)^{m_2}}+\cdots \\
&\quad +\frac{A_{i.1}x+B_{i.1}}{x^2+c_ix+d_i}+\frac{A_{i.2}x+B_{i,2}}{(x^2+c_ix+d_i)^2}+\cdots+\frac{A_{i.m_i}x+B_{i.m_i}}{(x^2+c_ix+d_i)^{m_i}}+\cdots
\end{aligned}
$$

と変形する ($A_{i,\lambda},\cdots,\ B_{i,\mu},\cdots\in\mathbb{R}$).

$\boxed{\text{例 } 3}$
$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

とする. 通分して同じ次数でまとめると,

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{x^3+1}$$

となる. よって係数は

$$\begin{cases} A+B \qquad\ \ = 0 \\ -A+B+C=0 \\ A+ \qquad C=1 \end{cases}$$

を満足しなければならない. これを解くと,

$$A=\frac{1}{3},\qquad B=-\frac{1}{3},\qquad C=\frac{2}{3}$$

となる. よって 部分分数分解

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$$

が得られる.

$\boxed{\text{例 } 4}$
$$\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}=\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

とする.

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A}{x(x-1)(x+2)}$$

より,

$$x+1=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A\ .$$

が成り立つ. $x=0$ を代入して, $1=-2A$ すなわち $A=-\dfrac{1}{2}$.

$x=1$ を代入して, $2=(A+B+C)+(A+2B-C)x-2A=3B$ すなわち $B=\dfrac{2}{3}$.

左辺の二次の項の係数 $=0=A+B+C=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+C=-\dfrac{1}{6}+C$ すなわち $C=-\dfrac{1}{6}$

となる. よって 部分分数分解

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}=-\frac{1}{2x}+\frac{2}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}$$

を得る.

Step 4 部分分数ごとに積分する.

部分分数ごとに積分を行う. すなわち

$$
\begin{aligned}
\int f(x)dx &= A_{1,1}\int \frac{dx}{x+b_1} + \cdots + A_{1,m_1}\int \frac{dx}{(x+b_2)^{m_1}} \\
&\quad + A_{2,1}\int \frac{dx}{x+b_2} + \cdots + A_{2,m_2}\int \frac{dx}{(x+b_2)^{m_2}} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \int \frac{A_{i,1}x+B_{i,1}}{x^2+c_ix+d_i}\,dx + \cdots + \int \frac{A_{i,m_i}x+B_{i,m_i}}{(x^2+c_ix+d_i)^{m_i}}\,dx \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

を計算する．このようにして，有理関数の不定積分は

多項式，$\dfrac{1}{(x+a)^m}$ および $\dfrac{Ax+B}{(x^2+cx+d)^m}$ の型の関数の不定積分をすることに帰着した．

(1)

$$
\int \frac{dx}{(x+a)^m} = \begin{cases} \log|x+a| + C & (m=1) \\ \dfrac{-1}{m-1}\,\dfrac{1}{(x+a)^{m-1}} + C & (m \geq 2). \end{cases}
$$

つぎに，関数 $\dfrac{Ax+B}{(x^2+cx+d)^m} = \dfrac{Ax+B}{\left((x+\frac{c}{2})^2 + \dfrac{4d-c^2}{4}\right)^m}$ は $c^2-4d<0$ を満たすので

不定積分 $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\left((x+a)^2+b^2\right)^m}\,ds$ を求めればよい．

(2)

$$
\int \frac{x\,dx}{(x^2+b^2)^m} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\log(x^2+b^2) + C & (m=1) \\ \dfrac{-1}{2(m-1)}\,\dfrac{1}{(x^2+b^2)^{m-1}} + C & (m \geq 2) \end{cases}
$$

(3)　部分積分によって得られる漸化式,

$$
\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^m} = \begin{cases} \dfrac{1}{b}\tan^{-1}\dfrac{x}{b} + C & (m=1) \\ \dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{1}{2m-2}\,\dfrac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} + \dfrac{2m-3}{2m-2}\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^{m-1}} \right) + C & (m \geq 2) \end{cases}
$$

から，これらの不定積分が帰納的に得られる．

$\boxed{\text{例 5}}$ $\displaystyle\int \frac{4x-11}{x^2+3}\,dx = 4\int \frac{x}{x^2+3}\,dx - 11\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = 2\log(x^2+3) - \frac{11}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{\log|x+1|}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \frac{\log|x+1|}{3} - \frac{\log(x^2-x+1)}{6} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}
$$

無理関数の不定積分

例 1　$R(x,\ y)$ を $x,\ y$ の有理関数とし，$ad-bc\neq 0$　の場合に　不定積分

$$\int R\Big(x,\ \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,\Big)\,dx$$

を考える．　$t=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ として，置換積分しよう．　$t^2=\dfrac{ax+b}{cx+d}$　から

$$x\ =\ -\frac{dt^2-b}{ct^2-a}\ =\ -\frac{d}{c}-\frac{ad-bc}{c(ct^2-a)}\ ,\qquad dx\ =\ \frac{2(ad-bc)\ t}{(ct^2-a)^2}\ dt$$

と計算される．故に

$$\int R\Big(x,\ \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,\Big)\,dx\ =\ \int R\Big(-\frac{dt^2-b}{ct^2-a}\ ,\ t\,\Big)\,\frac{2(ad-bc)\ t}{(ct^2-a)^2}\,dt\ .$$

例 2　$R(x,\ y)$ を $x,\ y$ の有理関数とし，不定積分

$$\int R\big(x,\ \sqrt{x^2+A}\,\big)\,dx$$

を考える．　$t-x=\sqrt{x^2+A}$ として，置換積分しよう．
$x^2+A=(t-x)^2=t^2-2xt+x^2$　から

$$x\ =\ \frac{t^2-A}{2t}\ ,\qquad dx\ =\ \frac{t^2+A}{2t^2}\,dt\ ,\qquad \sqrt{x^2+A}=t-x=\frac{t^2+A}{2t}\ .$$

と計算される．故に

$$\int R\big(x,\ \sqrt{x^2+A}\,\big)\,dx\ =\ \int R\Big(\frac{t^2-A}{2t}\ ,\ \frac{t^2+A}{2t}\,\Big)\,\frac{t^2+A}{2t^2}\,dt\ .$$

4　つぎの不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1\pm x^2)^{\frac{3}{2}}}$　　(4) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$　　(7) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$　$(a<x<b)$

三角関数の不定積分

三角関数の不定積分を求める問題も, 置換積分を工夫して，有理関数の不定積分の問題に変換できる. そのための最も一般的な方法としては， $t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおく変換がある.

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}\,, \qquad \sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos^2\frac{x}{2} = \frac{t^2}{1+t^2}\,.$$

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}\,.\\ \cos x &= \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.\end{aligned}$$

$t = \tan\dfrac{x}{2}$ すなわち $x = 2\tan^{-1} t$ であるから,

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,.$$

例 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ を求めよう. $t = \tan\dfrac{x}{2}$ として，置換積分する．このとき

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{dt}{t} = \log|t|+C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\,.$$

または, $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ と考え $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$ として置換積分する.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = -\int\frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1-t}{1+t}+C = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$$

と求めることもできる.

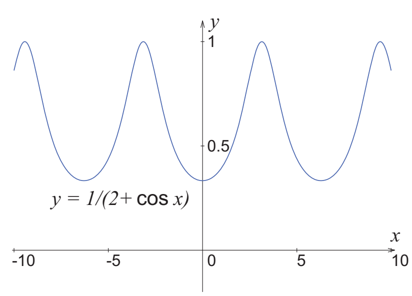
5 つぎの不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\cos x}$ (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+b\cos x}$ $(a^2>b^2)$ (3) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+b\sin x}$ $(a^2>b^2)$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$ $(a^2>b^2)$

Hint.

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b\sin x}{a+b\cos x}\right)-\frac{a}{b^2-a^2}\int\frac{dx}{a+b\cos x}.$$



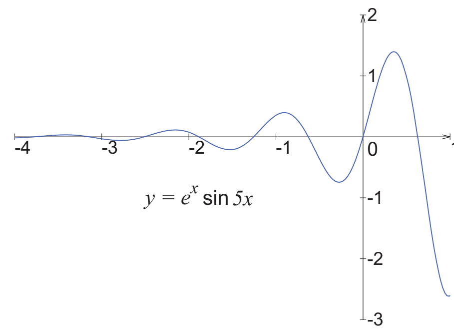
$e^{ax}\cos bx$ の不定積分

$\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ を求めよう.

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}(-b)\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\left\{\frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \int \frac{e^{ax}}{a} b\cos bx\,dx\right\}$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{e^{ax}}{a^2} b\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx\ .$$

$\therefore$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C\ .$$



$\boxed{6}$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

を示せ.

$\boxed{例}$　$I_n = \displaystyle\int \sin^n x\,dx$ とする.　このとき,

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\ \cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n \geq 2), \qquad I_1 = -\cos x + C, \qquad I_0 = x + C\ .$$

$$\because \quad I_n = \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-2}x\ (1-\cos^2 x)\,dx = I_{n-2} - \int \left(\sin^{n-2}x\ \cos x\right)\cos x\,dx$$
$$= I_{n-2} - \left\{\frac{\sin^{n-1}x}{n-1}\cos x + \int \frac{\sin^{n-1}x}{n-1}\sin x\,dx\right\}$$
$$= I_{n-2} - \frac{\sin^{n-1}x}{n-1}\cos x - \int \frac{\sin^{n-1}x}{n-1}\sin x\,dx\ .$$
$$\therefore \quad \frac{n}{n-1}I_n = -\frac{\sin^{n-1}x}{n-1}\cos x + I_{n-2}\ . \qquad //$$

$\boxed{7}$　部分積分法を使って，つぎの漸化式を示せ.

(1)　$I_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx$ とする.　$I_n = \dfrac{1}{n}\cos^{n-1}x\ \sin x + \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$　$(n \geq 2)$.

(2)　$I_n = \displaystyle\int \tan^n x\,dx$ とする.　$I_n = \dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2}$　$(n \geq 2)$.
　Hint.　$\tan^2 x = -1 + \left(\tan x\right)'$.

(3)　$I_n = \displaystyle\int (\log x)^n\,dx$ とする.　$I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}$　$(n \geq 1)$.

(4)　$I_n = \displaystyle\int \left(1-x^2\right)^n dx$ とする.　$I_n = \dfrac{x(1-x^2)^n}{2n+1} + \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$　$(n \geq 1)$.

(5)　$I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^n}\,dx$ とする.　$I_n = \dfrac{x}{(2n-2)(1-x^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$　$(n \geq 2)$.

3.5 変数分離形の微分方程式

A. 現象を表す微分方程式

我々が自然界を観察するとき，ある種の量は現状に比例して変化するという法則にしたがっているように見えることがある．すなわち，ある種の量の時間的変化の大きさは現状に比例するという法則にしたがっている．時間の経過にしたがって変化する量 $y(t)$ が定数 $a \neq 0,\ b$ を含む関係式 (微分方程式)

$$\frac{dy(t)}{dt} = a\,y(t) + b$$

を満たしている場合が多く知られている．例えば，ある国の人口の推移についてのマルサスの予想に関連して，また放射性元素の残存量を計算する場合やある種の生物の個体の成長における大きさの変化などに関連して多くの現象が知られている．

さて，定数 $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, \nu$ で決まる関数 $y = \lambda\, e^{\mu t} + \nu\ (-\infty < t < \infty)$ の導関数 $y' = \mu\lambda\, e^{\mu t}$ はつぎの微分方程式

$$y' = \mu\, y - \mu\,\nu$$

を満たすしている．このことから，微分方程式 $y' = ay + b\ (a \neq 0)$ の解は関数 $y = \lambda\, e^{\mu t} + \nu$ の係数 λ, μ, ν の関係式

$$\mu = \ a\ , \qquad -\mu\nu = \ b$$

を解いて得られることがわかる．関数 $y = c\, e^{at} - \dfrac{b}{a}$ がこの微分方程式 $y' = ay + b$ の解である：ここで c は任意の定数をとることができる．

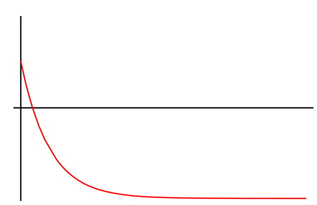
$\boxed{1}$ 時刻 $t = 0$ に物体を初速 $v_0 (> 0)$ で真上に投げるとき，物体は速度に比例する抵抗 (比例定数 $k > 0$) を受けるとする．重力加速度を g とすると，
この物体の時刻 t における速度 $v = v(t)$ は

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv$$

を満たす．

(1) 速度 $v = v(t)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} v(t)$ を求めよ．



B. 成長に関連した微分方程式

$\boxed{2}$ ある種の生物の個体の成長 (体重や体長の時間的変化) はつぎの関数で表されることが知られているという (参考． **2.10 C** $\boxed{\mathbf{3}}$)． $a > 0,\ b > 0,\ k > 0,\ m \in \mathbf{R}$ を定数とする：

$$f_m(t) = \begin{cases} a\big(1 - (1-m)b\, e^{-kt}\big)^{\frac{1}{1-m}} & (m \neq 1) \\ a e^{-be^{-kt}} & (m = 1). \end{cases}$$

これらの関数の定義域は，m に応じて，開区間 $\begin{cases} (-\infty,\, \infty) & (m \geq 1) \\ (k^{-1}\log a(1-m),\, \infty) & (m < 1) \end{cases}$ である．

$m=0$ の時には von Bertalanffy の成長曲線と呼ばれ，ある種の鮫の体長 L の成長の時間的経過に当てはまるそうである．$m \to 1$ とした極限 $m=1$ の場合は Gompertz の成長曲線とよばれている， また $m=2$ の時は Logistic (成長) 曲線である．

さて，日本のある地域の海岸でのアワビの殻長 L (単位 mm) の成長の時間的経過は $m=2$ の場合の $L=f_2(t)$ のグラフ (Logistic 曲線）で $a=127.8,\ b=9.480,\ k=0.5982$ となっていたと報告されている．

この場合について，つぎのことを示せ：

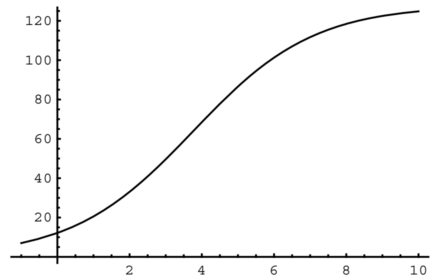
(1) この地域のアワビの $t=6$ 年時の殻長を見積もれ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f_m(t)$ を求めよ．

(3) $y=f_m(t)$ の満たす微分方程式を示せ（$m \in \mathbf{R}$）．

(4) $y=f_1(t)$ の満たす微分方程式は $y=f_m(t)$ の満たす微分方程式で m を 1 に近づける場合の極限と考えられることを示せ．

$$y = \frac{127.8}{1+9.480\,e^{-0.5982\,t}}$$



C. 変数分離形の微分方程式

微分可能な関数 $y(x)$ を y と表して，その導関数 y' との関係が連続関数 $p(x),\ q(x)$ によって

$$y' = p(x)\,q(y)$$

と表されるとき，この関係式を変数分離形の微分方程式といい，このような関数 $y(x)$ を求めることを微分方程式を解くという．さて $y'=p(x)q(y)$ が成り立っているとき

$$\frac{1}{q(y)}y' = p(x)$$

であるから， $q(y) \neq 0$ である限りつぎが成り立つ：

$$\int \frac{1}{q(y)}y'\,dx = \int p(x)\,dx + C \qquad (C: \text{積分定数}).$$

$G(y) = \displaystyle\int \frac{1}{q(y)}\,dy$ と置くと，置換積分法からわかるように，変数分離形の微分方程式の解 $y(x)$ は

$$G(y) = \int p(x)\,dx + C \qquad (C \in \mathbf{R})$$

を満たすことがわかる．変数分離形の微分方程式の解は，一般にこのような関係式で求められる．

$\boxed{例}$ 定数 k に対して，微分方程式 $y' = ky$ の解を求めよ．

$\boxed{解}$ $\dfrac{dy}{dx} = ky$ から $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dx + C\ (C \in \mathbf{R})$ が成り立ち

$$\log|y| = kx + C \quad ,すなわち \quad y = \pm e^{kx+C}$$

が成り立つ．$\pm e^C \neq 0$ を改めて $C \neq 0$ と表すことにすると解 $y = y(x)$ は $y = Ce^{kx} \quad (C \neq 0)$ と現されることがわかる．ここで $C = 0$ に対応する $y \equiv 0$ も微分方程式の解であるから，

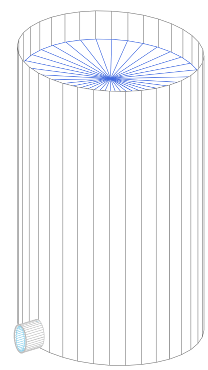
$$y = Ce^{kx} \qquad (C \in \mathbf{R})$$

が微分方程式の解である．

$\boxed{3}$ つぎの変数分離形の微分方程式の解を求めよ，ただし $a \neq 0,\ b$ は定数．

(1) $y' = xy$ (2) $y' = \dfrac{x}{y}$ (3) $x\,y' = y$ (4) $y' = y^2 - y$ (5) $y' = a\,y + b$

$\boxed{4}$ 水がいっぱい入った円筒状のタンクがある．
タンクの水の入れ替えのために，タンクの底の細管から時刻 $t = 0$ に水を放出して t 分後の細管の上の水面の高さを $h(t)$ とするとき，t 分後に水の流出する割合は水面の高さ $h(t)$ に比例することが知られている．t 分後のタンク内の水の量を $V(t)$ とすると，t 分後に水が流出する割合は $V(t)$ の微分係数となると考えられるから，



$$V'(t) = C\sqrt{h(t)} \qquad (C : 定数)$$

と表される．
円筒状のタンクの底面積を S とすると，$V(t) = \pi S\,h(t)$ より $V'(t) = \pi S\,h'(t)$ であるから，

$$h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi S} = \frac{C}{\pi S}\sqrt{h(t)}.$$

水の放出を始めてから 100 分後に半分空になったとすれば，全部が空になるのは約何分後になるか．

$\boxed{5}$ $f(x)\ (x \geq a)$ を有界単調増加関数とする．有限な極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在することを示せ．

注意． ある数 α に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\bigl|f(x) - \alpha\bigr| = 0$ 成り立つとは，

任意の正の数 ϵ に対してある数 a が存在して $x > a$ ならば $\bigl|f(x) - \alpha\bigr| < \epsilon$ が成り立つ

ことである (参照．**1.8 A.，1.9. D**)．

3.6 定積分

B. リーマン和

有界閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ を考える．関数 $f(x)$ は有界，すなわち，ある正の数 M が在って $[a,b]$ のどの x でも 関数 $f(x)$ の絶対値は M を超えないとする．

閉区間 $[a,b]$ を n 個の小区間に分割する：

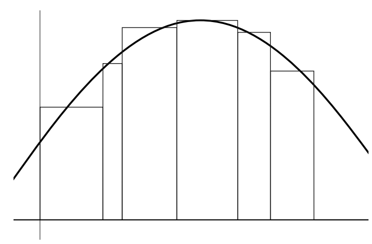
$$\Delta \ : \ a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

各小区間 $[a_{i-1}, a_i]$ から，任意の点 t_i をとる:

$$\mu \ : \ a_0 \leq t_1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{i-1} \leq t_i \leq a_i \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq t_n \leq a_n.$$

この分割 Δ と選出 μ によって決まる

$$R(\Delta,\mu) \ = \ \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) = f(t_1)(a_1 - a_0) + f(t_2)(a_2 - a_1) + \cdots + f(t_n)(a_n - a_{n-1})$$



を考える（リーマン和と呼ばれる）．容易に

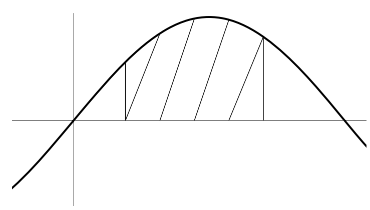
$$|R(\Delta,\mu)| \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} \Big| f(t_i)(a_i - a_{i-1}) \Big| \leq M(b-a)$$

とわかる．

今，分割 Δ に現れる小区間の幅の中で最大の幅を $|\Delta| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$ とする．分割 Δ の小区間の最大の幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけるとき，リーマン和 $R(\Delta,\mu)$ が極限値を持つとき，

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \lim_{|\Delta| \to 0} R(\Delta,\mu) \qquad (f(x) \text{ の閉区間 } [a,b] \text{ 上の定積分})$$

と定義する；このとき 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で積分可能といわれる．



$f(x) > 0 \ \ (a < x < b)$ の場合，$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ の値は曲線 $y = f(x)$ と 線分 $x = a$，$x = b$，x 軸で囲まれた部分の面積と考えられる．

定積分が面積と考えられることから，閉区間 $[-a,a]$ で定義された関数 $f(x)$ が積分可能のとき，

$$\begin{cases} \text{関数 } f(x) \text{ が偶関数ならば} & \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_0^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx \\ \text{関数 } f(x) \text{ が奇関数ならば} & \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_0^a f(x)\ dx = 0 \end{cases}$$

が成り立つ $(a > 0)$ ．

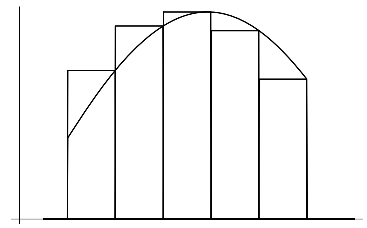
定義 閉区間 $[a,b]$ で定義された関数が積分可能のとき，

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx \qquad \text{と定義する．}$$

定理　連続関数の積分可能性　閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数は $[a,b]$ で積分可能である.

区分求積法

さて，閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数の定積分を近似的に計算するためには，つぎのようにする.
関数 $f(x)$ ： 閉区間 $[a,b]$ で連続.
区間を n 個の小区間に等分に分割すると，k 番目の区間は



$$\left[a+(k-1)\,\frac{b-a}{n},\, a+k\,\frac{b-a}{n}\right] \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

でリーマン和（長方形の柱の面積の総和）

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

となる. ここで, $n \to \infty$ とすると，リーマン和 S_n は $a \leqq x \leqq b$ における定積分に近づく.

例
$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} = \frac{1}{3}\ .$$

1　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ を区分求積法で表せ.

定積分の線形性　リーマン和による定積分の定義から，つぎの定理が証明される.

定理 1　線形性

(1) $\displaystyle\int_a^b \Big\{f(x)+g(x)\Big\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx$　(α は 実数)

定理 2

(1)　区間 $[a,\ b]$ 上で　$f(x) \geq g(x)$　ならば　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

(2)　特に，区間 $[a,\ b]$ 上で　$f(x) \geq 0$　ならば　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

定理 3
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$\boxed{\textbf{定理 4}}$　実数 $a,\ b,\ c$ の大小順序に無関係に，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

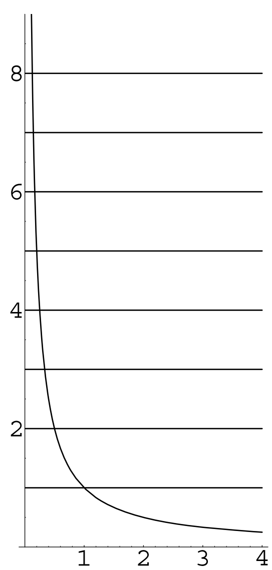
$\boxed{2}$　関数 $f(x)$ $(a \le x \le b)$ は微分可能で $M = \displaystyle\max_{a\le x\le b} |f'(x)| < \infty$ とする．閉区間 $[a,b]$ の n 等分によるリーマン和を S_n とするとき，

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\Big| \le \frac{M(b-a)^2}{n}. \qquad \text{(区分求積法の誤差の評価)}$$

D．一様連続性と積分可能性

$\boxed{\textbf{定理　連続関数の一様連続性}}$

$y = \dfrac{1}{x}$



閉区間 $I = [a,b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ は，閉区間 $I = [a,b]$ で一様連続である，すなわち任意の正の数 ϵ に対して，ある正の数 δ が存在して，閉区間 I のどの $x,\ x'$ に対しても

$$|x - x'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

が成り立つ．

$\boxed{例}$　関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(0 < x \le 1)$ は区間 $(0,\ 1]$ で一様連続ではない．何故なら，$x = \dfrac{1}{n+1}$，$x' = \dfrac{1}{n} \in (0,\ 1]$ のとき，

$f(x) - f(x') = f\Big(\dfrac{1}{n+1}\Big) - f\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$

となり n を大きくすると

$|x - x'| = \dfrac{1}{n(n+1)}$ はいくらでも小さくできるからである．

$\boxed{例}$　閉区間 $[a,b]$ 上で二次関数 $f(x) = x^2$ $(a \le x \le b)$ の絶対値の最大値を $M = \max\Big\{|a|, |b|\Big\}$ とおき，任意の正の数 ϵ に対して正の数 δ を $\delta = \dfrac{\epsilon}{2M}$ と取ると，$a \le x,\, x' \le b$ のとき

$$|x - x'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| = |(x - x')(x + x')| < 2M \cdot \delta < \epsilon$$

が成り立つ．

$\boxed{1}$　三角関数 $\sin x$ は任意の閉区間 $[a,b]$ 上で一様連続であることを具体的に示せ．すなわち，任意の正の数 ϵ に対して正の数 δ を

$$a \le x,\, x' \le b \quad \text{で} \quad |x - x'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\sin x - \sin x'| < \epsilon$$

が成り立つように取れ．

$\boxed{\text{連続関数の一様連続性}}$ の証明　閉区間 $I=[a,b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が閉区間 $I=[a,b]$ で一様連続でないと仮定して，矛盾が生じることを示そう．今，$f(x)$ が閉区間 $I=[a,b]$ で一様連続でないとする．このとき，ある正の数 ϵ_0 を取ると，どんな正の数 δ に対しても，閉区間 $I=[a,b]$ のある $x,\ x'$ で

$$|x-x'|\ <\ \delta \qquad \text{かつ} \qquad |f(x)-f(x')|\ \geq\ \epsilon_0$$

が成り立つ．故に，各 $n\,(\in \mathbf{N})$ に対して，$a_n,\, b_n \in [a,b]$ を

$$|a_n-b_n|\ <\ \frac{1}{n} \qquad \text{かつ} \qquad |f(a_n)-f(b_n)|\ \geq\ \epsilon_0$$

が成り立つように取ることができる．数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は有界数列であるから，収束する部分列 $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ をとることができる．数列 $\left\{b_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ も有界数列であるから，収束する部分列 $\left\{b_{n_{k_l}}\right\}_{l=1}^{\infty}$ をとることができる．このとき，数列 $\left\{a_{n_{k_l}}\right\}_{l=1}^{\infty}$ と $\left\{b_{n_{k_l}}\right\}_{l=1}^{\infty}$ は収束数列で

$$|a_{n_{k_l}}-b_{n_{k_l}}|\ <\ \frac{1}{n_{k_l}} \qquad \text{かつ} \qquad |f(a_{n_{k_l}})-f(b_{n_{k_l}})|\ \geq\ \epsilon_0$$

が成り立っている．$\alpha=\lim\limits_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} \in [a,b],\ \beta=\lim\limits_{l\to\infty} b_{n_{k_l}} \in [a,b]$ と置くと，

$$0 \leq |\alpha-\beta| = \lim_{l\to\infty}|a_{n_{k_l}}-b_{n_{k_l}}| \leq \lim_{l\to\infty}\frac{1}{n_{k_l}} = 0$$

であるから $\alpha=\beta$．さらに

$$0=|f(\alpha)-f(\beta)| = \lim_{l\to\infty}|f(a_{n_{k_l}})-f(b_{n_{k_l}})|\ \geq\ \epsilon_0>0$$

となり，これは不合理であるから，$f(x)$ は閉区間 I で一様連続でなければならない．　　//

$\boxed{\text{連続関数の積分可能性}}$ の証明　このためには，つぎのことを示さなければならない．

閉区間 $[a,\,b]$ の分割 Δ と分割 Δ からの点の選出 μ について，分割 Δ の小区間の最大の幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけるとき，リーマン和 $R(\Delta,\mu)$ が収束する，すなわち $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} R(\Delta,\mu)$ が存在する．

このことを示すために，つぎのように考える：

すべてのリーマン和の集まり $\left\{R(\Delta,\mu)\right\}$ を考えて，リーマン和 $R(\Delta,\mu)$ がつぎの条件

$$\lim_{|\Delta|,\ |\Delta'|\to 0}|R(\Delta,\mu)-R(\Delta',\mu')|=0 \qquad (\text{Cauchyの条件})$$

を満たすこと，すなわち，

$$\left\{\begin{array}{l}\text{任意の小さい正の数 } \epsilon \text{ に対して，正の数 } \delta \text{ を} \\ |\Delta|,\ |\Delta'|<\delta \quad \Longrightarrow \quad |R(\Delta,\mu)- \quad R(\Delta',\mu')|<\epsilon \\ \text{が成り立つように取れる (} \mu,\ \mu' \text{ はリーマン和を構成する点の選出)}\end{array}\right.$$

ことを示せばよい.

有界閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ のリーマン和の値は区間 $[a,b]$ の分割 Δ と分点の選出 μ によるのであるが，連続関数の場合にそのリーマン和の値の‘ 散らばり ’について考えて見る．連続関数 $f(x)$ は有界である (**1.10 連続関数の性質** $\boxed{\textbf{最大値・最小値定理}}$)，すなわち，‘ ある正の数 M が在って $[a,b]$ のどの x でも 関数 $f(x)$ の絶対値は M を超えない ’事に注意する．閉区間 $[a,b]$ を n 個の小区間に分割する：

$$\Delta \ : \ a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b.$$

各小区間 $[a_{i-1}, a_i]$ から，任意の点 t_i をとる:

$$\mu \ : \ a_0 \le t_1 \le a_1 \le \cdots \le a_{i-1} \le t_i \le a_i \le \cdots \le a_{n-1} \le t_n \le a_n.$$

この分割 Δ と選出 μ によって決まるリーマン和

$$R(\Delta, \mu) \ = \ \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) = f(t_1)(a_1 - a_0) + f(t_2)(a_2 - a_1) + \cdots + f(t_n)(a_n - a_{n-1})$$

を考えると

$$|R(\Delta, \mu)| \ \le \ \sum_{i=1}^{n} \Big| f(t_i)(a_i - a_{i-1}) \Big| \le M(b-a)$$

が成り立っている．リーマン和 $R(\Delta, \mu)$ において，他の点の選出を考える：

各小区間 $[a_{i-1}, a_i]$ から，任意の点 $\tilde{t}_i$ をとって選出 $\tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} \ : \ a_0 \le \tilde{t}_1 \le a_1 \le \cdots \le a_{i-1} \le \tilde{t}_i \le a_i \le \cdots \le a_{n-1} \le \tilde{t}_n \le a_n$$

(と分割 Δ) によって決まるリーマン和

$$R(\Delta, \tilde{\mu}) \ = \ \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{t}_i)(a_i - a_{i-1}) = f(\tilde{t}_1)(a_1 - a_0) + f(\tilde{t}_2)(a_2 - a_1) + \cdots + f(\tilde{t}_n)(a_n - a_{n-1})$$

を考える．

さて，連続関数 $f(x)$ の閉区間 $[a,\ b]$ での一様連続性により，

任意の正の数 ϵ に対して，正の数 δ を，どの $x,\ x' \in [a,\ b]$ に対しても

$$|x - x'| \ < \ \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| \ < \ \epsilon$$

が成り立つように選ぶことができる．故に，分割 Δ の小区間の最大の幅 $|\Delta| = \max\limits_{1 \le i \le n} (a_i - a_{i-1})$ を 0 に近づけるとき，$|\Delta| < \delta$ となると

$$|R(\tilde{\Delta}, \mu) - R(\Delta, \mu)| \ \le \ \sum_{i=1}^{n} \Big| f(\tilde{t}_i) - f(t_i) \Big| (a_i - a_{i-1}) \ \le \ \sum_{i=1}^{n} \epsilon (a_i - a_{i-1}) \ = \ \epsilon (b-a) \ .$$

次に, 閉区間 $[a,b]$ の分割 $\tilde{\Delta}$ が分割 Δ の細分になっている場合を考える：

$$\tilde{\Delta}\ :\ a=\tilde{a}_0<\tilde{a}_1<\tilde{a}_2<\cdots<\tilde{a}_{m-1}<\tilde{a}_m=b.$$

選出 $\tilde{\mu}$

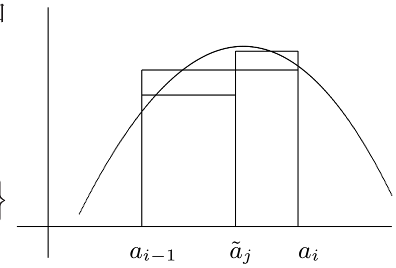
$$\tilde{\mu}\ :\ a_0\le\tilde{t}_1\le a_1\le\cdots\le a_{i-1}\le\tilde{t}_i\le a_i\le\cdots\le a_{n-1}\le\tilde{t}_n\le a_n$$

(と分割 $\tilde{\Delta}$) によって決まるリーマン和

$$R(\tilde{\Delta},\tilde{\mu})\ =\ \sum_{j=1}^{m}f(\tilde{t}_j)(\tilde{a}_j-\tilde{a}_{j-1})=f(\tilde{t}_1)(\tilde{a}_1-\tilde{a}_0)+f(\tilde{t}_2)(\tilde{a}_2-\tilde{a}_1)+\cdots+f(\tilde{t}_m)(\tilde{a}_m-\tilde{a}_{m-1})$$

を考える.

$[a,b]$ の分割 $\tilde{\Delta}$ は分割 Δ の細分になっているので，リーマン和 R_Δ は分割 Δ の小区間ごとに分割 $\tilde{\Delta}$ の分点を繰り込んで



$$R_\Delta\ =\ \sum_{i=1}^{n}f(t_i)(a_i-a_{i-1})\ =\ \sum_{i=1}^{n}\Big\{\sum_{a_{i-1}<\tilde{a}_j\le a_i}f(t_i)(\tilde{a}_j-\tilde{a}_{j-1})\Big\}$$

と表される．したがって

$$|R(\tilde{\Delta},\tilde{\mu})-R(\Delta,\mu)|\ \le\ \sum_{i=1}^{n}\Big\{\sum_{a_{i-1}<\tilde{a}_j\le a_i}\big|f(\tilde{t}_j)-f(t_i)\big|(\tilde{a}_j-\tilde{a}_{j-1})\Big\}\ \le\ \sum_{i=1}^{n}\epsilon(a_i-a_{i-1})\ =\ \epsilon(b-a)\ .$$

最後に，$[a,b]$ の二つの分割 Δ と Δ' の分割の幅が $|\Delta|$, $|\Delta'|<\delta$ となっている場合を考える．$[a,b]$ の分割 Δ と分点の選出 μ に対するリーマン和 $R(\Delta,\mu)$, 分割 Δ' と分点の選出 μ' に対するリーマン和 $R(\Delta',\mu')$ および $[a,b]$ の二つの分割 Δ と Δ' のすべての分点から作られる $[a,b]$ の分割 $\tilde{\Delta}$ と分点の適当な選出 $\tilde{\mu}$ に対するリーマン和 $R(\tilde{\Delta},\tilde{\mu})$ を考えると，上で述べたことから

$$|R(\Delta,\mu)-R(\Delta',\mu')|\ \le\ |R(\Delta,\mu)-R(\tilde{\Delta},\tilde{\mu})|+|R(\Delta',\mu')-R(\tilde{\Delta},\tilde{\mu})|\ \le\ 2\epsilon(b-a)\ .$$

これらのことから,

$$\lim_{|\Delta|,\ |\Delta'|\to 0}|R(\Delta,\mu)-R(\Delta',\mu')|=0$$

がわかり，リーマン和 R_Δ の値の有界性から極限値

$$\lim_{|\Delta|\to 0}R(\Delta,\mu)=\int_a^b f(x)\ dx$$

の存在がわかる．　　//

3.7　定積分の基本的性質

B.　定積分の基本的性質

積分の平均値定理　$f(x)$ が $[a,\ b]$ で連続な関数ならば

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad (a < c < b)$$

となる c が存在する．

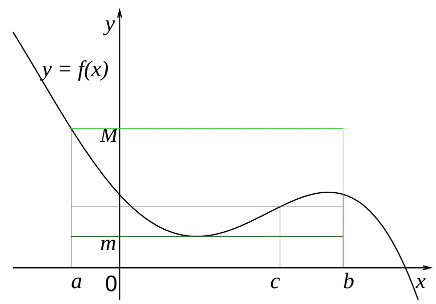
証明　$f(x)$ が定数関数のときには定理は明らかであるから，$f(x)$ は非定数関数であるとする．$f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続な関数であるから，**1.10 B. 最大値・最小値定理** により

$$M = \max_{a \le x \le b} f(x) = f(x_0) \quad (\exists x_0 \in [a,\ b]), \qquad m = \min_{a \le x \le b} f(x) = f(x_1) \quad (\exists x_1 \in [a,\ b])$$

が成り立つ．$f(x)$ は非定数関数であるから，$x_0 \ne x_1$ である．このとき，定積分の性質から

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\ ,\quad \text{すなわち}$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$



が成り立つ．**1.10 B. 中間値の定理** により，

$x_0 < x_1$ のとき ある $c \in [x_0,\ x_1]$ に対して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

($x_1 < x_0$ のときには $\exists c \in [x_1,\ x_0]$)

が成り立つ．　　//

さて，連続関数から定積分で得られる量，すなわち，連続関数の定積分の値はその原始関数を使って計算されることを教えるつぎの定理を微分積分学の基本定理と言っている．

微分積分学の基本定理　$f(x)$ は $[a, b]$ で連続とし，$G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．このとき

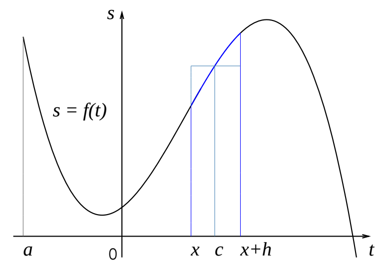
$$\int_a^b f(x)dx \ = \ G(b) - G(a) \qquad \left(\Big[G(x)\Big]_a^b \quad \text{と書く．}\right)$$

微分積分学の基本定理は，つぎ定理から証明される：この定理は，さらに，連続関数の原始関数の存在をも教えているので，上の定理に加えて二つの定理を指して，微分積分学の基本定理ということもある．

定理　$f(x)$ $(a \le x \le b)$ を連続関数とする．そのとき

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (a \le x \le b).$$

$\boxed{\text{証明}}$ $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ を考える．(この関数 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ を関数 $f(x)$ の不定積分という．) 積分の平均値定理により



$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)\ dt$$
$$= \int_x^{x+h} f(t)\ dt \ = \ hf(c)$$
$$(x < c < x+h \text{ または } x+h < c < x)\ .$$

$$\therefore \quad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c) \qquad (x < c < x+h \quad \text{または} \quad x+h < c < x)\ .$$

$f(x)$ の連続性により $h \longrightarrow 0$ のとき $c \longrightarrow x$ であるから,

$$F'(x) \ = \ \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{c\to x} f(c) \ = \ f(x)\ . \qquad //$$

$\boxed{\text{微分積分学の基本定理の証明}}$ 定理により，関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であるから,

$$F(x) = G(x) + C \quad (C \text{ はある定数})$$

と表される．さて， $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ であるから,

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ F(b) - F(a) \ = \ G(b) - G(a) \ = \ \Big[G(x)\Big]_a^b . \qquad //$$

$\boxed{\text{例}}$ 微分積分学の基本定理を使って，定積分の値を求めよう．

$$\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}\ , \qquad \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{0}{3} = \frac{2}{3}\ .$$

$\boxed{1}$ つぎの定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 (x + x^{-1})^2\ dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(\sin x - \cos x\big)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int_2^3 x^{-1}\ dx$ (4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}\ dx$

$\boxed{2}$ つぎの定積分の値を求めよ $(m,\, n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sin m\pi x\ \sin n\pi x\ dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \cos m\pi x\ \cos n\pi x\ dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\ \sin nx\ dx$ (4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\ \cos nx\ dx$ (5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \cos nx\ dx$

$\boxed{3}$ 区分求積法を使って，つぎの極限値を定積分で表しその値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

$\boxed{4}$ 関数 $y=|e^x-e|\ (x\in\mathbf{R})$ のグラフを描き， 定積分 $\displaystyle\int_0^2|e^x-e|dx$ を計算せよ．

C.

$\boxed{例}$ 関数 $f(x)$ は連続で 関数 $\phi(t)$ が微分可能のとき，$\displaystyle\frac{d}{dx}\Big(\int_a^{\phi(x)}f(t)\ dt\Big)=f(\phi(x))\phi'(x)$ ．

何故ならば， $F(x)=\displaystyle\int f(t)\ dt$ とすると，

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_a^{\phi(x)}f(t)\ dt\Big)=\frac{d}{dx}F(\phi(x))=F'(\phi(x))\phi'(x)=f(\phi(x))\phi'(x)\ . \qquad //$$

$\boxed{1}$ 連続関数 $f(x)$ に対して， $\displaystyle\int_a^{3x-1}f(t)\ dt$ および $\displaystyle\int_{2x}^{x^2}f(t)\ dt$ の導関数を求めよ．

$\boxed{2}$ 0 を含む開区間で定義された連続関数 $f(x)$ に対して，関数 $F(x)$ を

$$F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$$

と定義する．$F'(x)$ 及び $F''(x)$ を求めよ．

3.8 定積分の計算

B. 置換積分法

関数 $f(x)$ は $[a,b]$ で連続とする．関数 $x=g(t)$ は C^1 級で合成関数で $f(g(t))$ が存在するとき，

$$a=g(\alpha),\quad b=g(\beta)\quad \text{ならば}\qquad \int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt\,.$$

$\boxed{証明}$ 置換積分により，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\ g'(t)\,dt$， $x=g(t)$ が成り立つ．これは，

$$F(x)=\int f(x)\,dx \quad \text{に対して} \qquad F(g(t))=\int f(g(t))g'(t)\,dt$$

が成り立つことを意味している．故に，微分積分学の基本定理から

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt\ . \qquad //$$

基本例　(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\ dx$ を求めよう．置換積分法を使う．

$x=\sin\theta$　とおくと，　$dx=\cos\theta$.　$\theta: 0 \to \dfrac{\pi}{6}$　の時　$x: 0 \to \dfrac{1}{2}$　と変化するから，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int_1^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\ \cos\theta\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\ d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\ d\theta = \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\ .\end{aligned}$$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\ dx$ を求めよう．置換積分法を使う．

$t=\sqrt{1-x}$　とおくと，$x=1-t^2$　より　$dx=-2t\ dt$.　$x: 0 \to 1$　の時　$t: 1 \to 0$　と変化するから

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1-x}\ dx &= \int_1^0 (1-t^2)t(-2t\ dt) = \int_0^1 2(t^2-t^4)\ dt \\ &= 2\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{1}$　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$　を求めよ．

$\boxed{2}$　関数　$f(x)$　は閉区間　$[0,\ 1]$　で連続とする．このとき $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$.

$\boxed{解}$　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$　に対して，置換積分　$x=\dfrac{\pi}{2}-t$,　$dx=-dt$　を施すと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx \ = \ -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2}-t\Big)\Big)\,dt \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx\ . \quad //$$

$\boxed{3}$　関数　$f(x)$　は閉区間　$[0,\ 1]$　で連続とする．

(1)　$\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$　を示せ．

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$　を示せ．

B．部分積分法　関数　$f(x)$,　$g(x)$　は閉区間 $[a,\ b\ ]$ で C^1 級とすると，

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \\ &= f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

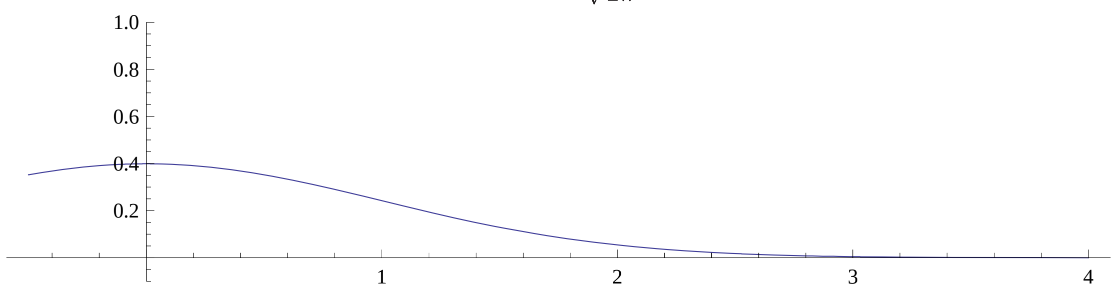
基本例　部分積分を使う．(1)　$a,b\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N}$ のとき

$$\int_a^b (x-a)(x-b)^n\,dx=\left[(x-a)\frac{(x-b)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b-\int_a^b\frac{(x-b)^{n+1}}{n+1}\,dx=-\left[\frac{(x-b)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]_a^b=\frac{(a-b)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_1^e \log x\,dx &= \int_1^e (x)'\log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e x(\log x)'\,dx\\ &= e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx=e-\int_1^e 1\,dx=e-\Big[\ x\ \Big]_1^e=1\,.\end{aligned}$$

C.　$\boxed{4}$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$



$\mu\in\mathbf{R}$, $\sigma>0$ と $k>0$ に対して，つぎのことを示せ：

(1)
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mu}^{\mu+k\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\ .$$

(2)
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k}^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\ .$$

(3)
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (x-\mu)^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{-2k\,e^{-\frac{k^2}{2}}+\int_{-k}^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right\}\ .$$

3.9　有理関数, 無理関数, 三角関数の定積分

C.

例.　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$　（**3.8 定積分の計算　B.** $\boxed{2}$）について

3.3　部分積分　C. $\boxed{\textbf{例}}$ で見たように

$$\int\sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$$

であるから,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\Big[-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx\ .$$

ここで，　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$　に注意すると

$n = 2m$ のとき，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx &= \frac{2m-1}{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-4} x\,dx \\
&\ \vdots \\
&= \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$　に注意すると

$n = 2m+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx &= \frac{2m}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-3} x\,dx \\
&\ \vdots \\
&= \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3} \\
&= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{1}$　つぎの定積分の値を求めよ．　(1)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

(2)　$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx\ \ (1<a<b)$　(3)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$　(4)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan x\,dx$

(5)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$　(6)　$\displaystyle\int_a^b \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx\ \ (1<a<b)$　(7)　$\displaystyle\int_0^a \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx\ \ (a>0)$

(8)　$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,dx$　(9)　$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{(2+\cos x)^2}\,dx$

$\boxed{2}$　つぎの定積分の値を求めよ．　(1)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$　(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^4+4}$

$\boxed{3}$　$R>0$ のとき $a\in\mathbf{R}$ 対して，定積分 $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+R^2}}\,dx = \begin{cases} 2R - \dfrac{2R^3}{3\,a^2} & (R \le a) \\ \dfrac{4a}{3} & (0 \le a < R) \end{cases}$

を示せ．

3.10 広義積分

B. 広義積分

連続関数 $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ が与えられたとき，つぎのような積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

を考えることができるだろうか．積分区間が無限に実数全体に広がっているので，通常の有限区間の上での定積分と同じようには取り扱えない．このような場合には，有限閉区間の上での

定積分 $\displaystyle\int_{-L}^{M} f(x)\,dx \quad (-\infty < L < M < \infty)$

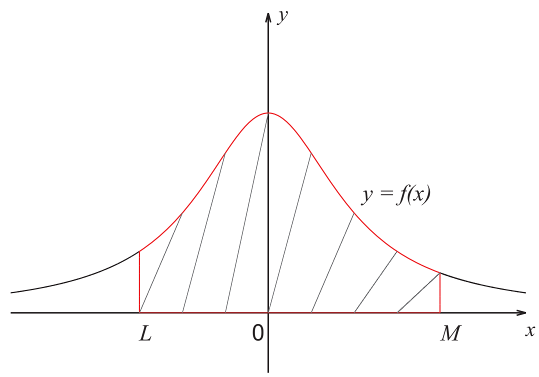
を考えて，その極限値

$$\lim_{L\to-\infty,\, M\to\infty} \int_{L}^{M} f(x)\,dx$$

の存在を調べてみる．極限値

$$\lim_{L\to-\infty,\, M\to\infty} \int_{L}^{M} f(x)\,dx$$

が存在するとき，



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{L\to-\infty,\, M\to\infty} \int_{L}^{M} f(x)\,dx \quad \text{と定義する．}$$

例えば，$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ に対して

$$\begin{aligned}\lim_{L\to-\infty,\, M\to\infty} \int_{L}^{M} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{L\to-\infty,\, M\to\infty} \Big[\tan^{-1} x\Big]_{L}^{M} \\ &= \lim_{M\to\infty} \tan^{-1} M - \lim_{L\to-\infty} \tan^{-1} L = \frac{\pi}{2} - \big(-\frac{\pi}{2}\big) = \pi.\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{L\to-\infty,\, M\to\infty} \Big[\tan^{-1} x\Big]_{L}^{M} = \pi$$

が成り立ちこの広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ は収束するといわれる．

同様な考え方で,（無限区間における）広義積分（無限積分）が定義される：

連続関数 $f(x)$ $(a \le x < \infty)$ が与えられたとき

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_{a}^{M} f(x)\,dx\ ,$$

連続関数 $f(x)$ $(-\infty \leq x < b)$ が与えられたとき

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{L\to-\infty} \int_{L}^{b} f(x)\,dx\,.$$

半開区間 $(0, 1]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が $x = 0$ で無限大になるときに，積分

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

を考えることができるだろうか．関数 $f(x)$ は $x = 0$ で無限大になるので，通常の閉区間の上での定積分ようには定義できない．このような場合には，閉区間の上での定積分

$$\int_\epsilon^1 f(x)\,dx \qquad (0 < \epsilon < 1)$$

を考えて，その極限値

$$\lim_{\epsilon\to+0} \int_\epsilon^1 f(x)\,dx$$

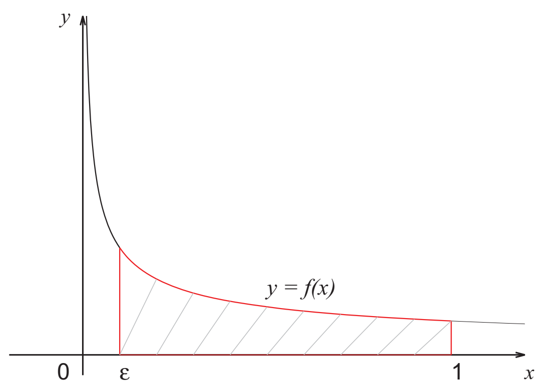
の存在を調べてみる．極限値

$$\lim_{\epsilon\to+0} \int_\epsilon^1 f(x)\,dx$$

が存在するとき，

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to+0} \int_\epsilon^1 f(x)\,dx$$

と定義する．



例えば，$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(0 < x < 1)$ に対して

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_\epsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\epsilon}$$

であるから，

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\big(2 - 2\sqrt{\epsilon}\big) = 2$$

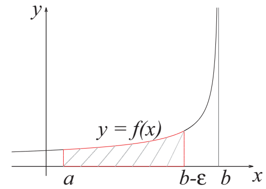
が成り立ちこの広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ は収束するといわれる．

同様な考え方で，（無限大に発散する点を含む区間における）広義積分（異常積分）が定義される：

$x = a$ で無限大になる連続関数 $f(x)$ $(a < x \leq b)$ が与えられたとき

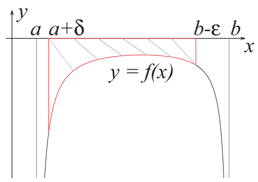
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to+0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx\ .$$

$x = b$ で無限大になる連続関数 $f(x)$ $(a \leq x < b)$ が与えられたとき



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx\ .$$

$x = a$ および $x = b$ で無限大になる連続関数 $f(x)$ $(a < x < b)$ が与えられたとき



正の数 δ および ϵ を 0 へ近づける場合の極限値によって定義する：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta,\epsilon \to +0} \int_{a+\delta}^{b-\epsilon} f(x)\,dx\ .$$

例　広義積分の値を求めよ．

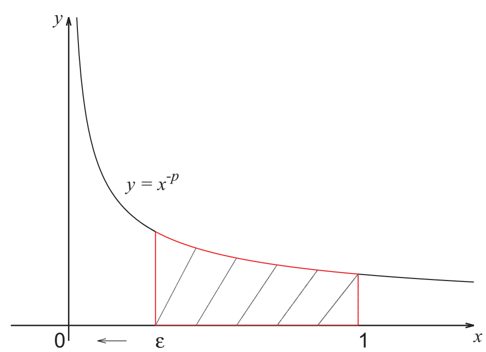
(1)　$p > 1$ のとき，$\displaystyle\int_1^\infty x^{-p}dx$ は無限区間上の積分である．

$M > 1$ と置くと $\displaystyle\int_1^M \frac{1}{x^p}dx = \int_1^M x^{-p}\,dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^M = \frac{M^{1-p}-1}{1-p}$ であるから，

$\displaystyle\lim_{M\to\infty} M^{1-p} = 0$ より $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{M\to\infty}\frac{M^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$

となりこの無限積分 $\displaystyle\int_1^\infty x^{-p}dx$ は収束する．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ $(p > 0)$



$p \neq 1$ の場合，$\epsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p}dx = \int_\epsilon^1 x^{-p}dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\epsilon^1 = \frac{1-\epsilon^{1-p}}{1-p}$$

であるから，

$$\text{異常積分}\quad \int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1-\epsilon^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{収束}\ (0 < p < 1) \\ \infty & \text{発散}\ (p > 1). \end{cases}$$

$p = 1$ の場合，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1 x^{-1}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\Big[\log x\Big]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to+0}\{-\log\epsilon\} = \infty$ 発散．

$\boxed{1}$　$a \in \mathbf{R}$ とする．つぎの無限積分の収束を調べ，収束するときはその値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_a^\infty xe^{-x^2}\,dx$　　　(2)　$\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{4+x^2}$.

基本例

つぎの広義積分の収束を調べ，収束するときはその値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ は無限区間上の積分である．

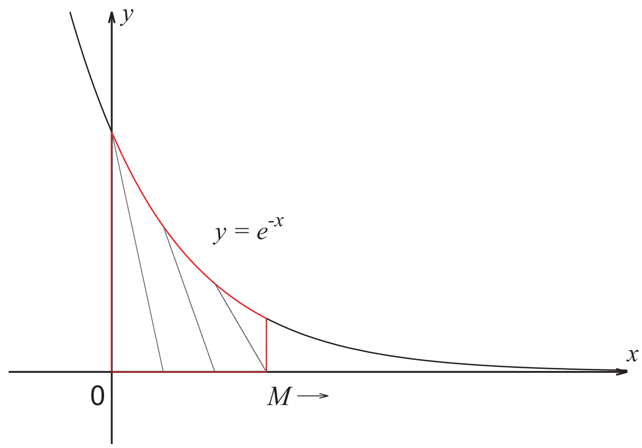
$M>0$ と置くと

$$\int_0^M e^{-x}\,dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^M=1-e^{-M}$$

であるから，

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=\lim_{M\to\infty}\Big(1-e^{-M}\Big)=1$$

となりこの無限積分は収束する．



(2) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{-p}dx\quad(p>0)$

$p\neq 1$ の場合， $\epsilon\in(0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x)^{-p}\,dx &= \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^{1-\epsilon}(1-x)^{-p}\,dx=\lim_{\epsilon\to+0}\Big[-\frac{(1-x)^{1-p}}{1-p}\Big]_0^{1-\epsilon}\\ &= \frac{1}{1-p}\lim_{\epsilon\to+0}\Big\{1-\epsilon^{1-p}\Big\}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p} & (p<1)\\ \infty\ (\text{発散}) & (p>1)\,.\end{cases}\end{aligned}$$

$p=1$ の場合，

$$\int_0^1 (1-x)^{-1}\,dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^{1-\epsilon}-\log(1-x)\,dx=\lim_{\epsilon\to+0}\Big\{-\log\epsilon+\log 1\Big\}=\infty\ (\text{発散}).$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ を調べよう． $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$ であるから異常積分である．

$$\int_\epsilon^1 \log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_\epsilon^1-\int_\epsilon^1 x\frac{1}{x}\,dx=-\epsilon\log\epsilon-1=-1\qquad(0<\epsilon<1)\,.$$

ロピタルの定理を使って $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ が成り立つことがわかるから，

$$\int_0^1 \log x\,dx=\lim_{\epsilon\to+0}\int_\epsilon^1 \log x dx=-1\,.$$

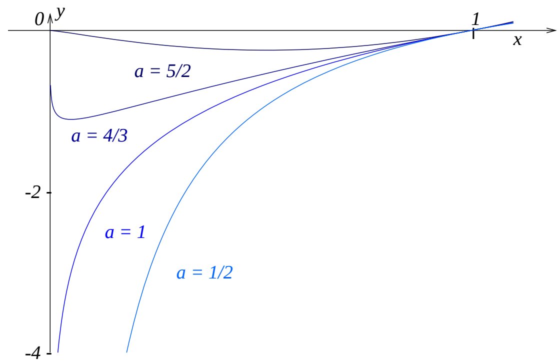
$\boxed{2}$ 広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ (Hint: $x=\dfrac{1}{t}$.)

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}(a+x)}dx\quad(a>0)$ (Hint: $x=at^2$.)

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}\log x\,dx \quad (a>0)$

$y = x^{a-1}\log x$



$\boxed{3}$ 区分求積法を応用して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = -1$ を示せ.

C. 巧妙な計算

$\boxed{1}$ 広義積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-kx}\cos\omega x\,dx \quad (k>0, \omega>0)$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ を認めて，つぎの広義積分 の値を求めよ： (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$.

(2) $\sigma>0$ に対して $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\,e^{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \ (\sigma>0)$. (参考. **2.13 C.** $\boxed{\mathbf{3}}$)

D. 広義積分の収束の判定 不等式 $e^{-x^2} \le xe^{-x^2}$ $(x \ge 1)$ が成立つことは明らかであるし，$\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$ が収束することも容易にわかる (参考. **B.** $\boxed{\mathbf{1}}$ **(1)**). $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ の計算は難しいが，この無限積分が収束することはつぎの定理からわかる.

$\boxed{\text{定理}}$ 連続関数 $f(x)$ $(a \le x < \infty)$ の広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束するとしよう.

(1) 連続関数 $g(x)$ $(a \le x < \infty)$ に対して $0 \le g(x) \le f(x)$ $(a \le x < \infty)$ が成り立てば，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ は収束する.

(2) 連続関数 $g(x)$ $(a \le x < \infty)$ に対して $0 \le |g(x)| \le f(x)$ $(a \le x < \infty)$ が成り立てば，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ も収束する.

$\boxed{\text{証明}}$ (1) $\displaystyle M = \int_a^\infty f(x)\,dx < \infty$ とおく. $0 \le g(x) \le f(x)$ $(a \le x < \infty)$ が成り立っているから，任意の $b \ge a$ に対して

$$0 \leq \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

が成り立つ．$b(\geq a)$ の関数 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ は変数 b に関して上に有界な単調増加関数であるから，

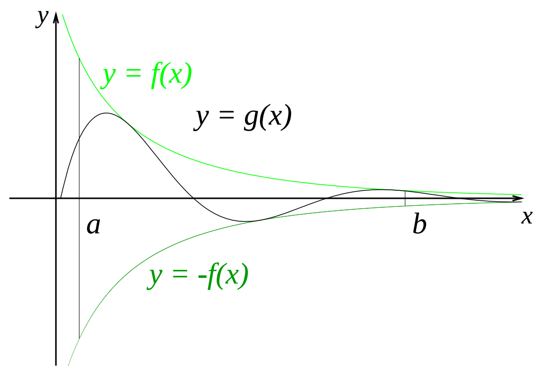
$$\left(\int_a^\infty g(x)\,dx =\right) \lim_{b\to\infty}\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

が成り立つ (参考．**3.5 C** $\boxed{\mathbf{5}}$).

(2) 関数 $g_+(x),\ g_-(x)$ を次のように定義する：

$$g_+(x) = \begin{cases} g(x) & (g(x) \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (g(x) < 0 \text{ のとき}) \end{cases},$$

$$g_-(x) = \begin{cases} 0 & (g(x) \geq 0 \text{ のとき}) \\ -g(x) & (g(x) < 0 \text{ のとき}) \end{cases}.$$



このとき， $g_+(x),\ g_-(x)$ は $[a,\infty)$ 上の続関数 (確かめよ) で

$$g(x) = g_+(x) - g_-(x), \qquad \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g_+(x)\,dx - \int_a^b g_-(x)\,dx\ (b > a)$$

が成り立つ． $0 \leq g_+(x),\ g_-(x) \leq |g(x)| \leq f(x)\ (a \leq x < \infty)$ が成り立つから，上の (1) より

$$\int_a^\infty g_+(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b g_+(x)\,dx, \qquad \int_a^\infty g_-(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b g_-(x)\,dx$$

(広義積分の収束) が成り立つ．このことから，広義積分

$$\begin{aligned}\int_a^\infty g(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \Big\{g_+(x) - g_-(x)\Big\}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b g_+(x)\,dx - \lim_{b\to\infty}\int_a^b g_-(x)\,dx = \int_a^\infty g_+(x)\,dx - \int_a^\infty g_-(x)\,dx\end{aligned}$$

の収束することがわかる． //

$\boxed{3}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} < e^{-x}$ $(x \geq 0)$ を示し， 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ の収束を示せ.

$\boxed{4}$ 連続関数 $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ の $(-\infty,\ \infty)$ 上の広義積分が収束するとき，関数 $\dfrac{f(\log x)}{x}$ $(0 < x < \infty)$ の $(0,\ \infty)$ 上の広義積分も収束する.

$\boxed{5}$ 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x^2}\,dx$ の収束を示せ.

3.11　面積と体積と長さ

ここでは図形の長さと面積と体積を取り扱うのであるが，長さや面積や体積の定義について我々は何を知っているだろうか．Euclid 以来の幾何学で取り扱われたように，(直) 線分の長さや線分で囲まれた平面図形 (例えば長方形) の面積や平面で囲まれた領域 (例えば直方体) の体積の (定義と) 計算法は知っている．一般の図形の長さや面積や体積を取り扱うということは，それらの定義を知るとともにどんな図形に‘ 長さがあり ‘’ 面積があり ’または‘ 体積がある ’のかを知ることである．我々は長さのある (平面) 図形のすべて，面積のある (平面) 図形のすべておよび体積のある (空間) 図形のすべてを考慮しなければならない．
しかしながら，ここでは，一変数関数 f に関連付けられる図形で，長さのあるものや面積のあるものまたは体積のあるものを取り扱うことしかできない．

B．面積と体積

3.6 定積分 で述べたリーマン和を通しての定積分の定義から

$\boxed{\text{定理　面積}}$　連続関数 $y=f(x)\geq 0$ $(a\leq x\leq b)$ のグラフと x 軸と二直線 $x=a,\ x=b$ によって囲まれた図形

$$A_f \ = \ \left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leq y\leq f(x),\ a\leq x\leq b\right\}$$

の面積　$S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

$\boxed{\text{例}}$　アステロイド $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ($a>0$) の囲む面積を求めよう (参照 **2.6　C** $\boxed{\mathbf{8}}$).

アステロイド (Asteroid) のパラメータ表示は　$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \qquad (0\leq t<2\pi)\ . \end{cases}$

アステロイドの対称性より面積は

$$S=4\int_0^a y\,dx=4\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dx\,.$$

$x=a\sin^3 t$ として置換積分することによって

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\,(3a\sin^2 t\cos t)\,dt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\ \cos^4 t\,dt \\ &= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2t}{4}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \qquad\qquad (\text{三角関数の二倍角公式から}) \\ &= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 2t+\sin^2 2t\cos 2t\right)dt=\frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1-\cos 4t}{2}+\frac{1}{6}\left(\sin^3 2t\right)'\right\}dt \\ &= \frac{3}{2}a^2\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}+\frac{1}{6}\sin^3 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{8}\pi a^2\ . \qquad // \end{aligned}$$

つぎに，連続関数 $y=f(x)$ $(a\leq x\leq b)$ のグラフを x 軸の周りに 1 回転してできる回転体

$$B_f \ = \ \left\{(x,y,z)\ \middle|\ 0\leq y^2+z^2\leq f(x)^2,\ a\leq x\leq b\right\}$$

の体積を考える (より一般な領域の体積については，第５章　重積分で扱う).

$\boxed{\text{定理}}$　連続関数 $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ のグラフを x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積　$V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx$.

$\boxed{\text{説明}}$　$a \leq s \leq b$ のとき，回転体 $B_f(s) = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; a \leq x \leq s,\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\right\}$ の体積を $V(s)$ とすると $V(a) = 0,\ V(b) = V$ である．連続関数 $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ に対して，閉区間 $[s,\, s+\delta]$ $(a \leq s < s+\delta \leq b)$ での最大値と最小値を考える:

$$\begin{cases} \text{最大値} \quad M = \displaystyle\max_{s \leq t \leq s+\delta} |f(t)| = |f(t_1)| \qquad (s \leq \exists t_1 \leq s+\delta) \\ \text{最小値} \quad m = \displaystyle\min_{s \leq t \leq s+\delta} |f(t)| = |f(t_0)| \qquad (s \leq \exists t_0 \leq s+\delta). \end{cases}$$

$B_f(s+\delta) \setminus B_f(s)$ は半径 $m = |f(t_0)|$ の円筒を含み 半径 $M = |f(t_1)|$ の円筒に含まれるので

$$\pi m^2 \delta \leq V(s+\delta) - V(s) \leq \pi M^2 \delta.$$

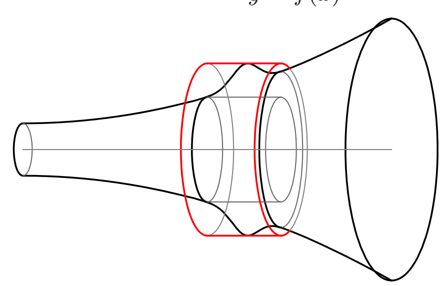
したがって，　$\pi |f(t_0)|^2 \leq \dfrac{V(s+\delta) - V(s)}{\delta} \leq \pi |f(t_1)|^2$

が成り立つ．$\delta \longrightarrow 0$ のとき　$t_0, t_1 \longrightarrow s$ であるから，関数 $f(x)$ の連続性より

$$\delta \longrightarrow 0 \text{ のとき} \quad |f(t_0)|^2,\ |f(t_1)|^2 \longrightarrow f(s)^2$$

となるので

$$V'(s) = \lim_{\delta \to 0} \frac{V(s+\delta) - V(s)}{\delta} = \pi f(s)^2$$



x 軸の周りの回転体

が成り立つ．$V(s)$ $(a \leq s \leq b)$ が微分可能関数であることから

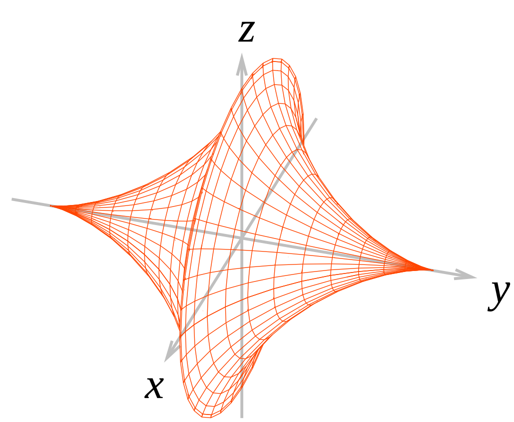
$$V = V(b) = \int_a^b V'(x)\,dx = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \ . \qquad //$$

$\boxed{1}$

(1)　楕円　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　の面積を求めよ.

(2)　楕円　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　を x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積を求めよ.

(3)　Asteroid　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$　の y 軸の周りの回転体の体積を求めよ.



カバリエリ（Cavalieri）の原理

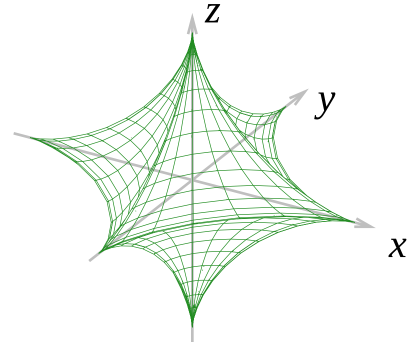
Cavalieri (1598-1647) は‘ カバリエリの原理 ’として知られている‘ 体積を知るための方法 ’を述べている：『平面 π_0 上に置かれた高さの等しい二つの立体 K および L を考える． π_0 と平行などの平面 π に対しても，平面 π と立体が交わってできる切断面のそれぞれの面積が常に等しいならば，立体 K および L の体積は等しい.』

この‘ カバリエリの原理 ’によれば，右図の立体

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}} \right\}$$

の体積を見つけることができる $(a > 0)$．今，アステロイド $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}$ の z 軸の周りの回転体

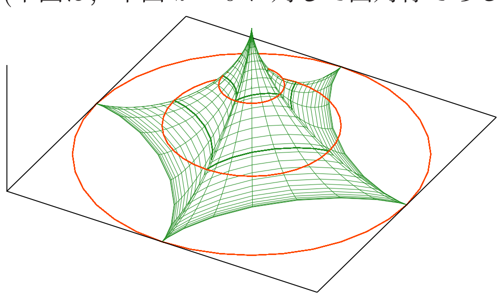
$$L = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}} \right\}$$

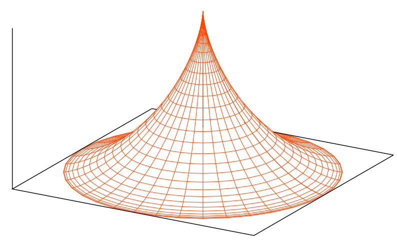


を考える．つぎに,

空間 $\mathbf{R}^3$ 内の xy 平面と平行な平面 $z = h$ による断面 (これらの立体との交わり) を調べよう.

(下図は，平面 $z = 0$ に対して面対称である立体 K と回転体 L の上半分の図である．)





立体 K の高さ $h\,(\in [-a, a])$ の断面 $K_h = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}} \right\}$ は

$$\text{アステロイド} \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \;\leq\; a^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}} = \left(\left(a^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

で，その面積は，先の例より， $\dfrac{3}{8}\pi\left(\left(a^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \dfrac{3}{8}\pi\left(a^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{2}{3}}\right)^3$ である.

一方，回転体 L の高さ $h\,(\in [-a, a])$ の断面 $L_h = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq \left(a^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}}\right)^3 \right\}$ は円であり，その面積は $\pi\left(a^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{2}{3}}\right)^3$ である.

二つの立体 K と L について， $z\,(\in [-a, a])$ を固定したときの K の断面と L の断面の面積の比が一定 $\dfrac{3}{8} : 1$ であるから，カバリエリの原理の応用により二つの立体 K と L の体積の比も $\dfrac{3}{8} : 1$ であることがわかる． $\boxed{1}$ (3) よりアステロイド $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}$ の z 軸の周りの回転体 L の体積は $\dfrac{32}{105}\pi a^3$ であるから， K の体積は $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{32}{105}\pi a^3 = \dfrac{4}{35}\pi a^3$ である． //

B. 曲線の長さ

二点 P, Q を結ぶ線分線分 Γ のパラメータ表示を $x = pt + q,\ y = rt + s\ (a \leq t \leq b)$ とすると，この二点 $\mathrm{P} = (pa + q,\, ra + s)$, $\mathrm{Q} = (pb + q,\, rb + s)$ を結ぶ線分 Γ の長さは

$$L = (b - a)\sqrt{p^2 + r^2} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

と線分 Γ のパラメータ表示に付随する積分で表される．このことは一般に成り立つ．

$\boxed{\text{定理　パラメータ表示された曲線の長さ}}$ 曲線 C が C^1 級関数 $\varphi(t),\ \psi(t)\ (a \leq t \leq b)$ によって $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (a \leq t \leq b)$ とパラメータ表示されているとき，曲線 C の長さは

$$L = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt\ .$$

特に，連続関数 $y = f(x)\ (a \leq x \leq b)$ のグラフ $\Gamma_f = \left\{(x, f(x)) \,\middle|\, a \leq x \leq b\right\}$ について

$\boxed{\text{定理}}$ C^1 級関数 $y = f(x)\ (a \leq x \leq b)$ のグラフの長さ $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

$\boxed{2}$ つぎの曲線の長さを求めよ，ただし $a > 0$ とする．

(1) 曲線 $y = x\sqrt{x}\ \ (0 \leq x \leq a)$

(2) 曲線 $y = x^2\ \ (0 \leq x \leq a)$.

(3) 曲線 $y = e^x\ \ (0 \leq x \leq a)$

(4) 懸垂線 $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\ \ (0 \leq x \leq b)$.

特に，極座標表示された曲線の長さについて

$\boxed{\text{命題}}$ 曲線 C が C^1 級関数 $f(\theta) \geq 0\ (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ によって $r = f(\theta)\ (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ と極座標表示されているとき，曲線 C の長さ $L = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$.

$\boxed{3}$ つぎの曲線の長さを求めよ．

(1) アルキメデスの螺旋 $r = a\theta\ \ (0 \leq \theta \leq a)$.

(2) カージオイド $r = a(1 + \cos\theta)\ \ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

(3) サイクロイド $x = t - \sin t,\ \ y = 1 - \cos t\ \ (0 \leq t \leq a\ (\leq 2\pi))$.

$\boxed{4}$ アステロイド $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) の長さを求めよ．

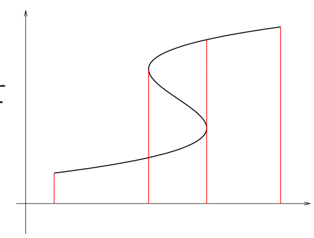
$\boxed{\text{解}}$ アステロイド (Asteroid) のパラメータ表示は $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}\quad (0 \leq t < 2\pi)$.

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(-3a\cos^2 t\ \sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\ \cos t\right)^2} = 3a|\sin t\cos t|$$

である．アステロイドの対称性により，長さは

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\ dt = 12a\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a\ .$$

C. 巧妙な計算



定理　パラメータ表示された曲線で囲まれた領域の面積

自己交差しない曲線 γ が C^1 級関数 $\varphi(t),\ \psi(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$ によって

$$\gamma \quad : \quad x = \varphi(t)\ , \qquad y = \psi(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

とパラメータ表示されているとする．

曲線 γ の始点を $(a,\,c) = (\varphi(\alpha),\,\psi(\alpha))$，終点を $(b,\,d) = (\varphi(\beta),\,\psi(\beta))\quad(a < b)$　とする．
曲線 γ，x 軸と二直線 $x = a,\ x = b$ が領域 K を囲んでいるとき，K の面積 S はつぎのように計算される：

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

$\big($ 何故かというと，$\varphi'(t) > 0\ (\alpha \le t \le \beta)$ の場合を考えてみると，逆関数定理により関数 $x = \varphi(t)$ の逆関数 $t = \varphi^{-1}(x)$ が存在するので，曲線 γ 上の点 $(x,y) = (\varphi(t),\psi(t))$ の y 座標成分は $y = \psi(t) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ と表される．故に

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_a^b \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\,dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

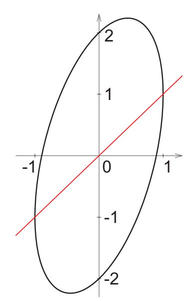
が成り立つ．区間 $[\alpha,\beta]$ を $\varphi'(t) \ne 0$ の小区間にわけて考えることによって，一般の場合も成り立つことが証明される．$\big)$

特に，曲線 γ が単純閉曲線のとき，曲線 γ で囲まれた領域の面積 S は

$$S = \pm\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt\,,$$

ただし符号は，閉曲線 γ のパラメーター t が α から β へ増加する場合に γ の向きが時計回りのとき正，反時計まわりのとき負とする．

例　楕円 $5x^2 - 2xy + y^2 = 4$ [1] で囲まれた部分の面積を求めよ．



この楕円上の点 (x,y) は方程式 $\dfrac{5x^2}{4} - \dfrac{xy}{2} + \dfrac{y^2}{4} = x^2 + \dfrac{(y-x)^2}{4} = 1$ を満たしているから，

$$\begin{cases} x = x(t) = \cos t \\ y = y(t) = 2\sin t + \cos t \qquad (-\pi \le t < \pi) \end{cases}$$

はこの楕円のパラメータ表示である．

[1] $5x^2 - 2xy + y^2 = (3-\sqrt{5})\Big(\dfrac{x}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} + \dfrac{(2+\sqrt{5})y}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\Big)^2 + (3+\sqrt{5})\Big(\dfrac{(2+\sqrt{5})x}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} - \dfrac{y}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\Big)^2 = 4$ は楕円の方程式である．

4点 $(-1,-1) = (x(-\pi), y(-\pi))$, $(0,-2) = \left(x\left(-\frac{\pi}{2}\right), y\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $(1,1) = (x(0), y(0))$ および $(0,2) = \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ はこの楕円上にある．故に楕円の面積 S はつぎのように計算される：

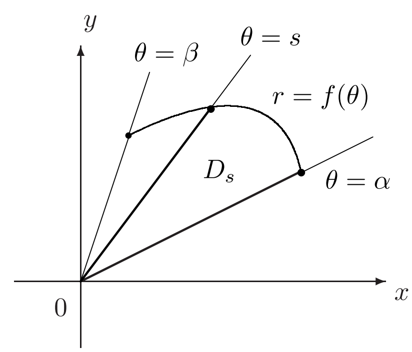
$$\begin{aligned} S &= -\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin t + \cos t)\frac{dx}{dt}\,dt = -\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin t+\cos t)(-\sin t)\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(4\sin^2 t + 2\cos t \sin t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left\{(1-\cos 2t) + \frac{\sin 2t}{2}\right\}dt \\ &= \left[t - \frac{\sin 2t}{2} - \frac{\cos 2t}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

注意.　この楕円は原点に関して点対称で直線 $y=x$ によって等しい面積に二分されるから，楕円の面積は $S = 2\int_{-1}^{1} y\,dx = 2\int_{-1}^{1}\left\{x + 2\sqrt{1-x^2}\right\}dx$ としても計算できる．

$\boxed{5}$　面積を求めよ．

(1)　サイクロイド $x = t - \sin t,\ \ y = 1-\cos t\ \ (0 \le t \le 2\pi))$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2)　カージオイド $r = a(1+\cos\theta)\ \ (0\le\theta\le 2\pi)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．



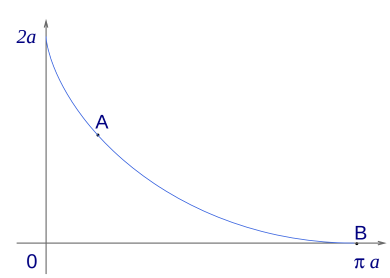
注.　連続関数 $r=f(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$ によって極表示された曲線および極表示された半直線 $\theta=\alpha$ と $\theta=s$ $(\alpha\le s\le\beta)$ によって囲まれた領域 D_s の面積を $A(s)$ とする．このとき

$$\frac{d}{ds}A(s) = \frac{f(s)^2}{2}, \qquad A(\beta) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\,d\theta$$

が成り立つている．このことを示せ．

$\boxed{6}$　Cardioid $r=a(1+\cos\theta)$ $(-\pi\le\theta\le\pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．

$\boxed{7}$　サイクロイドの坂



$$x(\theta) = a(\theta - \sin\theta),\ \ y(\theta) = a(1+\cos\theta)\quad (0\le\theta\le\pi)$$

がある．この坂の途中の点 $\mathrm{A}(x(\theta_0), y(\theta_0))$ から坂の下の点 $\mathrm{B}(\pi a, 0)$ まで，物体が自然に滑り落ちるとき (摩擦は無視して) の経過時間を求めよ．($0<\theta_0<\pi,\ a>0$ とする．)

D. $\boxed{\textbf{定理　パラメータ表示された曲線の長さ}}$ **の説明**

曲線 C が C^1 級関数 $\varphi(t),\ \psi(t)\ (a \le t \le b)$ によって　$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (a \le t \le b)$ とパラメータ表示されているとする．閉区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に分割する：

$$\Delta\ :\ a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b\ .$$

曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_i = (\varphi(a_i),\ \psi(a_i))\ (i = 0, 1, \cdots, n)$ を結んで折れ線 $P_\Delta\ :\ \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\cdots\mathrm{P}_n$ とその長さ L_Δ を考える．折れ線 P_Δ のパラメータ表示は $[a, b] = \displaystyle\bigcup_{i=1,\cdots,n} [a_{i-1},\, a_i]$ で

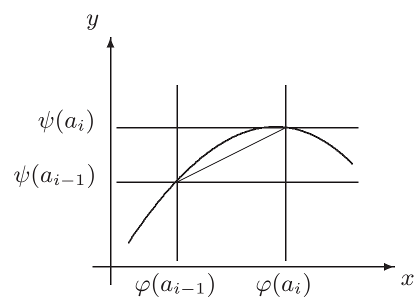
$$\begin{cases} x = \varphi(a_{i-1}) + \dfrac{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}(t - a_{i-1}) \\ \\ y = \psi(a_{i-1}) + \dfrac{\psi(a_i) - \psi(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}(t - a_{i-1}) \end{cases} \qquad (a_{i-1} \le t \le a_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

であるから，

$$L_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})^2 + (\psi(a_i) - \psi(a_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt\,.$$

平均値の定理により，$a_{i-1} < s_i, t_i < a_i,\ (i = 1, \cdots, n)$ を

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \equiv \dfrac{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = \varphi'(s_i) \\ \dfrac{dy}{dt} \equiv \dfrac{\psi(a_i) - \psi(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = \psi'(t_i) \end{cases}$$



が成り立つようにとることができる．このとき

$$L_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \sqrt{\varphi'(s_i)^2 + \psi'(t_i)^2}\, dt\,.$$

L_Δ と $L \equiv \displaystyle\int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$ との関係を調べてみよう．

$$\begin{aligned} L_\Delta - L &= \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \sqrt{\varphi'(s_i)^2 + \psi'(t_i)^2}\, dt - \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left\{\sqrt{\varphi'(s_i)^2 + \psi'(t_i)^2} - \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\right\} dt \end{aligned}$$

であるが，どんな実数 a, a', b, b' に対しても

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a'^2 + b'^2}\right| \le \sqrt{\left|a' - a\right|^2 + \left|b' - b\right|^2}$$

が成り立つことに注意すると，

$$0 \le \left|L_\Delta - L\right| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \sqrt{\left(\varphi'(s_i) - \varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t_i) - \psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

さて，閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 φ' は $[a, b]$ 上で一様連続であるから，

任意の正の数 ϵ に対して，正の数 δ を，どの $s,\, t \in [a,b]$ に対しても

$$|s-t| \ < \ \delta \quad \Longrightarrow \quad |\varphi'(s)-\varphi'(t)| \ < \ \epsilon$$

が成り立つように選ぶことができる．ψ' も $[a,b]$ 上で一様連続であるから，

この正の数 ϵ に対して，正の数 δ' を，どの $s,\, t \in [a,b]$ に対しても

$$|s-t| \ < \ \delta \quad \Longrightarrow \quad |\psi'(s)-\psi'(t)| \ < \ \epsilon$$

が成り立つように選ぶことができる．正の数 δ と δ' の小さい方を改めて δ と置きなおすと

$$|s-t| \ < \ \delta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |\varphi'(s)-\varphi'(t)| \ < \ \epsilon \\ \\ |\psi'(s)-\psi'(t)| \ < \ \epsilon \end{cases}$$

が成り立つ．分割 Δ の小区間の最大の幅 $|\Delta| = \max\limits_{1\le i\le n}(a_i - a_{i-1})$ を 0 に近づけるとき，

$$|\Delta| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |\varphi'(s_i)-\varphi'(t)| \ < \ \epsilon \\ \\ |\psi'(t_i)-\psi'(t)| \ < \ \epsilon \end{cases} \qquad (a_{i-1} \le t \le a_i, \quad i = 1, \cdots, n)$$

となる．これは

$$0 \le \bigl|L_\Delta - L\bigr| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \sqrt{\epsilon^2+\epsilon^2}\, dt \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}(a_i - a_{i-1})\,\epsilon = \sqrt{2}(b-a)\,\epsilon$$

を意味しているから，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} L_\Delta = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\, dt$$

が示された．こうして，曲線 C を近似する折れ線の長さの極限値 $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} L_\Delta$ が $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\, dt$

であることがわかったので，この極限値を曲線 C の長さとするのである．　//

注．　上の説明を通して，C^1 級関数によるパラメータ表示を持つ曲線 C は長さを持つことがわかった．その長さを表す数学的表現は，曲線 C 上の有限個の点を結んだ折れ線 P_Δ の長さ

$$L_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

が区間 $[a,b]$ の分割 Δ の小区間の最大の幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけると

$$L_\Delta = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \quad \longrightarrow \quad \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\, dt = L$$

となることから得られたのである．どのような曲線が長さを持つのかという問題は，(例えば，区間 $[a,b]$ でパラメータ表示された) どんな曲線に対して，積分

$$\left(\int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2} \quad = \quad \right) \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

が計算されるのかという問題であると考えることができる．

3.12 Gamma 関数と Beta 関数

D. Gamma 関数と Beta 関数

Γ 関数は指数関数的減衰を表す関数 e^{-t} $(t>0)$ と多項式的成長を表す関数 t^{x-1} $(t>0)$ の積 $e^{-t}t^{x-1}$ $(t>0)$ の $(0,\infty)$ 上の無限積分によって定義されている．Γ 関数は自然数 n に対応する階乗 $(n-1)!$ を正の実数全体に拡張する関数であり，整数の話題から生物の成長と減衰の話題等を含む広範な分野の数学に現れてくる．

$\boxed{1}$ Gamma 関数 $\Gamma(x)$ は次のように定義される：

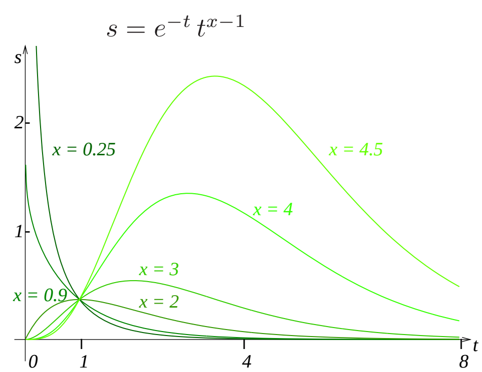
$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x>0).$$

この広義積分が収束することを示そう．被積分関数 $f(t)=e^{-t}t^{x-1}$ は， $x\geq 1$ のとき 0 を含む区間 $[0,\infty)$ で連続になるが， $0<x<1$ のときには $x=0$ で ∞ に発散している．

$\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ と $\displaystyle\int_0^{1} e^{-t}t^{x-1}dt$ $(x>0)$ にわけて調べる．

$t\geq 1$ のとき．

自然数 n を $n>x+1$ となるようにとると， $e^t>\dfrac{t^n}{n!}>0$ であるから



$$\begin{aligned} e^{-t}t^{x-1} &= \frac{t^{x-1}}{e^t} \\ &\leq \frac{t^{x-1}}{\frac{t^n}{n!}}=\frac{n!\,t^{x-1}}{t^n}\leq\frac{n!}{t^2} \quad (t\geq 1). \end{aligned}$$

このことから，

$$\int_1^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\leq n!\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}\,dt=n!<\infty.$$

$0<t\leq 1$ のとき．

$e^{-t}t^{x-1}\leq t^{x-1}$ であるから，

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt\leq\int_0^1 t^{x-1}\,dt=\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{t^x}{x}\right]_{\epsilon}^{1}=\frac{1}{x}<\infty.$$

以上のことから， $x>0$ に対して

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt=\int_0^{1} e^{-t}t^{x-1}dt+\int_1^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt<\infty$$

が成り立ち，広義積分 $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ $(x>0)$ の収束が示された． //

$\Gamma(x)$ に対して，以下のことが成り立つ：

1. $$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^x dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t}t^x dt=\lim_{n\to\infty}\Big\{\Big[-e^{-t}t^x\Big]_0^n+x\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt\Big\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\Big(1-e^{-n}n^x\Big)+x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=x\Gamma(x)\ .$$

2. $$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t}dt=\lim_{n\to\infty}\Big[-e^{-t}\Big]_0^n=1.$$

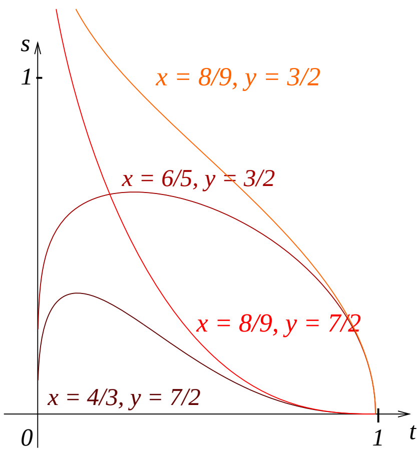
3. 上の 1. と 2. から， $\Gamma(n)=(n-1)!\qquad(n=1,2,\cdots).$

$\boxed{2}$ Beta 関数 $B(x,y)$ は次のように定義される ：

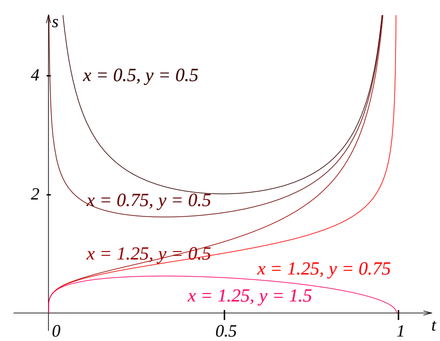
$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\quad(x,\ y>0).$$

この広義積分が収束することを示そう．

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\quad と\quad \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\quad(x,\ y>0)$$ にわけて調べる．



左と下のグラフは $s=t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}$



$0<t\le\dfrac{1}{2}$ のとき： $(1-t)^{y-1}$ は $\big[0,\dfrac{1}{2}\big]$ で連続であるから，ある正の数 M が存在して

$$0<(1-t)^{y-1}\le M\quad\big(0<t\le\frac{1}{2}\big)$$

が成り立つ．

$$\therefore\qquad\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\le M\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,dt=M\lim_{\epsilon\to0}\Big[\frac{t^x}{x}\Big]_\epsilon^{\frac{1}{2}}=\frac{M}{x2^x}<\infty.$$

$\dfrac{1}{2}\le t\le 1$ のとき： t^{x-1} は $\big[\dfrac{1}{2},1\big]$ で連続関数であるから，ある正の数 M' が存在して

$$0<t^{x-1}\le M'\quad\big(\frac{1}{2}\le t\le 1\big)$$

が成り立つ．

$$\therefore\qquad\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\le M'\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{y-1}\,dt=M'\lim_{\eta\to1}\Big[\frac{-(1-t)^y}{y}\Big]_{\frac{1}{2}}^{\eta}=\frac{M'}{y\,2^y}<\infty.$$

以上のことから，

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt < \infty \quad (x,\ y > 0)$$

が成り立ち，広義積分 $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad (x,\ y>0)$ の収束が示された．

$B(x,\ y)\ (x>0,\ y>0)$ に対して，以下のことが成り立つ：

1. 置換積分 $t = 1-s,\quad dt = -ds$ を考えると，

$$\begin{aligned} B(x,\ y) &= \lim_{\delta,\,\epsilon\to+0}\int_\delta^{1-\epsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \lim_{\delta,\,\epsilon\to+0}\int_{1-\delta}^{\epsilon}(1-s)^{x-1}s^{y-1}(-1)\,ds \\ &= \lim_{\delta,\,\epsilon\to+0}\int_\delta^{1-\epsilon} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,dt = B(y,\ x). \end{aligned}$$

2. $x>0,\ y>1$ の場合

$$\begin{aligned} B(x,\ y) &= \lim_{\delta,\,\epsilon\to+0}\int_\delta^{1-\epsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= \lim_{\delta,\,\epsilon\to+0}\left[\frac{t^x}{x}(1-t)^{y-1}\right]_\delta^{1-\epsilon} - \int_\delta^{1-\epsilon}\frac{t^x}{x}(1-y)(1-t)^{y-2}dt \\ &= \lim_{\delta,\,\epsilon\to+0}\frac{y-1}{x}\int_\delta^{1-\epsilon} t^x(1-t)^{y-2}dt = \frac{y-1}{x}B(x+1,\ y-1). \end{aligned}$$

3. $B(m,\ 1) = \displaystyle\int_0^1 t^{m-1}\,dt = \frac{1}{m} = B(1,\ m) \qquad (m = 1,2,\cdots)$.

4. 上の 2. と 3. から， $B(m,\ n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \qquad (m,\ n = 1,2,\cdots)$.

5. $x>0,\ y>1$ の場合

$$\begin{aligned} B(x,\ y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-2}dt - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-2}dt \\ &= B(x,y-1) - B(x+1,y-1) = B(x,y-1) - \frac{x}{y-1}B(x,y), \end{aligned}$$

すなわち $B(x,y) = \dfrac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$.

6. 置換積分 $t = \cos^2\theta,\quad dt = -2\cos\theta\sin\theta d\theta$ を考えると，$B(x,\ y) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta.$

7. $B\Big(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\Big) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$ であるから，上の 5. と 6. から，再び

$$\frac{1}{2}B\Big(\frac{1}{2},\ \frac{n+1}{2}\Big) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3} & (n:\text{奇数}). \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $s>0$ に対し，つぎの関係式を示せ： $\dfrac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx = \frac{1}{n^s}$.

3.13 定積分と不等式

A. シュワルツ (Schwarz) の不等式

有界閉区間 $[a,\, b]$ で連続な関数 $f(x),\, g(x)$ に対して，つぎの不等式を示せ:

$$\int_a^b \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx \le \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\boxed{1}$ $n \ge 2$ のとき， $\sqrt{1-x} < \sqrt{1-x^n} < 1 - \dfrac{x^n}{2}$ $(0 < x < 1)$ を示し，その後

$\dfrac{2}{3} < \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^n}\,dx \le \dfrac{2n+1}{2n+2}$ を示せ． さらに， $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^n}\,dx \le \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ を示せ.

$\boxed{2}$ $n \ge 2$ のとき， $0.5 < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < 0.524$ を示せ.

$\boxed{3}$ $\dfrac{1}{n^2} \le \displaystyle\int_{n-1}^n \dfrac{dx}{x^2} \le \dfrac{1}{(n-1)^2}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ を示し，その後 $1 < \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < 2$ を示せ.

($s > 1$ のとき， $1 < \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} < \dfrac{s}{s-1}$ が成り立つ．)

B. 定積分の評価と無限級数

$\boxed{4}$ $a > 0$ とする．関数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}(a+x)}$ $(x > 0)$ が単調減少関数であることを示し，

不等式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}(a+n)} < \pi$ を示せ．(Hint. **3.10 広義積分 B. 基本例** $\boxed{\mathbf{2}}$ (3))

$\boxed{5}$ $a,\ b > 0$ とする．不等式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a+bn^2} < \dfrac{\pi}{2\sqrt{ab}}$ を示せ.

$\boxed{6}$ $f(x),\, g(x)$ $(a \le x \le b)$ を連続関数とする． $p,\, q > 1,$ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき，つぎの不等式が成り立つ:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\ dx \ \le\ \left(\int_a^b |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\ dx\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad \text{(Hölder の不等式)}$$

C. 定積分と数列の極限値

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} \right\} \qquad \text{ワリス (Wallis) の公式}$$

また $\sqrt{\pi} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$ が成り立つ.

$\boxed{\text{証明}}$ $0 \leq x \leq 1$ のとき $0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x \leq 1$ であるから，

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．**3.9 無理関数，有理関数，三角関数の定積分 C.** $\boxed{\textbf{例}}$ で見たように，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3} & (n:\text{奇数}). \end{cases}$$

であるから

$$\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3} \;\leq\; \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \;\leq\; \frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}$$

が成り立つ．これから

$$\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}$$

が成り立つとともに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1} = 1$ であるから，はさみうちの原理によって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{2n}{2n-1}\frac{2n-2}{2n-3}\cdots\frac{2}{1} = \frac{\bigl(2n\cdot(2n-2)\cdot4\cdot2\bigr)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{より} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}. \qquad //$$

$\boxed{1}$ **3.3 部分積分 C.** $\boxed{\textbf{3}}$ **(5)** を使って，つぎの等式を示せ:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

（この極限値は $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ に等しいことが，**3.15 関数列と積分 D.** $\boxed{\textbf{1}}$ からわかる.）

$\boxed{2}$ 有界閉区間 $[a,\,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，つぎの等式が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b \bigl|f(x)\bigr|^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{a\leq x\leq b}\ \bigl|f(x)\bigr|.$$

D. 関数の定積分と不等式

級数の和の４乗　(非負) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，つぎの不等式が成り立つ:

$$\Big(\sum_{n\ge1} a_n\Big)^4 \ \le\ \pi^2\Big(\sum_{n\ge1} a_n^2\Big)\Big(\sum_{n\ge1} n^2 a_n^2\Big).$$

$\boxed{\text{証明}}$　$\alpha = \sum_{n\ge1} a_n^2$,　$\beta = \sum_{n\ge1} n^2 a_n^2$ と置くとき，Cauchy-Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n\ge1} a_n\Big)^2 &= \Big(\sum_{n\ge1} a_n\big(x+yn^2\big)^{\frac12}\cdot\big(x+yn^2\big)^{-\frac12}\Big)^2 \le \Big(\sum_{n\ge1} a_n^2\big(x+yn^2\big)\Big)\Big(\sum_{n\ge1}\big(x+yn^2\big)^{-1}\Big)\\ &= \big(x\alpha+y\beta\big)\sum_{n\ge1}\big(x+yn^2\big)^{-1} \qquad (\forall x,\ y>0).\end{aligned}$$

先に掲げた問題 **B.** $\boxed{5}$ により，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+yn^2} < \frac{\pi}{2\sqrt{xy}}$ $(x,\ y>0)$ が成り立つから，

$$\Big(\sum_{n\ge1} a_n\Big)^2 \le \frac{\pi}{2}\Big(\alpha\sqrt{\frac{x}{y}}+\beta\sqrt{\frac{y}{x}}\Big) \qquad (\forall x,\ y>0)\ .$$

故に

$$\Big(\sum_{n\ge1} a_n\Big)^2 \le \frac{\pi}{2}\Big(\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\Big) = \pi\sqrt{\alpha\beta} = \pi\Big(\sum_{n\ge1} a_n^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{n\ge1} n^2 a_n^2\Big)^{\frac12}\ . \qquad //$$

$\boxed{\text{例}}$　$0<a<b<\pi$ のとき，閉区間 $[a,\,b]$ 上の C^1 級の関数 $f(x)$ はつぎの不等式を満たす:

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \ \le\ \Big[\frac{-f(x)^2\cos x}{\sin x}\Big]_a^b + \int_a^b f'(x)^2\,dx.$$

$\boxed{\text{証明}}$　関数 $y(x)=\sqrt{\sin x}$ は微分方程式 $\big(yy'\big)' = -\dfrac{y^2}{2}$ を満たし，$yy' = \dfrac{\cos x}{2}$ ．故に

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)^2 y(x)^2\,dx &= \int_a^b f(x)^2\Big\{-2y(x)y'(x)\Big\}'\,dx\\ &= \Big[f(x)^2\Big\{-2y(x)y'(x)\Big\}\Big]_a^b + 4\int_a^b f(x)f'(x)y(x)y'(x)\,dx\\ &= \Big[-f(x)^2\cos x\Big]_a^b + 4\int_a^b f(x)f'(x)y(x)y'(x)\,dx\\ &= \Big[-f(x)^2\cos x\Big]_a^b + \int_a^b\Big[\Big\{f(x)y'(x)+f'(x)y(x)\Big\}^2 - \Big\{f(x)y'(x)-f'(x)y(x)\Big\}^2\Big]\,dx\\ &\le \Big[-f(x)^2\cos x\Big]_a^b + \int_a^b\Big\{f(x)y'(x)+f'(x)y(x)\Big\}^2\,dx\\ &= \Big[-f(x)^2\cos x\Big]_a^b + \int_a^b\big\{f(x)y(x)\big\}'^{\,2}\,dx.\end{aligned}$$

今，閉区間 $[a,\, b]$ 上の C^1 級関数 $g(x) = \dfrac{f(x)}{y(x)}$ $(a \le x \le b)$ に上の不等式を使うと，

$$\int_a^b f(x)^2\,dx = \int_a^b g(x)^2 y(x)^2\,dx \le \Big[-g(x)^2 \cos x\Big]_a^b + \int_a^b \big\{g(x)y(x)\big\}'^{\,2}\,dx = \left[\frac{-f(x)^2\cos x}{\sin x}\right]_a^b + \int_a^b f'(x)^2\,dx. \quad //$$

$\boxed{1}$　有界閉区間 $[a,\, b](\subset [0,\, \pi])$ で C^1 級の関数 $f(x)$ が $f(a) = f(b) = 0$ を満たすとき，

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \;\le\; \Big(\frac{b-a}{\pi}\Big)^2 \int_a^b f'(x)^2\,dx \qquad \text{(Wirtinger の不等式)}.$$

Hint.　関数 $f(t)$ が $[0,\, \pi]$ で C^1 級で $f(0) = f(\pi) = 0$ のとき，つぎの不等式を示せ：

$$\int_0^\pi f(t)^2\,dt \;\le\; \int_0^\pi f'(t)^2\,dt.$$

それから，$x = a + \dfrac{b-a}{\pi}\,t$ $(0 \le t \le \pi)$ の下で置換積分を行う．

$\boxed{2}$　有界閉区間 $[a,\, b]$ で C^1 級の関数 $f(x)$ が $f(a) = f(b) = 0$ を満たしているとする．
このとき，つぎの不等式が成り立つ:

$$\max_{a \le x \le b} \big|f'(x)\big| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Hint.　$M = \max\limits_{a \le x \le b} \big|f'(x)\big|$ と置くと，つぎの不等式が成り立つ:

$$\big|f(x)\big| \le M(x-a) \quad \text{かつ} \quad \big|f(x)\big| \le M(b-x) \qquad (a \le x \le b).$$

$\boxed{3}$　関数 $\varphi(x)$ $(0 \le x \le 1)$ が C^1 級で単調増加であるとき，つぎの不等式が成り立つ:

$$\int_0^1 x^\alpha \varphi(x)\,dx \ge \frac{1}{\alpha+1} \int_0^1 \varphi(x)\,dx \qquad (\alpha > 0).$$

注意.　関数 $\varphi(x)$ が単調増加連続関数であれば，この不等式が成り立つことが知られている．

$\boxed{4}$　関数 $\phi(x)$ $(a \le x \le b)$ を非負値連続関数とする．

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(x) = 0 \quad (a \le \forall\, x \le b)\ ,$$

すなわち，定積分 $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\,dx = 0$ ならば 閉区間 $[a, b]$ で関数 $\phi(x) \equiv 0$ である．

3.14 台形近似

C. 巧妙な計算 ここでは，定積分の値を数値的に近似値として求めることについて述べる．

$\boxed{\text{補題}}$ 関数 $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ は二回微分可能とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3 \qquad (a < \exists\xi < b)$$

が成り立つ．

証明． 関数 $\phi(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)dx - \frac{f(a)+f(t)}{2}(t-a) - K(t-a)^3 \qquad (a \leq t \leq b)$

における定数 K を $\phi(b) = 0$ となるように定める．このとき，

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= f(t) - \frac{1}{2}f'(t)(t-a) - \frac{1}{2}(f(a)+f(t)) - 3K(t-a)^2 \\
&= -\frac{1}{2}(f(a)-f(t)) - \frac{1}{2}f'(t)(t-a) - 3K(t-a)^2, \\
\phi''(t) &= \frac{1}{2}f'(t) - \frac{1}{2}f'(t) - \frac{1}{2}f''(t)(t-a) - 6K(t-a) = -\frac{1}{2}f''(t)(t-a) - 6K(t-a).
\end{aligned}$$

明らかに， $\phi(a) = \phi'(a) = 0$ であるから， Taylor の定理により，

$$\phi(b) = \phi(a) + \phi'(a)(b-a) + \phi''(\xi)(b-a)^2 = \phi''(\xi)(b-a)^2 \qquad (a < \exists\xi < b).$$

$\phi(b) = 0$ であるから, $\phi''(\xi) = 0$ でなければならない．従って,

$$\phi''(\xi) = -\frac{1}{2}f''(\xi)(\xi-a) - 6K(\xi-a) = 0 \text{ となり } K = \frac{1}{12}f''(\xi).$$

$$\phi(b) = \int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3 = 0.$$

すなわち，

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3 \qquad (a < \exists\xi < b). \qquad //$$

$\boxed{\text{台形公式}}$ 関数 $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ は二回微分可能で $|f''(x)| \leq M$ $(< \infty)$ とする．閉区間 $[a,b]$ を n 等分する分点を $a = a_0, a_1, \cdots, a_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}, \cdots, a_{n-1}, a_n = b$ とし，

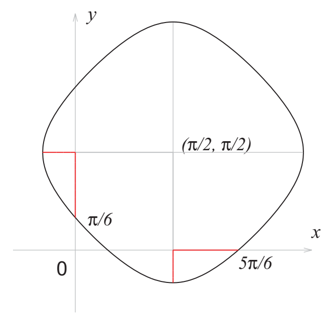
$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{(b-a)}{2n}\{f(a) + 2(f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1})) + f(b)\} \\
&= \frac{(b-a)}{2n}\sum_{k=1}^{n}\{f(a_{k-1}) + f(a_k)\}
\end{aligned}$$

と置くと，

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T_n\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

証明.　上の補題から,

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)dx - T_n\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - \frac{(b-a)}{2n}\sum_{k=1}^{n}\big\{f(a_{k-1})+f(a_k)\big\}\Big| \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - \frac{(a_k-a_{k-1})}{2}\big\{f(a_{k-1})+f(a_k)\big\}\Big| \\ &\le n\frac{M}{12}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^3 = \frac{M(b-a)^3}{12n^2}. \qquad //\end{aligned}$$



$\boxed{1}$　$\sin x + \sin y = \dfrac{1}{2}$　$(-\dfrac{\pi}{6} \le x,\, y \le \dfrac{7\pi}{6})$　で与えられる平面曲線の囲む面積を求めよう.

2.1　C. **問** の解を参照すると，この平面曲線は，二つの関数

$$y = \sin^{-1}\Big(\frac{1}{2} - \sin x\Big) \quad と \quad y = \pi - \sin^{-1}\Big(\frac{1}{2} - \sin x\Big) \qquad (-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6})$$

のグラフで表される（滑らかな）閉曲線で，明らかに 直線 $y = x$ に関して対称である．さらに,

$$\sin x = \sin(\pi - x) \quad と \quad \sin y = \sin(\pi - y) \qquad (-\frac{\pi}{6} \le x, y \le \frac{7\pi}{6})$$

から，この曲線が 直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{2}$ に関しても対称であることがわかるので,

$$\begin{aligned}\text{面積 } S &= 4\Big\{\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 - \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin^{-1}\Big(\frac{1}{2} - \sin x\Big)\,dx\Big\} \\ &= \pi^2 - 4\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin^{-1}\Big(\frac{1}{2} - \sin x\Big)\,dx\ .\end{aligned}$$

そこで $\displaystyle\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin^{-1}\Big(\frac{1}{2} - \sin x\Big)\,dx$ の値を台形近似で求めて，面積を求めよ.

$\boxed{2}$　定積分の値 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ の近似値を 10 等分による台形公式によって求め，誤差を調べて近似の精度を確かめよ.

$\boxed{3}$　定積分の値 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \log 2$ の近似値を 10 等分による台形公式によって求め，誤差を調べて近似の精度を確かめよ.

3.15　関数列と積分

D. 一様収束の概念

区間 I で定義された連続関数の列 $f_n(x)$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を考える．この関数列が極限関数 $f(x)$ を持つものとする，すなわち

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x\in I)$$

が成り立っているとする． どんな条件があれば $\lim$ と $\displaystyle\int$ の順序交換

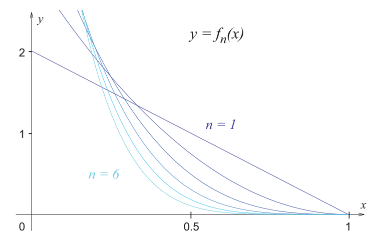
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;\left(\;=\;\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right)$$

が成り立つだろうか.

例えば，閉区間 $[0,\ 1]$ で定義された連続関数の列 $f_n(x)=(n+1)(1-x)^n$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ の極限 (関数) は実数を値にとる関数ではない：

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}\infty & (x=0)\\ 0 & (0<x\le 1)\end{cases},$$

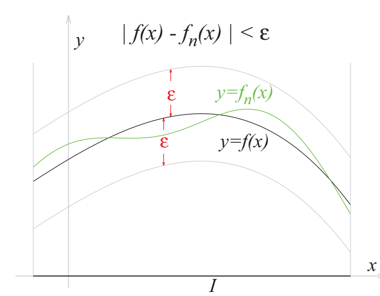
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\Big[-(1-x)^{n+1}\Big]_0^1=1 \quad .$$



一様収束の定義

区間 I で定義された関数列 $f_n(x)$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ と $f(x)$ に対して，次の $(*)$ が成り立つとき，関数列 $\{f_n(x)\}_n$ は関数 $f(x)$ へ (区間 I で) 一様収束するといわれる：

$(*)$ （ 任意の正の数 ϵ に対して，ある番号 n_0 が存在して，
$n\ge n_0 \implies$ I のどの x に対しても $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon.$



定理 1　閉区間 $I=[a,\ b]$ で定義された連続関数列 $\{f_n(x)\}_n$ が関数 $f(x)$ へ（I で）一様収束しているとき，

(1)　$f(x)$ は I で連続である，　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$　.

証明　(1)　任意の正の数 ϵ に対し，関数列 $\{f_n(x)\}_n$ の一様収束条件 $(*)$ を満たす番号 n_0 をとると，関数 $f_{n_0}(x)$ の連続性からつぎのことが成り立つ：

$(*)$ （ ある正の数 δ が存在して，定義域 I のどの x に対しても
$|x-x_0|<\delta \implies |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\epsilon.$

故に，　$|x - x_0| < \delta$　ならば

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon \ .$$

これは，$f(x)$ の $x_0 \in I$ での連続性を意味している．

(2)　任意の正の数 ϵ に対して，一様収束の条件 (*) を満たす番号 n_0 をとると，

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \Big|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \epsilon(b-a) \ .$$

これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ を意味している．　//

上で述べたような関数列の一様収束と積分を概念的に明瞭に取り扱うために，数学は連続関数を要素とする集合を関数の空間としてとらえ，そこで関数たちの様々な関係を考えるようになった．閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ のすべての集合を $C(\mathrm{I})$ または $C[a, b]$ と表すことにする．そのとき

$C(I)$ に属する関数 $f(x)$，すなわち，$I = [a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ は閉区間 $I = [a, b]$ で最大絶対値をとる (**1.10 B. 最大値・最小値定理**) ので

$$||f||_I \ = \ \max_{x\in I} |f(x)|$$

と定義することができる．$||f||_I$ を関数 f の I でのノルムと呼ぶ．

関数 $f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ で連続ではないが有界である場合には,

$$||f||_I \ = \ \sup_{x\in I} |f(x)|$$

と定義する；関数 $f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ で連続の場合には，これらが等しく

$$\sup_{x\in I} |f(x)| \ = \ \max_{x\in I} |f(x)| = \ ||f||_I.$$

一致してしていることが最大値・最小値定理からわかる．

さて，閉区間 I で定義された連続関数の列 $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ と $f(x)$ に対して，関数列 $\big\{f_n(x)\big\}_n$ が関数 $f(x)$ へ (区間 I で) 一様収束する場合を考える．この場合には，**定理 1** により極限関数 $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in C(I)$ となるから閉区間で定義された連続関数の最大値・最小値定理により $\displaystyle\max_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n)|$ を満たす $x_n (\in I)$ が存在する　$(n = 1,\ 2,\ \cdots)$.

明らかに，つぎのことが成り立つ：

$$\text{閉区間 } I \text{ のどの } x \text{ に対しても } |f_n(x) - f(x)| \ < \ \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \max_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| \ < \ \epsilon$$
$$\Longleftrightarrow \quad ||f_n - f||_I \ < \ \epsilon.$$

このことから，つぎのことがわかる:

$$(*)\quad \left(\begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある番号 } n_0 \text{ が存在して，} \\ \qquad n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad I \text{ のどの } x \text{ に対しても } |f_n(x) - f(x)| \ < \ \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つとは

$$(\sharp)\quad \left(\begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある番号 } n_0 \text{ が存在して，} \\ \qquad n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad ||f_n - f||_I \ < \ \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つことである．このことから

連続関数列 $\{f_n(x)\}_n$ が関数 $f(x)$ へ (区間 I で) 一様収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_I = 0$$

が成り立つことであるとわかる．閉区間 I 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}_n$ が関数 $f(x)$ へ (区間 I で) 一様収束するための必要十分条件がノルム $||\cdot||_I$ を使って言い表された．

$\boxed{\text{命題}}$ 閉区間 $I = [a,\ b]$ で定義された連続関数 $f(x),\ g(x)$ に対して

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \ \leq \ \int_a^b ||f - g||_I\, dx \ = \ (b-a)\, ||f-g||_I \ .$$

$\boxed{\text{証明}}$ どの $x \in I$ に対しても

$$|f(x) - g(x)| \ \leq \ \max_{x\in I} |f(x) - g(x)| \ = \ ||f-g||_I$$

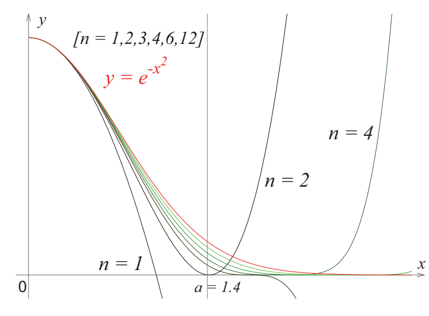
が成り立っているから，定積分の性質から明らかである． //

$\boxed{1}$ 連続関数列

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \ (n = 1, 2, \cdots)$$

は任意の有界閉区間 $[-a,\ a]$ 上で e^{-x^2} に一様収束していることを示せ．

右図は関数 $f_n(x)$ と e^{-x^2} のグラフ．



$\boxed{2}$ 閉区間 $[0,\ 1]$ 上の連続関数列

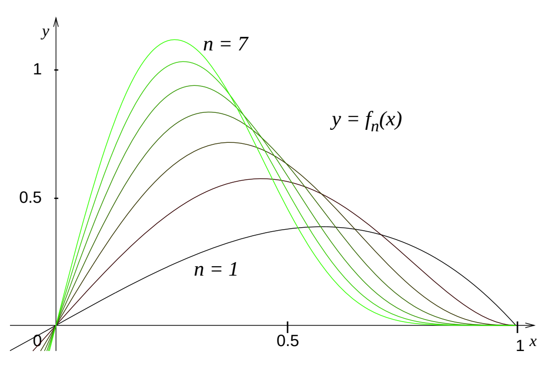
$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n \ (n = 1, 2, \cdots)$$

に対して，つぎのことを示せ:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ (0 \leq x \leq 1)$.

Hint. **1.2 収束数列 C** $\boxed{6}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2}$.



3.16　応用　テイラー展開とべき級数

C. $\boxed{\text{例}}$ $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ の Taylor 展開

$$\begin{cases} \log\dfrac{1+x}{1-x} = 2\Big(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\Big)+R_{2n} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}+R_{2n} \\ |R_{2n}| \le \dfrac{2|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)} \qquad (-1<x<1) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ．　このとき $x=\dfrac{1}{3}$ に対して $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$ であるから

$$\begin{cases} \log 2 = 2\Big(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{3^5}\Big)+R_6 \\ |R_6| \le \dfrac{2}{7\cdot 3^7}\cdot\dfrac{9}{8} = \dfrac{1}{2^2\cdot 3^5\cdot 7} = \dfrac{1}{11621} < 10^{-4} \qquad (-1<x<1) \end{cases}$$

が成り立ち，これから

$$2\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}\Big) = 0.6930\cdots < \log 2 < 0.6931$$

が成り立っていることがわかる．

証明．

関数 $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$　$(-1<x<1)$　を考える；奇関数であるから $x\ge 0$ のときを考える．

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} = 2\Big(1+x^2+\cdots+x^{2n-2}\Big)+\frac{2x^{2n}}{1-x^2}$$

が成りっているから，

$$\begin{cases} \log\dfrac{1+x}{1-x} = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = 2\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x t^{2k}\,dt + 2\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt = 2\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}+R_{2n} \\ R_{2n} = 2\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^{2n}}{1-t^2}dt \end{cases}$$

が成り立つ．さらに

$$(0\le)\ R_{2n} \le 2\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt \le \frac{1}{1-x^2}\int_0^x 2t^{2n}\,dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1-x^2} \quad (0\le x<1). \qquad //$$

$\boxed{1}$ $\tan^{-1}x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+\dfrac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+\cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$　$(|x|<1)$

を示せ．

$\boxed{2}$ 関係式

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239} \qquad \text{(Machin の公式)}$$

を示し，$\tan^{-1}x$ $(-1<x<1)$ の Taylor 展開を使って円周率 π の近似値を求めよ．

$\boxed{\textbf{Taylor 展開の積分型の剰余項}}$ $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で C^n 級とする．このとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt = f(a)+\Big[-(x-t)f'(t)\Big]_a^x+\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt \\ &= f(a)+f'(a)(x-a)+\Big[-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)\Big]_a^x+\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}f^{(3)}(t)\,dt=\cdots \end{aligned}$$

であるから，帰納的に

$$\begin{cases} f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k+R_n=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n \\ R_n=\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt \qquad \cdots\ \text{剰余項} \end{cases}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{例}}$ n 階導関数 $\dfrac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ であるから $(n=1,2,\cdots)$，

$$\begin{cases} (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n(x) \\ R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1}(1+t)^{\alpha-n}\,dt \end{cases}$$

が成り立つ．ここで

$$\int_0^x (x-t)^{n-1}(1+t)^{\alpha-n}\,dt=\int_0^x\Big(\frac{x-t}{1+t}\Big)^{n-1}(1+t)^{\alpha-1}\,dt$$

となるが

$$\begin{cases} 0\le \dfrac{x-t}{1+t}=x-\dfrac{t(1+x)}{1+t}\le x \qquad (0\le t\le x<1) \\ 0> \dfrac{x-t}{1+t}=x-\dfrac{t(1+x)}{1+t}> x \qquad (0>t>x>-1) \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \Big|\int_0^x (x-t)^{n-1}(1+t)^{\alpha-n}\,dt\Big| &\le \Big|\int_0^x\Big(\frac{x-t}{1+t}\Big)^{n-1}(1+t)^{\alpha-1}\,dt\Big|\le\Big|\int_0^x x^{n-1}(1+t)^{\alpha-1}\,dt\Big| \\ &\le |x|^{n-1}\Big|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,dt\Big| \qquad (0\le|x|<1) \end{aligned}$$

が成り立つ．定数 $A=\Big|\displaystyle\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,dt\Big|>0$ と置くと

$$\big|R_n(x)\big|\ \le\ A\,\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\,|x|^{n-1}\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ（**1.2 収束数列 C.** $\boxed{7}$）から，

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \lim_{n\to\infty}\Big\{1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)x^{n-1}}{(n-1)!}\Big\} \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} \qquad (-1<x<1) \end{aligned}$$

が成り立つ．

定理　べき級数の一様収束　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $R(>0)$ とする．　$R > r > 0$ のとき，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は閉区間 $[-r,\ r]$ 上で一様収束する．すなわち，関数列 $\displaystyle\Big\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\Big\}_{n=0}^{\infty}$ は閉区間 $[-r,\ r]$ で極限関数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ へ一様収束する．

証明　極限関数を $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-R < x < R)$ と表す．

1.11　関数の極限　C. **補題 べき級数の収束半径の存在** から，$|x| \le r$ のとき

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\Big| \le \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \big|a_k x^k\big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\ r^k \quad \longrightarrow \quad 0 \ \ (n \to \infty).$$

これは，関数列 $\Big\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\Big\}_{n=0}^{\infty}$ が $[-r,\ r]$ 上で関数 $f(x)$ へ一様収束することを意味している．　//

定理　べき級数の不定積分　収束半径 $R(>0)$ のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で表される関数 $f(x)$ $(-R < x < R)$ に対して，べき級数　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} x^n$ は開区間 $(-R,\ R)$ 上で収束して

不定積分　$\displaystyle\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} x^n + C \quad (-R < x < R)$　が成り立つ．

証明　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は開区間 $(-R,\ R)$ に含まれる任意の閉区間 $[-r,\ r]$ で一様収束するから，定理 1 により その不定積分は

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\ dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^x \sum_{k=0}^{n} a_k t^k dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^x a_k t^k dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Big[\frac{a_{k+1}}{k+1} t^k\Big]_0^x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{k+1} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} x^n \qquad (-R < x < R)\ .
\end{aligned}$$

これは，$\displaystyle\int f(x)\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} x^n + C \quad (-R < x < R)$　を意味している．　　//

上の定理と **1.11　関数の極限　D. 5** から，つぎのことがわかる：

定理　べき級数の導関数　収束半径 $R(>0)$ のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で表される関数 $f(x)$ $(-R < x < R)$ に対して，べき級数　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ は開区間 $(-R,\ R)$ 上で収束して

導関数　$\displaystyle f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (-R < x < R)$　が成り立つ．

上の定理を繰り返してつぎのことが容易に導かれる：収束半径 $R(>0)$ のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で表される関数 $f(x)$ は区間 $(-R,R)$ で何回でも微分可能で以下の事が成り立つ：

$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n & , \quad a_0 = f(0) \\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} & , \quad a_1 = \dfrac{f'(0)}{1!} \\ \vdots & \\ f^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n x^{n-p} & , \quad a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!} \\ \vdots & \end{cases}$$

定理　べき級数の積　開区間 $(-R,R)$ で定義された関数 $f(x)$ および $g(x)$ が $(-R,R)$ 上収束するべき級数でそれぞれ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{そして} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

と表されるとき，関数 $f(x)g(x)$ $(-R<x<R)$ も収束するべき級数でつぎの様に表される：

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (-R<x<R) \quad , \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n=0,1,\cdots).$$

さて，証明はつぎの定理から従う：

定理　絶対収束する無限級数の積　絶対収束する無限級数 $\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\beta = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ に対し，

$$\alpha\beta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad , \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n=0,1,\cdots).$$

証明　絶対収束する無限級数 $\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\beta = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ に対し，$c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n=0,1,\cdots)$ と定義して無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ を調べる．

$a_n\backslash b_n$	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	$\cdots$
a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	a_0b_3	a_0b_4	a_0b_5	a_0b_6	a_0b_7	a_0b_8	
a_1	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_4	a_1b_5	a_1b_6	a_1b_7	a_1b_8	
a_2	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	a_2b_4	a_2b_5	a_2b_6	a_2b_7	a_2b_8	
a_3	a_3b_0	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	a_3b_4	a_3b_5	a_3b_6	a_3b_7	a_3b_8	
a_4	a_4b_0	a_4b_1	a_4b_2	a_4b_3	a_4b_4	a_4b_5	a_4b_6	a_4b_7	a_4b_8	
a_5	a_5b_0	a_5b_1	a_5b_2	a_5b_3	a_5b_4	a_5b_5	a_5b_6	a_5b_7	a_5b_8	
a_6	a_6b_0	a_6b_1	a_6b_2	a_6b_3	a_6b_4	a_6b_5	a_6b_6	a_6b_7	a_6b_8	
$\vdots$										

今，$\dfrac{n}{2}$ 以下の最大の番号を $n' = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ とすると，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{p=0}^{n} c_p &= \sum_{k,\,l=0}^{n} a_k\, b_l - \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} a_k\, b_{p-k} = \sum_{k+l>n} a_k\, b_l \\ &= \sum_{k=0}^{n'}\Bigl(a_k \sum_{l=n-k+1}^{n} b_l\Bigr) + \sum_{k=0}^{n'}\Bigl(b_k \sum_{l=n-k+1}^{n} a_l\Bigr) + \sum_{k=n'+1}^{n}\Bigl(b_k \sum_{k=n'+1}^{n} a_l\Bigr).\end{aligned}$$

さて，$\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束であるから，ある正の数 A が存在して $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が成り立つ（**1.2 収束数列 D.** $\boxed{8}$ **(1)**）．また，任意の正の数 ϵ に対して，ある番号 N が存在して N より大きい番号 $n > m\,(> N)$ に対して $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon$ が成り立つ.（**1.3 D. 絶対収束級数** $\boxed{\textbf{定理}}$ **の証明を参照せよ.**）同様に，ある正の数 B が存在して $B = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ が成り立つ．また，任意の正の数 ϵ に対して，ある番号 N' が存在して N' より大きい番号 $n > m\,(> N')$ に対して $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} |b_k| < \epsilon$ が成り立つ.

このとき，番号 n を $\max\{2N, 2N'\}$ より大きく取ると， $n' = \left[\dfrac{n}{2}\right] \geq \max\{N, N'\}$ であるから

$$\begin{cases} \Bigl|\displaystyle\sum_{k=0}^{n'}\Bigl(a_k \sum_{l=n-k+1}^{n} b_l\Bigr)\Bigr| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n'}\Bigl(|a_k| \sum_{l=n-k+1}^{n} |b_l|\Bigr) \leq \sum_{k=0}^{n'} |a_k|\,\epsilon \leq A\,\epsilon, \\ \Bigl|\displaystyle\sum_{k=0}^{n'}\Bigl(b_k \sum_{l=n-k+1}^{n} a_l\Bigr)\Bigr| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n'}\Bigl(|b_k| \sum_{l=n-k+1}^{n} |a_l|\Bigr) \leq \sum_{k=0}^{n'} |b_k|\,\epsilon \leq B\,\epsilon, \\ \Bigl|\displaystyle\sum_{k=n'+1}^{n}\Bigl(b_k \sum_{l=n'+1}^{n} a_l\Bigr)\Bigr| \leq \displaystyle\sum_{k=n'+1}^{n}\Bigl(|b_k| \sum_{l=k'+1}^{n} |a_l|\Bigr) \leq \sum_{k=n'+1}^{n} |b_k|\,\epsilon \leq \epsilon^2 \end{cases}$$

が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned}\Bigl|\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{p=0}^{n} c_p\Bigr| &\leq \Bigl|\sum_{k=0}^{n'}\Bigl(a_k \sum_{l=n-k+1}^{n} b_l\Bigr)\Bigr| + \Bigl|\sum_{k=0}^{n'}\Bigl(b_k \sum_{l=n-k+1}^{n} a_l\Bigr)\Bigr| + \Bigl|\sum_{k=n'+1}^{n}\Bigl(b_k \sum_{k=n'+1}^{n} a_l\Bigr)\Bigr|. \\ &\leq A\epsilon + B\epsilon + \epsilon^2 = (A + B + \epsilon)\,\epsilon\end{aligned}$$

が成り立つ $(n > \max\{2N, 2N'\})$．これは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Bigl(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{p=0}^{n} c_p\Bigr) = 0$ を意味している.

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k = \alpha\beta$ であることに注意すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n} c_p = \alpha\beta$ が得られる． //

$\boxed{3}$ 関数 $e^x \sin x\ (-\infty < x < \infty)$ のマクローリン展開を５次の項まで求めよ.

$\boxed{4}$ $\boxed{\textbf{定理　べき級数の積}}$ において，等式 $\dfrac{\{f \cdot g\}^{(n)}(0)}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ を確かめよ.

問題 略解

1.2 $\boxed{7}$

$\boxed{\text{略解}}$ 一般項 a_n について，つぎのことが成り立つ:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |\alpha|\cdot\left|\frac{\alpha-1}{1}\cdot\frac{\alpha-2}{2}\cdots\right|\frac{\alpha-n}{n}\Big| r^n = |\alpha|\cdot\left|1-\frac{\alpha}{1}\right|\cdot\left|1-\frac{\alpha}{2}\right|\cdots\left|1-\frac{\alpha}{n}\right| r^n \\ &\le |\alpha|\cdot\left(1+\frac{|\alpha|}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{|\alpha|}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{|\alpha|}{n}\right) r^n . \end{aligned}$$

$(0<)\, r<s<1$ を満たす s を取ると，ある正の番号 N を選んで

$$1+\frac{|\alpha|}{n}<\frac{s}{r}<\frac{1}{r} \qquad (\forall n=N,N+1,N+2,\cdots)$$

が成り立つようにできる．$M=|\alpha|\cdot\left(1+\frac{|\alpha|}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{|\alpha|}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{|\alpha|}{N}\right) r^N$ とおくと，$n>N$ のとき，$r(1+\frac{|\alpha|}{N})<s$ であるから

$$(0\le)\ |a_n|\le M\cdot\left(1+\frac{|\alpha|}{N+1}\right)\cdot\left(1+\frac{|\alpha|}{N+2}\right)\cdots\left(1+\frac{|\alpha|}{n}\right) r^{n-N}<Ms^{n-N}.$$

$\lim_{n\to\infty} Ms^{n-N}=0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ が示された． //

1.2 $\boxed{8}$

$\boxed{\text{略解}}$ (1) 収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を α とすると，$\boxed{\text{収束性}}$ の条件

$$(*)\quad \left(\begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある正の番号 } N \text{ が存在して，} \\ \text{どの番号 } n \text{ に対しても} \quad n \ \ge\ N \ \Longrightarrow\ |a_n-\alpha|\ <\ \epsilon \end{array}\right.$$

が成り立つ． この ϵ を固定して考えると，

$$n\ \ge\ N \quad\Longrightarrow\quad |a_n|=|a_n-\alpha+\alpha|\ \le\ |a_n-\alpha|+|\alpha|\ <\ \epsilon+|\alpha|.$$

故に， どの番号 $n\ (\ge 1)$ に対しても　$|a_n|\le M=\max\Big\{a_1,\ a_2,\cdots,\ a_N,\ \epsilon+|\alpha|\Big\}<\infty$.

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha\ne 0$ とする． 数列の $\boxed{\text{収束性}}$ の条件から， $\epsilon=\frac{|\alpha|}{2}>0$ に対して

$$(*)\quad \left(\begin{array}{l} \text{ある正の番号 } N \text{ が存在して，どの番号 } n \text{ に対しても} \\ n\ \ge\ N \quad\Longrightarrow\quad |a_n-\alpha|\ <\ \epsilon=\dfrac{|\alpha|}{2} \end{array}\right.$$

が成り立つ． このとき $\alpha-\frac{|\alpha|}{2}<a_n<\alpha+\frac{|\alpha|}{2}\ (n\ge N)$ であるから，

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha>0 \text{ のとき } a_n\ge\dfrac{|\alpha|}{2} \\ \alpha<0 \text{ のとき } a_n\ge-\dfrac{|\alpha|}{2} \end{array}\right.$$

が成り立つ． $m=\frac{|\alpha|}{2}$ と置くと， $|a_n|\ge m\ (n\ge N)$ が成り立っていることがわかる． //

$\boxed{9}$

$\boxed{\text{略解}}$ $\alpha<\infty$ の場合，明らかに

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\alpha\right|=\left|\frac{(a_1-\alpha)+(a_2-\alpha)+\cdots+(a_n-\alpha)}{n}\right|\le\frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_n-\alpha|}{n}.$$

さて，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の $\boxed{\text{収束性}}$ の条件 から

$$\left(\begin{array}{l} \text{正の数 } 1 \text{ に対して，ある正の番号 } L \text{ が存在して，} \\ \text{どの番号 } n \text{ に対しても} \quad n\ \ge\ L\ \Longrightarrow\ |a_n-\alpha|\ <\ 1 \end{array}\right.$$

が成り立つから，　$M = \max\Big\{|a_1-\alpha|,\ |a_2-\alpha|,\ \cdots,\ |a_L-\alpha|,\ 1\Big\} < \infty$　と置くと，
どの番号 n に対しても $|a_n-\alpha| \le M$ が成り立つ．

$\boxed{\text{収束性}}$ の条件から　(*) $\Bigg($ 任意の正の数 ϵ に対して，ある正の番号 N が存在して，
どの番号 n に対しても　$n \ \ge\ N \ \Longrightarrow\ |a_n-\alpha| \ <\ \epsilon$

が成り立つので，　$n \ \ge\ \max\Big\{N,\ \dfrac{NM}{\epsilon}\Big\}$ のとき

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\alpha\Big| \ &= \ \Big|\frac{(a_1-\alpha)+(a_2-\alpha)+\cdots+(a_n-\alpha)}{n}\Big| \le \frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_n-\alpha|}{n} \\
&\le \ \frac{\sum_{k=1}^{N}|a_k-\alpha|}{n}+\frac{\sum_{k=N+1}^{n}|a_k-\alpha|}{n} \le \frac{NM}{n}+\frac{(n-N)\epsilon}{n} \\
&\le \ \epsilon+\epsilon \ <\ 2\epsilon\ .
\end{aligned}$$

ϵ は任意に小さい正の数を取れるから，これは
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$　が成り立つことを示している．

$\alpha=\infty$ の場合，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が ∞ に発散することから，

(*) $\Bigg($ 任意の正の数 M に対して，ある正の番号 N が存在して，
どの番号 n に対しても　$n \ \ge\ N \ \Longrightarrow\ a_n \ >\ M$

が成り立つので，　$n \ >\ N$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ &= \ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_n}{n} \\
&\ge \ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n}+\frac{(n-N)M}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n}+\Big(1-\frac{N}{n}\Big)M
\end{aligned}$$

が成り立つ．今，番号 $N_1>4N$ を

$$\Big|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n}\Big| \ <\ \frac{M}{4}$$

となるように大きく選ぶと，どの番号 n に対しても $n \ >\ N_1$ のとき

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{n}+\Big(1-\frac{N}{n}\Big)M > -\frac{M}{4}+\Big(1-\frac{1}{4}\Big)M=\frac{M}{2}.$$

M は任意に大きい正の数を取れるから，これは
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha=\infty$　が成り立つことを示している．
$\alpha=-\infty$ の場合も $\alpha=\infty$ の場合と同様な議論で示される，または $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が ∞ に発散することからも示される．　//

$\boxed{\textbf{10}}$ $\boxed{\text{略解}}$ 極限値 α に収束する数列 $\big\{a_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\big\{a_{n_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ を考える．収束性の条件から，$\Bigg($ 任意の正の数 ϵ に対して，ある正の番号 N が存在して，
どの番号 n に対しても　$n \ \ge\ N \ \Longrightarrow\ |a_n-\alpha| \ <\ \epsilon$

が成り立つ．このとき，$n_K>N$ となる $K\in\mathbf{N}$ を取ると（$n_1<n_2<n_3<\cdots$ であるから）

$$k\ge K \ \Longrightarrow\ |a_{n_k}-\alpha| \ <\ \epsilon$$

が成り立つ．これは，部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が同一の極限値へ収束することを意味している．　//

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\boxed{\text{略解}}$ 収束する数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を α とすると，**1.2 収束数列 D. 数列の収束と $\epsilon - N$ 論法** の $\boxed{\text{収束性}}$ $(*)$ において，ϵ に換えて $\dfrac{\epsilon}{2}$ を考えて，

$$(*)\quad \left(\begin{array}{l}\text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある正の番号 } N \text{ が存在して，}\\ \text{どの番号 } n \text{ に対しても}\quad n \ \geq\ N \quad\Longrightarrow\quad |a_n - \alpha| \ <\ \dfrac{\epsilon}{2}\end{array}\right.$$

が成り立つ．　このとき

$$m,\ n \geq N \quad\Longrightarrow\quad |a_n - a_m| \ =\ |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \ \leq\ |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| \ <\ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ .$$

すなわち

$$(\mathrm{C})\quad \left(\begin{array}{l}\text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある正の番号 } N \text{ が存在して，}\\ \text{どの番号 } m,\ n \geq N \text{ に対しても}\ \ |a_n - a_m| \ <\ \epsilon\end{array}\right.$$

が成り立つ．　//

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\boxed{\text{略解}}$ 最初に，コーシー 列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界数列であることに注意する．何故ならば，任意の正の数 ϵ に対して，ある正の番号 N が存在して，どの番号 $m, n \geq N$ に対しても $|a_n - a_m| < \epsilon$ が成り立っている．$n \geq N \implies |a_n| < |a_N| + \epsilon$ が成り立つから，

$$\max\{\,|a_n| \bigm| n \in \mathbf{N}\,\} = \max\{\,|a_1|,\ |a_2|, \cdots,\ |a_{N-1}|, |a_N| + \epsilon\} < \infty.$$

故に，コーシー 列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の単調増加 (減少) 部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は有界数列であるから収束する．その極限値を α とすると，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - \alpha| = 0$ である．さらに $\displaystyle\lim_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0$ であるから，

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = \lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - \alpha| \leq \lim_{n,k\to\infty} |a_n - a_{n_k}| + \lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - \alpha| = 0.$$

これは，この部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ の極限値が数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値であることを示している．$\boxed{\text{Bolzano-Weierstrass の定理}}$ とその証明から，コーシー 列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する単調部分列を持つので，コーシー の判定条件 (C) が収束に対する十分条件であることがわかる．　//

$\boxed{\mathbf{13}}$ $\boxed{\text{略解}}$ 数列 $\left\{\dfrac{a}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列であるから，実数の連続性の原理によって収束することがわかる．その極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = c$ を考える．$c \geq 0$ であるが，今 $c > 0$ であると仮定する．そのとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = \frac{c}{2}$ となるが，数列 $\left\{\dfrac{a}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は数列 $\left\{\dfrac{a}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であるから，$\boxed{10}$ の結果によって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a}{2n} = c$ でなければならない．$c \neq \dfrac{c}{2}$ であるから，これは矛盾である．このことから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0\ (= c)$ であることがわかる．　//

注意．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$ という事実は，つぎのアルキメデス (Archimedes) の公理に基づくとも言える：

　任意の正の数 a およびどんな小さな正の数 b に対しても，$nb > a$ となるような自然数 n がある．

1.3 C. $\boxed{3}$ 　$\boxed{\text{略解}}$ **1.3 級数 C.** で見たように

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}\longrightarrow e \quad (n\longrightarrow\infty)$$

であるから， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\le e$ ． さらに $n>k$ のとき

$$a_n=1+1+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\cdots+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}+\cdots+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$

$$\ge 1+1+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\cdots+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n\ge\lim_{n\to\infty}\left\{1+1+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\cdots+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}\right\}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}\ .$$

ここで $k\longrightarrow\infty$ として， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\ge\lim_{k\to\infty}\left\{1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right\}=e$ ．

以上のことから， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ ． //

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ であるから，

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n &= \left(\frac{1}{n+1+1}+\cdots+\frac{1}{n+1+n-1}+\frac{1}{n+1+n}+\frac{1}{n+1+n+1}\right)-\\ &\qquad\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)\\ &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0\end{aligned}$$

が成り立つので 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である．また

$a_n<\overbrace{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}}^{n\text{ 項}}<n\times\dfrac{1}{n+1}<1$ であるから，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．

(2) 数学的帰納法で示す．次のようにも考えられる： $n=1,2,\cdots$ に対して，

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

注． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\log 2=0.693\cdots$ ．（参考． **3.7 B.** $\boxed{3}$ **(3)** ）

1.4 D. $\boxed{1}$ 　$\boxed{\text{略解}}$ $a(>1)$ を正の数とし，正の無理数 r に収束する二つの単調増加有理数列 $\{r_n\}$ と $\{s_n\}$ を考える．単調増加有界数列 $\{a^{r_n}\}$ の極限値を α ，単調増加有界数列 $\{a^{s_n}\}$ の極限値を β とする．単調増加数列の極限値であることから，$\alpha=\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^{r_n}\ge a^{r_k}$ $(k=1,2,\cdots)$ が成り立つ．さて，数列 $\{s_n\}$ は無理数 r に収束する単調増加有理数列であるから，どの番号 n に対しても $s_n<r$ であるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r_n=r$ であるからある番号 m に対して $s_n<r_m$

が成り立つ． こうして $a^{s_n} < a^{r_m} \leq \alpha$ $(n=1,2,\cdots)$ が成り立つことになる．従って， $\beta = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} \leq \alpha$ となることがわかる．二つの単調増加有理数列 $\{r_n\}$ と $\{s_n\}$ を入れ替えて考えると， $\alpha \leq \beta$ も成り立つから， $\alpha = \beta$ が示される．すなわち，極限値 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ は無理数 r に収束する単調増加有理数列 $\{r_n\}$ の取り方によらないので，この極限値で a^r を定義することができる．$a(<1)$ の場合，$\{a^{r_n}\}$ と $\{a^{s_n}\}$ は単調減少数列となることに注意して同様に示せ． //

1.6 $\boxed{4}$

$\boxed{\text{略解}}$ (1) 三角関数の合成を使って，

$y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ $\quad (-\infty < x < \infty)$ を調べる． 解は 各整数 n に対して

$x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ のとき 最大値 $\sqrt{2}$, $\quad x = 2n\pi - \frac{3\pi}{4}$ のとき 最小値 $-\sqrt{2}$.

(2) 三角関数の合成を使って，

$y = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ $\quad (0 \leq x \leq \pi)$ を調べる． 解は

$x = \frac{\pi}{3}$ のとき 最大値 2, $\quad x = \pi$ のとき 最小値 -1.

1.7 $\boxed{2}$

(1) $0 \leq \alpha = \cos^{-1} x \leq \pi$, $\quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta = \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ と置くと，

$\sin\alpha \geq 0$, $\quad \cos\beta \geq 0$ であることから

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \sqrt{1-\cos^2\alpha}\ \sqrt{1-\sin^2\beta} \ + \ x^2 = \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-x^2} \ + \ x^2 = 1 \ .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha+\beta \leq \frac{3\pi}{2}$ であるから， $\quad \cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \alpha + \beta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$. //

(2) $0 < \alpha = \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ と置くと，直角三角形 ABC を $\angle A = \alpha$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ となるようにとれる．このとき，$\tan\alpha = x$ より $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{x}$. $0 < \angle C = \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから，$\tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ となる．明らかに，$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$. //

(3) $0 < \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, $\quad 0 < \beta = \tan^{-1}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$ と置くと，

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$ となる． $0 < \alpha+\beta < \pi$ であるから，

$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \alpha + \beta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$. //

(4) $\alpha = \tan^{-1}(x+1)$, $\quad \beta = \tan^{-1}(x-1)$ と置くと，

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x+1-(x-1)}{1+(x+1)(x-1)} = \dfrac{2}{x^2}$ より

$$\tan^{-1}(x+1)-\tan^{-1}(x-1)=\alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{2}{x^2}\quad (x^2\neq 0)\ . \qquad //$$

(5) $\alpha=\tan^{-1}(x+1),\quad \beta=\tan^{-1}(x-1)$ と置くと，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+1+(x-1)}{1-(x+1)(x-1)}=\frac{2x}{2-x^2}\quad \text{より}$$

$$\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\alpha+\beta=\tan^{-1}\frac{2x}{2-x^2}\quad (x^2<2)\ . \qquad //$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha=\sin^{-1}x\leq\dfrac{\pi}{2}$ と置くと，$-1\leq x=\sin\alpha\leq 1$ であることから

$$\cos\left(\sin^{-1}x\right)=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}\quad (-1\leq x\leq 1)\ .$$

つぎに $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha=\tan^{-1}x<\dfrac{\pi}{2}$ と置くと，$-\infty<x=\tan\alpha<\infty$ であることから

(2) $\tan\left(2\tan^{-1}x\right)=\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2x}{1-x^2}\quad (-\infty<x<\infty)\ .$ また

(3) $\cos\left(\tan^{-1}x\right)=\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\quad (-\infty<x<\infty)\ .$ さらに

(4) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\tan\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\ (-\infty<x<\infty)$ が成り立つから，

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\alpha=\tan^{-1}x\quad (-\infty<x<\infty)\ . \qquad //$$

1.8 $\boxed{1}$ $\boxed{\text{略解}}$ (1) $\dfrac{1-(-1)^n2^n}{3}$ (2) $\dfrac{7}{3}$ (3) $\pm\infty\quad (a\neq 0),\quad 1\quad (a=0)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{略解}}$ (1) 省略. (2) 三角関数の加法公式 (**1.6 A.** $\boxed{\mathbf{2}}$) から，$|\cos(x+h)-\cos x|=\left|-2\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}\right|$ が成り立つ．このとき $|\sin x|\leq|x|\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つので

$$|\cos(x+h)-\cos x|\leq 2\left|\sin\frac{h}{2}\right|\leq\left|h\right|.$$

明らかに，$\displaystyle\lim_{h\to 0}|\cos(x+h)-\cos x|=\lim_{h\to 0}|h|=0$ であるから，$\cos x$ は任意の x で連続である．また **1.8 A** $\boxed{\textbf{定理 1}}$ **(4)** により，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ は $\cos x\neq 0$ となる x で連続である． //

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{略解}}$ (1) 1 (2) 3 (3) 0 (4) 0 (5) 0

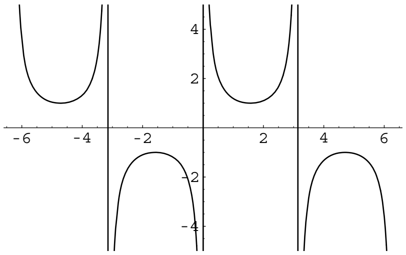
$\boxed{\mathbf{4}}$ $\boxed{\text{略解}}$ (1) -2 (2) $\dfrac{a}{b}$

(3) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\Big(\pi(x-1)+\pi\Big)}{x-1}=\lim_{x\to 1}-\frac{\sin\pi(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}-\pi\cdot\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}=-\pi$$

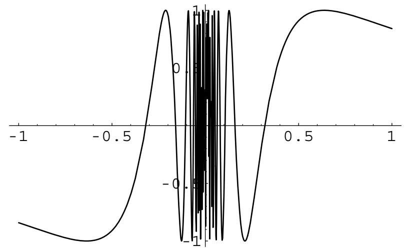
(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{2}{4}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\Big(\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}\Big)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}=1\cdot 1\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ は $\sin x\neq 0$ の時 連続.



(2) $y=\sin\dfrac{1}{x}$ は $x\neq 0$ の時 連続.



(3) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ は 連続.
(**1.8 A.** $\boxed{3}$ (5))

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\boxed{\text{略解}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ であるから，対数関数 $\log x$ $(x>0)$ の連続性により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=\log\alpha$ が成り立つ. **1.2 収束数列 D.** $\boxed{9}$ により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n}{n}=\log\alpha$ となる．このとき，指数関数 e^x の連続性により

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n}{n}}=e^{\log\alpha}=\alpha. \qquad //$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\boxed{\text{略解}}$ $a_n>0$ $(n=0,1,\cdots)$ に対して， 正項数列 $\displaystyle\Big\{b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\Big\}_{n=1}^{\infty}$ を考える.

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を A (≥ 0) とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=A$.

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\frac{a_1}{a_0}a_0=b_nb_{n-1}\cdots b_2b_1a_0$$

が成り立つから

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_nb_{n-1}\cdots b_2b_1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_0}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_0}=1$ ($\because$ **1.2 収束数列 C.** $\boxed{4}$) であるから 前問 $\boxed{6}$ により

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A. \qquad //$$

1.9 $\boxed{1}$

$\boxed{\text{略解}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-ax)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\Big[(1-ax)^{\frac{1}{-ax}}\Big]^{-a}=\Big[\lim_{x\to 0}(1-ax)^{\frac{1}{-ax}}\Big]^{-a}=e^{-a}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{略解}}$ (1) $f(x)=2x$ であるから，与えられた $\epsilon>0$ に対して，

$$|f(x)-f(x_0)|=2|x-x_0|<\epsilon$$

が成り立つためには $|x-x_0|<\dfrac{\epsilon}{2}$ であればよいから， $\delta<\dfrac{\epsilon}{2}$ となるように正の数 δ をとればよい.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ であるから，与えられた $\epsilon>0$ に対して，

$$|f(x)-f(x_0)|=\Big|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\Big|=\frac{|x-x_0|}{xx_0}<\epsilon$$

が成り立つためには $|x-x_0| < xx_0\epsilon$ であればよいから， $\delta < \dfrac{x_0^2\epsilon}{1+x_0\epsilon}$ となるように正の数 δ をとればよい．

(3) $f(x) = \log x \ \ (x>0)$ であるから，与えられた $\epsilon > 0$ に対して，

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\log x - \log x_0\right| = \left|\log \frac{x}{x_0}\right| < \epsilon$$

が成り立つためには $e^{-\epsilon} < \dfrac{x}{x_0} < e^{\epsilon}$ であればよいから， $\delta < \dfrac{x_0(e^{\epsilon}-1)}{e^{\epsilon}}$ となるように正の数 δ をとればよい． //

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{略解}}$ (A) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha\,(\in \mathbf{R})$ であるから，$\epsilon = 1$ に対してある正の数 δ を

$$|x-x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\alpha| < 1\,, \quad \text{すなわち} \quad \alpha - 1 < f(x) < \alpha + 1$$

となるようにとることができる．$M = |\alpha| + 1$ と置くと，

$$|x-x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad -M < f(x) < M\,, \quad \text{すなわち} \quad |f(x)| < M$$

が成り立つ．

(B) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$ であるから，$\epsilon = \dfrac{|\alpha|}{2} > 0$ に対してある正の数 δ を

$$|x-x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\alpha| < \frac{|\alpha|}{2}\,, \quad \text{すなわち} \quad \alpha - \frac{|\alpha|}{2} < f(x) < \alpha + \frac{|\alpha|}{2}$$

となるようにとることができる．このとき，

$$|x-x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > \dfrac{|\alpha|}{2} = \alpha - \dfrac{|\alpha|}{2} & (\alpha > 0) \\ f(x) < \alpha + \dfrac{|\alpha|}{2} = -\dfrac{|\alpha|}{2} & (\alpha < 0) \end{cases}$$

が成り立つ．すなわち，$m = \dfrac{|\alpha|}{2} > 0$ に対して

$$|x-x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \geq m\ (>0).$$

が成り立つ． //

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\boxed{\text{略解}}$ 関数 $f(x)$ の $x = x_0$ での連続性から， $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ (または < 0) の場合には，ある正の数 δ が存在して

$$|x-x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad (\text{または} \quad f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2} < 0\ )$$

が成り立つことが $\boxed{3}$ の議論からわかる． //

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\text{略解}}$ $x \geq 2$ として $(2 \leq)\, n \leq x < n+1$ となる正整数 n を取る．Gauss 記号を使うと，$n = [x]$ と表される．このとき， $\dfrac{n-1}{n+1} \geq \dfrac{1}{3}$ が成り立つので，関数 a^x の単調増加性より

$$\begin{aligned} \frac{a^x}{x} &\geq \frac{a^n}{n+1} = \frac{(1+(a-1))^n}{n+1} \geq \frac{1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2}{n+1} \geq \frac{n}{6}(a-1)^2 \\ &= \frac{[x]}{6}(a-1)^2 \quad \longrightarrow \quad \infty \quad (x \to \infty). \qquad // \end{aligned}$$

1.10 $\boxed{\mathbf{1}}$ 略解　$f(x) = x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1}$ と置いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{2n+1}}$ を調べる．$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{2n+1}} = \lim_{x\to\infty}\left\{1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right\} = 1$ かつ $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{2n+1} = \infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty \end{cases}$ であるから，$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$ が成り立つ．これから，ある負の数 a に対して $f(a) < 0$ となることがわかる．そうでないならば，すべての負の数 a に対して $f(a) \geq 0$ となり $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ に矛盾するからである．同様に，ある正の数 b に対して $f(b) > 0$ となることがわかる．このとき，中間値の定理により，ある c に対して $f(c) = 0$ となること，すなわち，$f(x) = 0$ が一つの実数解をもつことがわかる．　//

1.11 $\boxed{\mathbf{2}}$ 略解　(1)　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x+1)^n$ は $2|x+1| < 1$ のときに収束するから，$-\dfrac{3}{2} < x < -\dfrac{1}{2}$ の範囲でこのべき級数は収束する．　(2)　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$ の収束半径は 1 であるから，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ は $0 < x < 2$ の範囲で収束する．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 略解　(1)　∞　(2)　1　(3)　1

(4)　x のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ と t のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{2n+1}$ を考える．このとき，

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{2n+1}$　$(t = x^2)$　であるから，

実数 x でべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ が収束するとき，実数 $t = x^2$ のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{2n+1}$ も収束する．逆に，実数 $t(= x^2)$ のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{2n+1}$ が収束するとき，実数 x のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ も収束する．

故に，x のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ の収束半径は $t(= x^2)$ のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{2n+1}$ の収束半径の平方根に等しい．ダランベールの収束半径公式を使うと，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$　であるから，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ の収束半径は 1 .

(5)　x のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ の収束半径は $t(= x^2)$ のべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(2n)!}$ の収束半径の平方根

に等しい．ダランベールの収束半径公式を使うと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(2n)!}}{\dfrac{1}{(2n+2)!}}=\lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+1)=\infty$$ であるから，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ の

収束半径は ∞ ．

(6) ∞ (7) ∞ (8) ∞ .

4 略解 すべての $k=1,2,\cdots,n$ に対して， $k(n-k+1)\geq n$ が成り立つ．

($\because$ $k(n-k+1)-n=(k-1)n-(k-1)k=(k-1)(n-k)\geq 0$)

このことから，

$$\begin{aligned}
n &= 2m \text{ 偶数のとき}\\
n! &= 1\cdot 2\cdots(2m-1)\cdot 2m = 1\cdot 2m\cdot 2\cdot(2m-1)\cdots m\cdot(m+1)\geq (2m)^m = n^{\frac{n}{2}}\ ,\\
n &= 2m+1 \text{ 奇数のとき}\\
n! &= 1\cdot 2\cdots(2m)\cdot(2m+1) = 1\cdot(2m+1)\cdot 2\cdot(2m)\cdots m\cdot(m+2)\cdot(m+1)\\
&\geq (2m+1)^m(m+1)\geq(2m+1)^m\sqrt{2m+1}=(2m+1)^{\frac{2m+1}{2}}=n^{\frac{n}{2}}\ .
\end{aligned}$$

こうして $\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt[n]{n^{\frac{n}{2}}}=\sqrt{n}$ が成り立つから， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$. //

5 略解 べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ とべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ を考える．**1.11 関数の極限 D.** で示したように， $x=x_0$ に対して，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x_0^n \text{ は収束する} \quad\Longrightarrow\quad |x|<|x_0| \text{ のとき}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|x|^n \text{ は収束する．}\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x_0^n \text{ は発散する} \quad\Longrightarrow\quad |x|\geq|x_0| \text{ のとき}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|x|^n \text{ は発散する．}\end{cases}$$

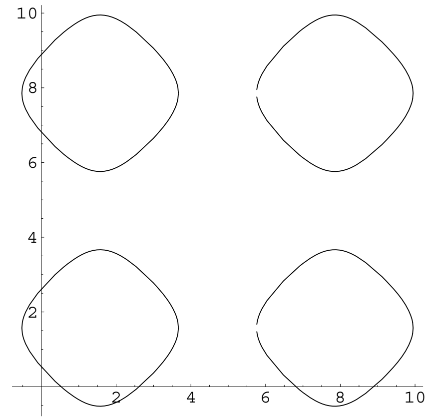
さて， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ が成り立つので， $|x|<|x_0|$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,|x|<|x_0|$ である．故に

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x_0^n \text{ は収束する} \quad\Longrightarrow\quad |x|<|x_0| \text{ のとき}\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|\,|x|^n=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\left(\sqrt[n]{n}\,|x|\right)^n \text{ は収束する．}\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x_0^n \text{ は発散する} \quad\Longrightarrow\quad |x|\geq|x_0| \text{ のとき}\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|\,|x|^n \text{ は発散する．}\end{cases}$$

これは，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ の収束半径が一致することを示す，すなわち

$$\sup\left\{\ |x|\ \middle|\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,|x|^n<\infty\ (\text{収束})\ \right\}=\sup\left\{\ |x|\ \middle|\ \sum_{n=1}^{\infty}n\,|a_n|\,|x|^n<\infty\ (\text{収束})\ \right\}.\quad //$$

2.1 C.



$\boxed{\text{問}}$ $\sin x + \sin y = \dfrac{1}{2}$ で与えられる平面曲線はどんな曲線か.

$\boxed{\text{略解}}$ 曲線 $C = \left\{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2}\right\}$ を考える. $-1 \le \sin y \le 1$ $(-\infty < y < \infty)$ であるから, $\sin x + \sin y = \dfrac{1}{2}$ となるためには

$$-\frac{1}{2} \le \sin x = \frac{1}{2} - \sin y \le 1 \qquad (\because \qquad \sin y \le 1\ )$$

が成り立たねばならない. 三角関数の周期性を考慮して, $-\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲で考えると $-\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{7\pi}{6}$. この場合 $-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{2} - \sin x \le 1$ であるから, 三角関数の周期性を考慮して, $-\dfrac{\pi}{2} < y \le \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲で考えると $-\dfrac{\pi}{6} \le y = \sin^{-1}\Big(\dfrac{1}{2} - \sin x\Big) \le \dfrac{\pi}{2}$.
さらに, 三角関数 $\sin y$ $(y \in \mathbf{R})$ は $y = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称である, すなわち
$\sin(\pi - y) = \sin y$ $(y \in \mathbf{R})$ が成り立っている, から

$$-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6} \quad \text{のとき} \quad \frac{\pi}{2} \le y = \pi - \sin^{-1}\Big(\frac{1}{2} - \sin x\Big) \le \frac{7\pi}{6} \ .$$

このことから, 長方形 $\big(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\big] \times \big(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\big]$ 内にある曲線 C の部分は二つの関数

$$y = \sin^{-1}\Big(\frac{1}{2} - \sin x\Big) \quad \text{と} \quad y = \pi - \sin^{-1}\Big(\frac{1}{2} - \sin x\Big) \quad \big(-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}\big)$$

のグラフで表される（滑らかな）閉曲線である.
三角関数の周期性から $(x,\ y) \in C$ のとき $(x + 2m\pi,\ y + 2n\pi) \in C$ $(m,\ n \in \mathbf{Z})$ なので, 曲線 C は長方形 $\big(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\big] \times \big(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\big]$ 内の閉曲線の周期 $2\pi \times 2\pi$ の繰り返しから成っていることがわかる. //

2.2 $\boxed{1}$

$\boxed{\text{略解}}$ (1) $7x^6 + 3$ (2) $1 - \dfrac{4}{x^2}$ (3) $\dfrac{-x^2 + 4x + 3}{(2 - x)^2}$

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{略解}}$ (1) $21x^2(x^3 + 1)^6$ (2) $5(2x + 1)(2x - 1)(x - 2)^2$

(3) $\dfrac{24x}{(1 - x^2)^{13}}$ (4) $\dfrac{5\sqrt[3]{x^2}}{3} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{5x^2 - 2x - 4}{3x\sqrt[3]{x}}$ (5) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{略解}}$ (1) $f'(f(x))f'(x)$ (2) $2\dfrac{f(x)^4 - 1}{f(x)^3}f'(x)$ (3) $\dfrac{f'(2x + 1)}{\sqrt{f(2x + 1)}}$

2.3 $\boxed{\mathbf{3}}$ 略解 (1) $3e^{3x}$ (2) $-2xe^{-x^2}$ (3) $\dfrac{1}{(x+1)^2}e^{\frac{x}{x+1}}$ (4) $(\log 2)2^x+(\log 3)3^x$

2.4 $\boxed{\mathbf{5}}$ 略解 (1) $\dfrac{1}{x\log x}$ (2) $\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$ (3) $e^x\left(\log x+\dfrac{1}{x}\right)$

(4) $-\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ (5) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 略解 (1) $x(x+1)^2(x+2)^2(8x^2+15x+4)$ (2) $x^x\big(\log x+1\big)$

(3) $(1+x)^x\left(\log(1+x)+\dfrac{x}{1+x}\right)$ (4) $\left(1+\log\sqrt{x}\right)x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}$

2.5 $\boxed{\mathbf{2}}$ 略解 $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 略解 (1) $-2x\sin x^2$ (2) $\sec x\tan x$ (3) $\sin 2x$

(4) $-\dfrac{2}{1+\sin 2x}$ (5) $-\tan x$ (6) $e^{\sin x}\cos x$

2.6 $\boxed{\mathbf{2}}$ 略解 (1) $\left(\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\right)'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) $\left\{\sin^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right\}'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}}\cdot\dfrac{-2}{(1+x)^2}=\dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+x)}$.

(3)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{2-x}} &= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}}\cdot\frac{2-x-x(-1)}{(2-x)^2}\\ &= \frac{1}{1+\dfrac{x}{2-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}}\cdot\frac{2}{(2-x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x(2-x)}}.\end{aligned}$$

(4)
$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=-\sqrt{\frac{1+x}{2x}}\times\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\times\left\{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\right\}=\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 略解 (1) $y=\sinh^{-1}x$ より， $x=\sinh y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$ が成り立つ．この関係式から， $e^{2y}-2x\,e^y-1=0$ がわかる． $X=e^y$ についての二次方程式 $X^2-2xX-1=0$ の正の解を考えて， $y=\log\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$ $(-\infty<x<\infty)$.

(2) $y=\cosh^{-1}x$ より， $x=\cosh y=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$ が成り立っている．この関係式から， $e^{2y}-2x\,e^y+1=0$ がわかる． $X=e^y$ についての二次方程式 $X^2-2xX+1=0$ の正の解を考えて， $y=\log\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)$ $(x\geq 1)$.

(3)　$y=\tanh^{-1}x$ より，　$x=\tanh y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$　が成り立っている．この関係式から，

$e^{2y}=\dfrac{1+x}{1-x}>0$　がわかる．$\dfrac{1+x}{1-x}>0$ が成り立つのは　$1-x^2=(1+x)(1-x)>0$

が成り立つ場合に限るので　$y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$　$(-1<x<1)$.　//

6 略解　(1)　$y=\sinh^{-1}x$ $(x\in\mathbf{R})$ より，　$x=\sinh y$ が成り立っている．逆関数の導関数に関する定理から，　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cosh y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　$(x\in\mathbf{R})$.

(2)　$y=\cosh^{-1}x$ $(x>1)$ より，　$x=\cosh y$ が成り立っている．
逆関数の導関数に関する定理から，　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\sinh y}=\dfrac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　$(x>1)$.

(3)　$y=\tanh^{-1}x$ $(-1<x<1)$ より，　$x=\tanh y$ が成り立っている．逆関数の導関数に関する定理から，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\cosh^2 y=\dfrac{1}{1-\tanh^2 y}=\dfrac{1}{1-x^2}$　$(-1<x<1)$.　//

7 略解　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\log 2x\right\}=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)-\log 2=0$.

8 略解　点 $(x_0,\,y_0)=(a\cos^3 t_0,\,a\sin^3 t_0)$ での接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t_0\cos t_0}{3a\cos^2 t_0(-\sin t_0)}=-\tan t_0.$$

点 $(x_0,\,y_0)=(a\cos^3 t_0,\,a\sin^3 t_0)$ での接線の方程式は　$y-a\sin^3 t_0=-(x-a\cos^3 t_0)\,\tan t_0$.
この接線と x 軸 および y 軸 との交点はそれぞれ $(a\cos t_0,\,0)$, $(0,\,a\sin t_0)$ であるから，
接線から x 軸および y 軸との交点によって切り取られる線分の長さは a .　//

2.7 **2**　(1) $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$　　(2) $2^n e^{2x}$　　(3) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

3　(1)　$y=(1-x^2)^{-\alpha}$ であるから，

$$\begin{aligned}
y' &= (-\alpha)(1-x^2)^{-\alpha-1}(-2x)=2\alpha x(1-x^2)^{-\alpha-1}\\
y'' &= 2\alpha(1-x^2)^{-\alpha-1}+2\alpha x(-\alpha-1)(1-x^2)^{-\alpha-2}(-2x)\\
&= 2\alpha(1-x^2)^{-\alpha-1}+4\alpha(\alpha+1)x^2(1-x^2)^{-\alpha-2}=\frac{2\alpha\{1+(2\alpha+1)x^2\}}{(1-x^2)^{\alpha+2}}.
\end{aligned}$$

(2)　$y=\tan^{-1}x^2$ であるから，　$y'=\dfrac{2x}{1+x^4}$ ，　　$y''=\dfrac{2(1+x^4)-2x\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}=\dfrac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$.

4　(1)　$\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$　より，

$$\left\{\frac{1}{x^2-3x+2}\right\}^{(n)}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)\ .$$

または $\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}$ より，

$$\left\{\frac{1}{x^2-3x+2}\right\}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left\{\frac{1}{x-2}\right\}^{(k)}\left\{\frac{1}{x-1}\right\}^{(n-k)}=\cdots=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right).$$

(2) 帰納的に， $\left\{e^x\sin x\right\}^{(n)}=\sqrt{2^n}e^x\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

(3) $\left\{x^2\log x\right\}'=2x\log x+x$, $\left\{x^2\log x\right\}''=2\log x+3$, 帰納的に

$\left\{x^2\log x\right\}^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{2\,(n-3)!}{x^{n-2}}$ $(n\geq 3)$. または $n\geq 3$ のとき

$$\begin{aligned}\left\{x^2\log x\right\}^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left\{x^2\right\}^{(k)}\left\{\log x\right\}^{(n-k)}\\&=x^2\left\{\log x\right\}^{(n)}+2nx\left\{\log x\right\}^{(n-1)}+n(n-1)\left\{\log x\right\}^{(n-2)}=\cdots\\&=(-1)^{n-1}\frac{2\,(n-3)!}{x^{n-2}}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ $f^{(n)}(x)=(n-1)!\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}+\dfrac{1}{(1-x)^n}\right\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ から，

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & (n:\text{偶数})\\ 2 & (n:\text{奇数})\ .\end{cases}\qquad //$$

2.8 $\boxed{1}$ $\sqrt[3]{8.20}$ の近似値を探すために，関数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $(x>0)$ を考えると，

$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ であるから，平均値定理により

$$\left|\sqrt[3]{x}-2\right|=\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{8}\right|=\frac{|x-8|}{3\sqrt[3]{8+\theta(x-8)}}\qquad(0<\exists\theta<1)$$

が成り立つ． $x=8.20$ のとき $2<\sqrt[3]{8+\theta(x-8)}=\sqrt[3]{8+\theta(8.20-8)}$ であるから

$$|\sqrt[3]{8.20}-2|=\frac{0.20}{3\sqrt[3]{8+0.20\ \theta}}<\frac{0.20}{6}=0.033\cdots$$ となる．故に

$\sqrt[3]{8.20}<2+0.033=2.033\cdots<2.04$ であることがわかり

$|\sqrt[3]{8.20}-2|=\dfrac{0.20}{3\sqrt{8+0.20\ \theta}}>\dfrac{0.20}{3\times 2.04}>0.03$ となる．こうして $2.03<\sqrt[3]{8.20}<2.034$

であることがわかる．

2.9 $\boxed{3}$ (1) $f(x)=x-\sin x$ $(x\geq 0)$ を考えると， $f'(x)=1-\cos x>0$ $(x>0)$

が成り立つ． $f(0)=0$ であるから，定理 2 により $f(x)=x-\sin x>f(0)=0$ $(x>0)$.

$g(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ $(x\geq 0)$ を考えると， $g'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ $(x>0)$ である．今

示したように $g''(x)=-\sin x+x>0 \quad (x>0)$ かつ $g'(0)=0$ であるから，定理 2 により

$g'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}>g'(0)=0 \quad (x>0)$ ．このとき $g(0)=0$ であるから，定理 2 により

$g(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}>g(0)=0 \quad (x>0)$ が成り立つ．

(4) $f(x)=\tan^{-1}x - x+\dfrac{x^3}{3} \quad (x\geq 0)$ を考えると，

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1+x^2=\dfrac{1-(1-x^2)(1+x^2)}{1+x^2}=\dfrac{x^4}{1+x^2}>0 \quad (x>0)$ が成り立つ．$f(0)=0$

であるから，定理 2 により $f(x)=\tan^{-1}x - x+\dfrac{x^3}{3}>f(0)=0 \quad (x>0)$ ．

$g(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\tan^{-1}x \quad (x\geq 0)$ を考えると，

$g'(x)=1-x^2+x^4-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1-(-x^2)^3}{1-(-x^2)}-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^6}{1+x^2}>0 \quad (x>0)$ である． $g(0)=0$

であるから，定理 2 により $g(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\tan^{-1}x>g(0)=0 \quad (x>0)$ が成り立つ．

4 $g(x)=\dfrac{3x}{2}-\log_2(1+x) \quad (x>-1)$ を考えると，

$g'(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{(1+x)\log 2}\geq\dfrac{1}{2\log 2}\Big(3\log 2-\dfrac{2}{1+x})\geq\dfrac{1}{2\log 2}\Big(3\log 2-2\Big)>0 \quad (x>0)$

が成り立つ．故に，定理 1 から， $g(x)=\dfrac{3x}{2}-\log_2(1+x)\geq g(0)=0 \quad (x>0)$ ．

5 (1) $\Big\{\cos^{-1}x+\sin^{-1}x\Big\}'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0 \quad (-1<x<1)$ であるから，

$\cos^{-1}x+\sin^{-1}x \quad (-1<x<1)$ は定数関数である． $\cos^{-1}0+\sin^{-1}0=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$\cos^{-1}x+\sin^{-1}x=\dfrac{\pi}{2} \quad (-1\leq x\leq 1)$ ． //

(2) $\Big\{\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\Big\}'=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\dfrac{1}{x^2})=0 \quad (x>0)$ であるから，

$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x} \quad (x>0)$ は定数関数である． $\tan^{-1}1+\tan^{-1}\dfrac{1}{1}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2} \quad (x>0)$ ． //

6 略解 関数 $f(x)$ $(a\leq x\leq b)$ は微分可能で $M=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f'(x)|<\infty$ とする．このとき，平均値の定理により，任意の x, $x'\in[a,b]$ に対して，ある $\theta\in(0,1)$ があって

$$f(x')-f(x)=f'(x+\theta(x'-x))(x'-x) \qquad \text{が成り立つので}$$

$$\big|f(x')-f(x)\big|=\big|f'(x+\theta(x'-x))(x'-x)\big|\leq M\big|x'-x\big|.$$

x, $x'\in[a,b]$ は任意であるから，つぎのことが示された：

$$\big|f(x')-f(x)\big|\leq M\big|x'-x\big| \qquad (a\leq x,\, x'\leq b) \quad . \qquad //$$

2.10 $\boxed{2}$

(1) $f(x)=\log x\ (x>0)$ が上に凸（下に凹）であることから導かれる．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ の二階導関数 $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0 \quad (x>0)$ であるから，$f(x)$ は下に凸（上に凹）である．このことから，

$0<t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n<1\ \ (t_1+t_2+\cdots+t_n=1)$ と $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in I$ に対して，

$$t_1\cdot\frac{1}{x_1}+t_2\cdot\frac{1}{x_2}+\cdots+t_n\cdot\frac{1}{x_n}\geq\frac{1}{t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n}$$ が成り立つ．

$t_1=t_2=\cdots=t_n=\dfrac{1}{n}$ として $\dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\Big)\geq\dfrac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$

が成り立つ．これから， $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\Big(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\Big)\geq n^2 \qquad (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n>0).$ //

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{略解}}$ $a>0,\ k>0,\ m\neq 1$ は定数である． (1) 関数

$f_m(x)=\big(1-(1-m)a\,e^{-kx}\big)^{\frac{1}{1-m}}=\exp\Big(\dfrac{1}{1-m}\log\big(1-(1-m)a\,e^{-kx}\big)\Big)$ と考えられるので，その定義域は開区間 $\begin{cases}(-\infty,\infty) & (m>1)\\ (k^{-1}\log a(1-m),\infty) & (m<1)\end{cases}$.

$y''=ak^2\,e^{-kx}\big(1-(1-m)a\,e^{-kx}\big)^{\frac{2m-1}{1-m}}\big(a\,e^{-kx}-1\big)$ である．

$a\,e^{-kx}-1\begin{cases}<0 & (x>\dfrac{\log a}{k})\\ =0 & (x=\dfrac{\log a}{k})\\ >0 & (x<\dfrac{\log a}{k})\end{cases}$ であるから， y'' の符号は $x>\dfrac{\log a}{k}$ または $x<\dfrac{\log a}{k}$

によって異なる．故に， $m>0$ の時 $(x_m,\,y_m)=\big(\dfrac{\log a}{k},m^{\frac{1}{1-m}}\big)$ はグラフ $y=f_m(x)$ の変曲点である．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to1}y_m=\lim_{m\to1}m^{\frac{1}{1-m}}=\lim_{h\to0}(1-h)^{\frac{1}{h}}=\frac{1}{e}$.

(3) **1.9 C.** $\boxed{1}$ より，$\displaystyle\lim_{m\to1}f_m(x)=\lim_{m\to1}\big(1-(1-m)a\,e^{-kx}\big)^{\frac{1}{1-m}}=\lim_{h\to0}\big(1-h\,a\,e^{-kx}\big)^{\frac{1}{h}}=e^{-ae^{-kx}}$.

注意． (1) で $m=\dfrac{n-1}{n}\ (n\in\mathbf{N})$ の場合には，$m<1$ であるが $\dfrac{1}{1-m}=n$ が正整数となるので， $f_m(x)=\Big(1-\dfrac{a\,e^{-kx}}{n}\Big)^n$ の定義域として $\Big(\dfrac{1}{k}\log\dfrac{a}{n},\ \infty\Big)$ より広い $(-\infty,\infty)$ を取ることができる．

2.11 $\boxed{1}$

(1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 0 (3) 1 (4) 1 (5) $\sqrt{21}$ (6) 7 (7) 0 (8) 1 (9) $\dfrac{1}{6}$

2.12 $\boxed{7}$

$\boxed{\text{略解}}$ 関数 $\varphi(x)=f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\,(x-a)^k$ を考えると， $\varphi(x)$ は $x=a$ を含む開区間 I で C^n 級で $\varphi(x)=o(|x-a|^n)$ が成り立っている．この場合， $\varphi^{(k)}(a)=0\ (k=0,1,\cdots,n)$ であることを示そう．それから，$\varphi^{(k)}(a)=f^k(a)-k!\,a_k=0\ (k=0,1,\cdots,n)$ が示

される．さて，関数 $h(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^n} & (x\neq a)\\ 0 & (x=a)\end{cases}$ はその定義域で $\begin{cases}x\neq a \text{ のとき } n \text{ 回微分可能}\\ x=a \text{ のとき連続}\end{cases}$

で $\begin{cases}\varphi(x)=(x-a)^n h(x)\\ \varphi(a)=0\end{cases}$ が成り立つ．

これから， $\begin{cases}\varphi'(x)=n(x-a)^{n-1}h(x)+(x-a)^n h'(x) & (x\neq a)\\ \varphi'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{x-a}=0\end{cases}$ が導かれる．帰納的に，

$$\begin{cases}\varphi^{(k)}(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{k} {}_kC_i\cdot n(n-1)\cdots(n-i+1)(x-a)^{n-i}\,h^{(k-i)}(x) & (x\neq a)\\ \varphi^{(k)}(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\varphi^{(k-1)}(x)}{x-a}=0\end{cases}\qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

が導かれる． //

8 略解 $a=|AB|=2\sin\dfrac{\theta}{2},\ \ b=|AC|=2\sin\dfrac{\theta}{4}$ であるから，

$\dfrac{8b-a}{3}=\dfrac{16}{3}\sin\dfrac{\theta}{4}-\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{\theta}{2}$ ． 故に， $\phi(\theta)=\dfrac{16}{3}\sin\dfrac{\theta}{4}-\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{\theta}{2}$ ．

(1) $\phi'(\theta)=\dfrac{4}{3}\cos\dfrac{\theta}{4}-\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\phi''(\theta)=-\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{\theta}{4}+\dfrac{1}{6}\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\phi^{(3)}(\theta)=-\dfrac{1}{12}\cos\dfrac{\theta}{4}+\dfrac{1}{12}\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\phi^{(4)}(\theta)=\dfrac{1}{48}\sin\dfrac{\theta}{4}-\dfrac{1}{24}\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\phi^{(5)}(\theta)=\dfrac{1}{192}\cos\dfrac{\theta}{4}-\dfrac{1}{48}\cos\dfrac{\theta}{2}$

(2)
$$\phi^{(5)}(\theta)=\frac{1}{192}\Big(\cos\frac{\theta}{4}-4\cos\frac{\theta}{2}\Big)=\frac{1}{192}\Big(\cos\frac{\theta}{4}-4\Big(2\cos^2\frac{\theta}{4}-1\Big)\Big)$$
$$=\frac{1}{192}\Big(-8\cos^2\frac{\theta}{4}+\cos\frac{\theta}{4}+4\Big)\ .$$

$t=\cos\dfrac{\theta}{4}$ と置くと， $0\le\theta\le\pi$ のとき $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le t\le 1$ で

$$\frac{1}{192\sqrt{2}}\ge\phi^{(5)}(\theta)=\frac{1}{192}\Big(-8t^2+t+4\Big)=\frac{1}{192}\Big(-8(t-\frac{1}{16})^2+4+\frac{1}{32}\Big)\ge-\frac{3}{192}\ .$$

(3) $\phi(\theta)$ の Maclaurin 多項式と剰余項を考えると，

$\phi(0)=0,\ \ \phi'(0)=1,\ \ \phi''(0)=\phi^{(3)}(0)=\phi^{(4)}(0)=0$ と $|\phi^{(5)}(\theta)|\le\dfrac{1}{64}$ から，

$$\begin{cases}\phi(\theta)=\theta+\epsilon\\ |\epsilon|\le\dfrac{|\phi^{(5)}(\theta)|\theta^5}{5!}=\dfrac{\theta^5}{7680}\ .\end{cases}\qquad //$$

9 略解 (1) ピタゴラスの定理を使って，

$$b^2=\frac{a^2}{4}+\Big(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\Big)^2=2-2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}=2-\sqrt{4-a^2}\ .$$

(2) $a=1$ であるから， $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}=0.5176380\cdots$ ．

円周率 π の近似値 $8b-a=\sqrt{2-\sqrt{3}}\ -1=3.141\cdots$

誤差の絶対値 $|\pi-(8b-a)|\ \le\ \dfrac{3}{7680}\big(\dfrac{\pi}{3}\big)^5\ <\ \dfrac{3}{7680}\big(\dfrac{11}{10}\big)^5\ <\ \dfrac{1}{1000}$ ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\boxed{\text{略解}}$ $\sin 1^\circ = \sin\dfrac{\pi}{180}$ であるから， $\sin x$ の Maclaurin 多項式と剰余項

$$\begin{cases} \sin x = x + R_3 \\ R_3 = -\dfrac{(\cos\theta x)x^3}{6} \quad (0<\exists\theta<1) \end{cases}$$ を使って $\dfrac{\pi}{180} - \dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{\pi}{180}\Big)^3 < \sin\dfrac{\pi}{180} < \dfrac{\pi}{180}$ がわかる．

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{180} = 0.017453\cdots \\ \dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{\pi}{180}\Big)^3 < \dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{1.05}{60}\Big)^3 < \dfrac{1.05^3}{6^4}\times 10^{-3} = \dfrac{1.1025}{1290}\times 10^{-3} < 10^{-6} \end{cases}$$

より， $\sin 1^\circ = \sin\dfrac{\pi}{180} = 0.0174\cdots$ である．

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\boxed{\text{略解}}$ $\sin x$ の Maclaurin 多項式と剰余項は $0 \le x \le \pi$ のとき

$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} - \dfrac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + R_{4n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{4n} \\ R_{4n} = \dfrac{\sin(\theta x)\,x^{4n}}{(4n)!} \ge 0 \qquad (0<\exists\theta<1) \end{cases}$$

であるから， $\sin x \ge x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} - \dfrac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}$ $(0 \le x \le \pi)$.

同様に $0 \le x \le \pi$ のとき

$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots - \dfrac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \dfrac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} + R_{4n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{4n+2} \\ R_{4n+2} = \dfrac{-\sin(\theta x)\,x^{4n+2}}{(4n+2)!} \le 0 \qquad (0<\exists\theta<1) \end{cases}$$

であるから， $\sin x \le x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots - \dfrac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \dfrac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$ $(0 \le x \le \pi)$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\boxed{\text{略解}}$ 関数 $f(x) = \sin x$ の $x = \dfrac{\pi}{6}$ での一次 Taylor 多項式と剰余項 R_2 を求める．

$f(x) = f\big(\frac{\pi}{6}\big) + f'\big(\frac{\pi}{6}\big)\big(x - \frac{\pi}{6}\big) + \frac{1}{2!}f''\Big(\frac{\pi}{6} + \theta\big(x - \frac{\pi}{6}\big)\Big)\big(x - \frac{\pi}{6}\big)^2$ より

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\big(x - \dfrac{\pi}{6}\big) + R_2 \\ R_2 = -\dfrac{1}{2!}\cos\Big(\dfrac{\pi}{6} + \theta\big(x - \dfrac{\pi}{6}\big)\Big)\big(x - \dfrac{\pi}{6}\big)^2 . \end{cases}$$

$\sin 31^\circ = \sin\Big(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\Big)$ であるから， $\sin 31^\circ = f\Big(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\Big)$. このとき

$$\begin{cases} f\big(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\big) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\pi}{180} + R_2 = 0.5000 + \dfrac{1.73205\cdots\times 3.1415926\cdots}{360} + R_2 \\ \qquad = 0.5151\cdots + R_2 \\ R_2 = -\dfrac{1}{2}\sin\Big(\dfrac{\pi}{6} + \theta\dfrac{\pi}{180}\Big)\Big(\dfrac{\pi}{180}\Big)^2 \qquad (0 < \exists\theta < 1) . \end{cases}$$

ここで，$0 < \dfrac{\pi}{6} + \theta\dfrac{\pi}{180} < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180} < \dfrac{\pi}{2}$ より $-1 < R_2 < 0$ となる事に注意して

$$\left|R_2\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 < \left(\frac{10}{180}\right)^2 < \frac{1}{2} \times \frac{1}{180 \times 18} = \frac{1}{6480} < 0.0002$$

と評価されるので，$\sin 31^\circ = 0.51\cdots$.

さらに詳しく，　$0 < \dfrac{\pi}{6} + \theta\dfrac{\pi}{180} < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180} < \dfrac{\pi}{2}$ より $R_2 < 0$ となる事に注意して

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) < 0.5151\cdots < 0.6$$

がわかる．したがって

$$0 > R_2 = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\frac{\pi}{180}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 > -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 > -\frac{3}{10}\frac{10}{180^2} = -\frac{1}{10800}.$$

と評価されるので，$\sin 31^\circ = 0.515\cdots$.　　//

$\boxed{\textbf{13}}$ $\boxed{\text{略解}}$ e^{-x} の $2n-1$ 次 Maclaurin 多項式と剰余項は

$$\begin{cases} e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^k\dfrac{x^k}{k!} + \cdots - \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\frac{x^k}{k!} + R_{2n} \\ R_{2n} = \dfrac{e^{-\theta x}\,x^{2n}}{(2n)!} \ge 0 \qquad (0<\exists\theta<1) \end{cases}$$

であるから，　$e^{-x} \ge 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^k\dfrac{x^k}{k!} + \cdots - \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

同様に，e^{-x} の $2n$ 次 Maclaurin 多項式と剰余項は

$$\begin{cases} e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^k\dfrac{x^k}{k!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{x^k}{k!} + R_{2n+1} \\ R_{2n+1} = -\dfrac{e^{-\theta x}\,x^{2n+1}}{(2n+1)!} \le 0 \qquad (0<\exists\theta<1) \end{cases}$$

であるから，　$e^{-x} \le 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^k\dfrac{x^k}{k!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.　　//

2.13 $\boxed{\textbf{3}}$ $\boxed{\text{略解}}$ (1) $x = e^{\mu-\sigma^2}$ で最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ をとる．

(2) $t = \log x$ $(x > 0)$ と置いて極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\, e^t}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ を調べる．

3.1 $\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\frac{1}{6}x^6 - x^2 - x + C$ (2) $\frac{1}{3}\log|x| + C$ (3) $\frac{1}{12}\left(x^2+1\right)^6 + C$

(4) $\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$ (5) $\log|\sin^{-1}x|+C$ (6) $\sqrt{1+x^2}+C$ (7) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

(8) $\frac{1}{2}\left(\log x\right)^2+C$ (9) $\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\right)^2+C$ (10) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$ (11) $\sqrt{1+x^2}+C$

3.2 $\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\frac{1}{12}(3x+1)^4+C$ $\left(\text{置換積分 } t=3x+1,\quad dx=\frac{dt}{3}\right)$

(2) $\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$ (3) $-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C$ (4) $\frac{e^{4x+1}}{4}+C$

3.3 $\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C$

(2) $\int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$ (3) $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$

(4) $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C$ (5) $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$ (2) $-x\cos x+\sin x+C$ (3) $x\sin x+\cos x+C$

(4) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$ (5) $\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^2}{3}+C$ (6) $\frac{x^2\left(\log x\right)^2}{2}\log x-\int x\log x=\cdots$

3.4 $\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\int\frac{x^2-2x+1}{x-2}\,dx=\int\left(x+\frac{1}{x-2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\log|x-2|+C$ (2)

$$\int\frac{2x^2+x}{(x-2)(x^2+1)}\,dx=\int\frac{2(x^2+1)+x-2}{(x-2)(x^2+1)}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=2\log|x-2|+\tan^{-1}x+C.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $0<x<1$ であるから， $t=2x-1$ で置換積分する：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sin^{-1}t+C=\sin^{-1}(2x-1)+C$$

(2) 置換積分 $u=\sqrt{x-1}$ から， $\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1}+C$.

(3) 置換積分 $u=\sqrt{1+x}$ から， $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sinh^{-1}x+C$ (2) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\sin^{-1}x+C$

(3) $\frac{x}{\sqrt{1\pm x^2}}+C$ $\left(\text{Hint: }\int\frac{1}{(1\pm x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx+\int\frac{x^2}{(1\pm x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int\frac{1}{(1\pm x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx\right)$

(4) **3.4 D. 計算の技術** **無理関数の不定積分** **例 2** を参照. $t=x+\sqrt{1+x^2}$ によって置換積分して， $\log\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x+\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C$ を得る．または，置換積分 $t=\sqrt{1+x^2}$ から，

$\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C$ を得る．

(5) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx=\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx+\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ であるから，(4) より

$$\sqrt{1+x^2}+\log\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x+\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C\ .$$

または 置換積分 $t=\sqrt{1+x^2}$ から, $\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C$.

(6) 置換積分 $t=\sqrt{1-x^2}$ から, $\log\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+C=\log\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

(7) $t=\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$ とおいて置換積分を行う. $t^2=\dfrac{x-a}{b-x}$ より $x=\dfrac{bt^2+a}{t^2+1}$ となるから,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2bt\cdot(t^2+1)-(bt^2+a)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{2(b-a)t}{(t^2+1)^2}. \qquad b-x=\frac{b-a}{t^2+1}>0 \text{ であるから}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx=\int\frac{1}{(b-x)\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}}\,dx=\int\frac{1}{(b-x)t}\frac{2(b-a)t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$=\int\frac{t^2+1}{(b-a)t}\frac{2(b-a)t}{(t^2+1)^2}\,dt=\int\frac{2}{t^2+1}\,dt=2\tan^{-1}t+C.$$

従って
$$\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx=2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C.$$

別に, $b-a>0$ なので $x-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}\sin\theta$ とおいて置換積分を行うと,

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx=\sin^{-1}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)+C \qquad (a<x<b)$$

という解の表現が得られる. $a<x<b$ のとき, $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}=\dfrac{\pi}{2}+\sin^{-1}\dfrac{2x-a-b}{b-a}$ が成り立っているのである.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}+C$ (2) $\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left[\dfrac{(a-b)\tan\dfrac{x}{2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]+C$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left[\dfrac{a\tan\dfrac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]+C$

(4) $-\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{b\sin x}{a+b\cos x}\right)+\dfrac{2a}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left[\dfrac{(a-b)\tan\dfrac{x}{2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]+C$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (2) $I_n=\displaystyle\int\tan^n x\,dx$ とする. $-1+\big(\tan x\big)'=-1+\dfrac{1}{\cos^2 x}=\tan^2 x$ に注意すると,

$$\begin{aligned} I_n &= \int\tan^n x\,dx=\int\left(\tan^{n-2}x\right)\Big(-1+\big(\tan x\big)'\Big)\,dx \\ &= -\int\tan^{n-2}x\,dx+\int\left(\tan^{n-2}x\right)\big(\tan x\big)'\,dx=-I_{n-2}+\frac{\tan^{n-1}x}{n-1} \qquad (n\geq 2). \quad // \end{aligned}$$

3.5 A. $\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 微分方程式 $\dfrac{dv}{dt}=-g-kv$ は変数分離形であるから, 解は $\displaystyle\int\frac{dv}{g+kv}=\int(-1)\,dt+C$ を満たす. 故に $\dfrac{1}{k}\log(g+kv)=-t+C$ から $v(t)=\dfrac{e^{-kt}e^{kC}-g}{k}$. $t=0$ のとき $v(0)=v_0$ であるから, $v_0=\dfrac{e^{kC}-g}{k}$. 故に $v(t)=\left(v_0+\dfrac{g}{k}\right)e^{-kt}-\dfrac{g}{k}$. // (2) $-\dfrac{g}{k}$.

B. $\boxed{2}$ (1) 与えられたグラフから，約 10 cm .　　(2) a .

(3) $m \neq 1$ の場合には，$y = a\big(1-(1-m)b\,e^{-kt}\big)^{\frac{1}{1-m}}$ から

$$y' = \frac{a}{1-m}\big(1-(1-m)b\,e^{-kt}\big)^{\frac{1}{1-m}-1}\times(1-m)bk\,e^{-kt} = a\big(1-(1-m)b\,e^{-kt}\big)^{\frac{m}{1-m}}\cdot bk\,e^{-kt} = a^{1-m}bk\,e^{-kt}\,y^m.$$

また　$\dfrac{y^{1-m}}{a^{1-m}} = 1-(1-m)b\,e^{-kt}$　すなわち　$b\,e^{-kt} = \dfrac{1}{1-m}\Big(1-\dfrac{y^{1-m}}{a^{1-m}}\Big).$

$$\therefore \quad y' = a^{1-m}bk\,e^{-kt}\,y^m = a^{1-m}ky^m\,\frac{1}{1-m}\Big(1-\frac{y^{1-m}}{a^{1-m}}\Big) = -\frac{k\,y}{m-1}\Big(\frac{y^{m-1}}{a^{m-1}}-1\Big).$$

$m=1$ の場合には，$y = f_1(t) = ae^{-b\,e^{-kt}}$ であるから $y' = abk\,e^{-kt}\,e^{-b\,e^{-kt}} = bk\,e^{-kt}\,y$ が成り立っている．$\log\dfrac{y}{a} = -b\,e^{-kt}$ であるから $y' = bk\,e^{-kt}\,y = k\Big(-\log\dfrac{y}{a}\Big)y = -ky\log\dfrac{y}{a}$ が成り立っている．

(4) **2.10 C.** $\boxed{3}$ により，$\lim\limits_{m\to 1} f_m(t) = f_1(t)$ が成り立っている．正の数 a に対し $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^t-1}{t} = \log a$ (**2.3 B. 参照**) であるから，

$$\lim_{m\to 1} f'_m(t) = -\lim_{m\to 1} k\,f_m(t)\,\frac{\Big(\dfrac{f_m(t)}{a}\Big)^{m-1}-1}{m-1} = -kf_1(t)\log\frac{f_1(t)}{a} = f'_1(t). \qquad //$$

C. $\boxed{3}$

(1) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$　(2) $y^2 = x^2 + C$　(3) $y = Cx$　(4) $y = \dfrac{1}{1-Ce^x}$　(5) $y = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$

$\boxed{4}$ $V(100) = \dfrac{V(0)}{2}$ という条件から，$h(100) = \dfrac{h(0)}{2}$ となることに注意する．
さて，微分方程式 $h' = \dfrac{C}{\pi S}\sqrt{h}$ から $\dfrac{h'}{\sqrt{h}} = 2\Big\{\sqrt{h}\Big\}' = \dfrac{C}{\pi S}$ となるから，

$\sqrt{h(t)} = \dfrac{Ct}{2\pi S} + C_0 \quad (C_0 \in \mathbf{R})$ が成り立つ．これから

$$\sqrt{h(0)} = C_0\,, \qquad \sqrt{\frac{h(0)}{2}} = \sqrt{h(100)} = \frac{100C}{2\pi S} + C_0$$

がなりたち，$\dfrac{C}{2\pi S} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{200}C_0$ となる．故に $\sqrt{h(t)} = \dfrac{(\sqrt{2}-2)}{200}C_0\,t + C_0$ ．方程式 $h(t)=0$ の解は $t = \dfrac{200}{2-\sqrt{2}} = 100(2+\sqrt{2}) = 341.4\cdots$ であるから，約 241 分後に空になる．　//

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)$ の単調増加有界性によって，数列 $\Big\{f(a+n)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加有界数列となる．実数の連続性により，有限な極限値 $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f(a+n)$ が存在する．この数列の収束から，任意の正の数 ϵ に対してある番号 N が取れて $\alpha - \epsilon < f(a+N) \leq \alpha$ となることがわかる．このとき，関数 $f(x)$ の単調増加性により

$$x > a+N \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha - \epsilon < f(a+N) \leq f(x) \leq \lim_{n\to\infty} f(a+n) = \alpha$$

が成り立つ．これは，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ を意味している．　　//

3.6　A. $\boxed{1}$　$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\ .$$

$\boxed{2}$　$\displaystyle\max_{a\le x\le b}|f'(x)| = M < \infty$ であるから，平均値の定理により (参照．**2.9 B.** $\boxed{6}$)

$$\bigl|f(x')-f(x)\bigr| \le M\bigl|x'-x\bigr| \qquad (a \le \forall x,\, x' \le b).$$

閉区間 $[a,b]$ の n 等分 $a=a_0<a_1=a+\dfrac{b-a}{n}<\cdots<a_{n-1}=a+(n-1)\dfrac{b-a}{n}<a_n=b$ に対する関数 $f(x)$ $(a\le x\le b)$ のリーマン和を S_n とするとき，

$$\begin{aligned}
\Bigl|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\Bigr| &= \Bigl|\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx - f(a_k)\frac{b-a}{n}\Bigr| \le \sum_{k=1}^{n}\Bigl|\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx - f(a_k)\frac{b-a}{n}\Bigr| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Bigl|\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)-f(a_k)\,dx\Bigr| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\bigl|f(x)-f(a_k)\bigr|\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\frac{M(b-a)}{n}\,dx = \int_a^b \frac{M(b-a)}{n}\,dx = \frac{M(b-a)^2}{n}. \quad //
\end{aligned}$$

D. $\boxed{1}$　三角関数の和積公式 $\sin x - \sin x' = 2\cos\dfrac{x+x'}{2}\sin\dfrac{x-x'}{2}$ が成り立っている．また $|\sin x| \le |x|$ であるから，任意の正の数 ϵ に対して正の数 $\delta=\epsilon$ と取ると

$$a \le x,\, x' \le b \quad で \quad |x-x'| \;<\; \delta \quad \Longrightarrow \quad |\sin x - \sin x'| \;\le\; 2\Bigl|\sin\frac{x-x'}{2}\Bigr| \;<\; 2\cdot\frac{\delta}{2} = \epsilon$$

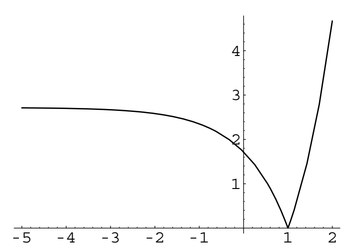
が成り立つ．　　//

3.7　B. $\boxed{1}$　(1) $\dfrac{29}{6}$　　(2) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$　　(3) $\log\dfrac{3}{2}$　　(4) $\dfrac{4(2+\sqrt{2})}{3}$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\int_0^1 \sin m\pi x\,\sin n\pi x\,dx = \int_0^1 \frac{\cos(m-n)\pi x - \cos(m+n)\pi x}{2}\,dx = \cdots = \begin{cases} 0 & (m\ne n) \\ \frac{1}{2} & (m=n). \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 0 & (m\ne n) \\ \frac{1}{2} & (m=n) \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} 0 & (m\ne n) \\ \pi & (m=n) \end{cases}$　　(4) 0　　(5) $\begin{cases} 0 & (m\ne n) \\ \pi & (m=n) \end{cases}$

$\boxed{3}$　(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$



$\boxed{4}$　$\displaystyle\int_0^2 |e^x - e|\,dx = \int_0^1 \bigl\{e - e^x\bigr\}\,dx + \int_1^2 \bigl\{e^x - e\bigr\}\,dx$

$= \ e^2 - 2e - 1$　　　　右図は $y = |e^x - e|$.

C. $\boxed{1}$　(1)　$3f(3x+1)$　　(2)　$F(x) = \displaystyle\int f(t)\ dt$ とすると，

$$\frac{d}{dx}\Bigl(\int_{2x}^{x^2} f(t)\ dt\Bigr) = \frac{d}{dx}\Bigl\{F(x^2) - F(2x)\Bigr\} = 2xf(x^2) - 2f(2x)\ . \qquad //$$

$\boxed{2}$　$F(x) = x\displaystyle\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$ であるので, 微分積分学の基本定理と関数の積に対する微分法則から

$$F'(x) = \left\{x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right\}' = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt,$$
$$F''(x) = \left\{\int_0^x f(t)dt\right\}' = f(x).$$

3.8 B. $\boxed{1}$ 置換積分 $t = e^x,\ dx = \dfrac{dt}{t}$ を施して，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx = 1+\log 2-\log(e+1)$.

$\boxed{3}$ (1) 置換積分 $x = t + \dfrac{\pi}{2},\quad dx = dt$ を施して，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\ dx\ .$$

3.8 定積分の計算 B. $\boxed{2}$ より，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\ dx$ であるから，

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx\ . \qquad //$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\ dx - \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\ dx = \int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(\sin x)\ dx$ を考える．

$y = x - \dfrac{\pi}{2},\quad dy = dx$ として置換積分すると，奇関数の定積分となるので

$$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(\sin x)\ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} yf\left(\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\ dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} yf(\cos y)\ dy = 0\ . \qquad //$$

C. $\boxed{4}$ 置換積分 $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma},\quad dt = \dfrac{dx}{\sigma}$ を行う．

3.9 C. $\boxed{1}$ (1) $\dfrac{4x}{x^3+x^2+x+1}$ を部分分数へ分解する．

$$\frac{4x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{4x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{(a+b)x^2+(b+c)x+a+c}{(x+1)(x^2+1)}$$ が成り立つためには，

$a+b=0,\ b+c=4,\ a+c=0$ を解いて $a=-2,\ b=c=2$ とすればよい．従って，

$$\int \frac{4x\,dx}{(x+1)(x^2+1)} = \int\left\{-\frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right\}dx$$
$$= -2\log|x+1| + \log(x^2+1) + 2\tan^{-1}x + C = \log\frac{x^2+1}{(x+1)^2} + 2\tan^{-1}x + C.$$

$$\therefore\quad \int_0^1 \frac{4x}{x^3+x^2+x+1}dx = \left[\log\frac{x^2+1}{(x+1)^2} + 2\tan^{-1}x\right]_0^1 = \log\frac{2}{4} + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \log 2\ .$$

(2) 部分分数分解 $\dfrac{1}{(t^2-1)^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{(t+1)^2} - \dfrac{2}{t^2-1}\right\}$ から，

$$\int_a^b \frac{1}{(t^2-1)^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_a^b\left\{\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{t^2-1}\right\}dt$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_a^b = \frac{1}{4}\left\{\frac{2(ab+1)(b-a)}{(a^2-1)(b^2-1)} + \log\frac{(1-a)(1+b)}{1+a)(1-b)}\right\}.$$

(3)　三角関数について $\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$ が成り立っていることから，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(4) $$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan x\,dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{12}} = -\log\cos\frac{\pi}{12}.$$

ここで　$\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan x\,dx = -\log\cos\frac{\pi}{12} = -\log\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \log(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$

注意.　$\dfrac{1}{2}\log 4\big(2-\sqrt{3}\big) = \log\big(\sqrt{6}-\sqrt{2}\big).$

(5)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ を求めるために，　$t = \tan\dfrac{x}{2}$ によって置換積分する.

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,　$dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$　であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int\left\{\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right\}dt \\ &= -\log|1-t| + \log|1+t| = \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C.\end{aligned}$$

$\Big($または, $t = \sin x$ によって置換積分して, $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.\Big)$

$$\therefore\quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \left[\log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-+\tan\frac{x}{2}}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \log\left|\frac{1+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{6}}\right| - \log 1 = \log\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right| = \log(2+\sqrt{3}).$$

(6)　$t = \sqrt{x-1}$ とおいて置換積分を行う．$t^2 = x-1$, $2t\,dt = dx$ であるから，

$$\int_a^b \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx = \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \sqrt{t^2+1}\,dt.$$

3.4　C.　巧妙な計算 無理関数の不定積分の例 例 4 を参照して，

$$\begin{aligned}\int \sqrt{t^1+1}\,dt &= \frac{1}{2}\big(t\sqrt{t^2+1} + \log|t+\sqrt{t^2+1}|\big) + C \qquad \text{であるから，} \\ \int_a^b \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx &= \Big[t\sqrt{t^2+1} + \log|t+\sqrt{t^2+1}|\Big]_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \\ &= \sqrt{b(b-1)} + \log|\sqrt{b-1}+\sqrt{b}| - \sqrt{a(a-1)} - \log|\sqrt{a-1}+\sqrt{a}| \\ &= \sqrt{b(b-1)} - \sqrt{a(a-1)} + \log\left|\frac{\sqrt{b-1}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a}}\right|. \qquad //\end{aligned}$$

(7) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = -\int \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx + \int \frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx$ と考えて，つぎを示す：

$$\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = -\sqrt{2ax-x^2} + \int \frac{a}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}\,dx = -\sqrt{2ax-x^2} - a\sin^{-1}\Bigl(1-\frac{x}{a}\Bigr) + C.$$

このことから， $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = \Bigl(\frac{\pi}{2}-1\Bigr)a$.

または， $x = a(1-\cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ と考えて置換積分法を使いつぎを導く：

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = \int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(1-\cos\theta)\,d\theta = a\Bigl[\theta-\sin\theta\Bigr]_0^{\frac{\pi}{2}} = a\Bigl(\frac{\pi}{2}-1\Bigr).$$

3.4 D. 計算の技術 $\boxed{\text{三角関数の不定積分}}$ $\boxed{5}$ の解より， (8) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

また (9) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{(2+\cos x)^2}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) **3.4 D. 計算の技術** $\boxed{\text{有理関数の不定積分}}$ $\boxed{\text{例 3}}$ を参照して

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \Bigl\{\frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\Bigr\}\,dx = \frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\Bigl(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigr) + C.$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \Bigl[\frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\Bigl(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigr)\Bigr]_0^1 = \frac{\log 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(2) (1) $x^4+4 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4+4} &= \frac{1}{8}\int\Bigl\{\frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2}\Bigr\}\,dx = \frac{1}{8}\int\Bigl\{\frac{x+2}{(x+1)^2+1} - \frac{x-2}{(x-1)^2+1}\Bigr\}\,dx \\ &= \frac{1}{8}\Bigl(\log\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2} + \tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1)\Bigr) + C.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^4+4} = \frac{1}{8}\Bigl[\frac{1}{2}\log\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2} + \tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1)\Bigr]_0^1 = \frac{\log 5}{16} + \tan^{-1} 2.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+R^2}}\,dx$ を $t = \sqrt{a^2-2ax+R^2} = \sqrt{(a-x)^2+R^2-x^2} \geq 0$ と置いて

置換積分する； $x = \dfrac{a^2+R^2-t^2}{2a}$, $dx = -\dfrac{t}{a}\,dt$ であるから，

$$\int \frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+R^2}}\,dx = \int \frac{a-\frac{a^2+R^2-t^2}{2a}}{t}\Bigl(-\frac{t}{a}\Bigr)\,dt = \int\Bigl\{-\frac{1}{2}+\frac{R^2}{2a^2}-\frac{t^2}{2a^2}\Bigr\}\,dt = -\frac{t}{2}+\frac{R^2t}{2a^2}-\frac{t^3}{6a^2}+C.$$

したがって
$$\int_{-R}^{R} \frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+R^2}}\,dx = \begin{cases} \Bigl[-\dfrac{t}{2}+\dfrac{R^2t}{2a^2}-\dfrac{t^3}{6a^2}\Bigr]_{a+R}^{a-R} = 2R - \dfrac{2R^3}{3\,a^2} & (0 < R \leq a) \\[2ex] \Bigl[-\dfrac{t}{2}+\dfrac{R^2t}{2a^2}-\dfrac{t^3}{6a^2}\Bigr]_{R+a}^{R-a} = \dfrac{4a}{3} & (0 \leq a < R).\end{cases}$$

3.10 A. $\boxed{1}$ (1) $\dfrac{1}{2}e^{-a^2}$ (2) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{a}{2}$

B. $\boxed{2}$ $\boxed{\text{略解}}$ (1) 1 (2) $\dfrac{\pi}{2}$

(3) 置換積分 $x=at^2,\quad dx=2adt$ を施して, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}(a+x)}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt=\pi.$

(4) 置換積分 $x=e^t,\quad dx=e^t dt$ を施して, $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}\log x\,dx=-\frac{1}{a^2}$.

C. $\boxed{1}$ (1) **3.9 C.** $\boxed{2}$ (1) の解答を参照して, $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

(2) **3.9 C.** $\boxed{2}$ (2) の解答を参照して, $x=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ で置換積分して

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{dt}{\frac{t^4}{4}+1}=\frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{dt}{t^4+4}\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{8}\lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{2}\log\frac{t^2+2t+2}{t^2-2t+2}+\tan^{-1}(t+1)+\tan^{-1}(t-1)\right]_0^M=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.\end{aligned}$$

(3) **3.4 D.** $\boxed{e^{ax}\cos bx \textbf{ の不定積分}}$ を参照して,

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos\omega x\,dx=\lim_{M\to\infty}\left[\frac{e^{-kx}}{k^2+\omega^2}(-k\cos\omega x+\omega\sin\omega x)\right]_0^M=\frac{k}{k^2+\omega^2}\quad(k>0,\omega>0).$$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2}\,dx=2\lim_{M\to\infty}\int_0^M x^2e^{-x^2}\,dx$ である．部分積分して

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2}\,dx &= 2\lim_{M\to\infty}\int_0^M x^2e^{-x^2}\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M -x\left(-2xe^{-x^2}\right)dx\\ &= \lim_{M\to\infty}\left\{\left[-x\,e^{-x^2}\right]_0^M+\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right\}=\lim_{M\to\infty}\left\{-M\,e^{-M^2}+\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right\}.\end{aligned}$$

ロピタルの定理を使って, $\displaystyle\lim_{M\to\infty}-M\,e^{-M^2}=\lim_{M\to\infty}-\frac{M}{e^{M^2}}=\lim_{M\to\infty}-\frac{1}{2Me^{M^2}}=0$.

$$\therefore\qquad \int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2}\,dx=\lim_{M\to\infty}\left\{-M\,e^{-M^2}+\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right\}=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\qquad //$$

(2) $-\infty<y=\dfrac{\log x-\mu}{\sigma}<\infty$ $\left(dy=\dfrac{dx}{\sigma x}\right)$ と置き，置換積分を行う． 1 .

D. $\boxed{3}$ $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}+x}\le\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{e}{2\pi}}<1$ $\Big(\because\ -\dfrac{x^2}{2}+x=$ $\dfrac{1-(x-1)^2}{2}\le\dfrac{1}{2}\Big)$ であるから, $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx<\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1<\infty$. これは広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ の収束を示す． //

$\boxed{\mathbf{4}}$ 連続関数 $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ の広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ が収束しているから,

$x = \log y$ $(0 < y < \infty)$, $dx = \dfrac{dy}{y}$ で置換積分して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty,\ b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty,\ b\to\infty}\int_{e^a}^{e^b} \frac{f(\log y)}{y}\,dy = \int_0^{\infty}\frac{f(\log y)}{y}\,dy$$

も収束することがわかる. //

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^2}$ $(x > 0)$ は $f(0) = 1$ と定義すると区間 $[0,\infty)$ 上での連続関数に拡張されることを示し, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x^2}{x^2}\,dx = \int_0^1\frac{\sin x^2}{x^2}\,dx + \int_1^{\infty}\frac{\sin x^2}{x^2}\,dx$ の収束を示せ.

3.11 B. $\boxed{\mathbf{1}}$

(1) πab (2) $\dfrac{4\pi ab^2}{3}$

(3) Asteroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ の y 軸のまわりの回転体の対称性から, その体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^a x^2\,dy = 2\pi\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^3 dy = 2\pi\int_0^a\left\{a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right\}dx \\ &= \left[a^2x - 3a^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \cdots = \frac{32}{105}\pi a^3. \qquad // \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\dfrac{8}{27}\left\{\left(1+\dfrac{9}{4}a\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right\}$ (2) $a\sqrt{a^2+\dfrac{1}{4}} + \dfrac{1}{4}\log\left|a + \sqrt{a^2+\dfrac{1}{4}}\right| + \dfrac{\log 2}{4}$

(3) $\log\left|\dfrac{e^a + \sqrt{1+e^{2a}} - 1}{e^a + \sqrt{1+e^{2a}} + 1}\right| + \sqrt{1+e^{2a}} + \log(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}$ (4) $\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}}\right)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\dfrac{a}{2}\left(a\sqrt{a^2+1} + \log|a + \sqrt{a^2+1}|\right)$

(2) カージオイド $r = a(1+\cos\theta)$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の長さは $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta =$
$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$

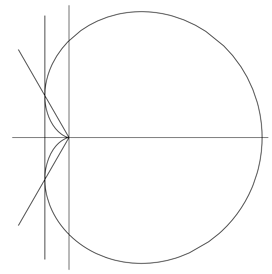
$$= 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta = 4a\int_0^{\pi}\left|\cos t\right|dt = 8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt = 8a\ .$$

(3) $4\left(1 - \cos\dfrac{a}{2}\right)$.

3.11 C. $\boxed{6}$

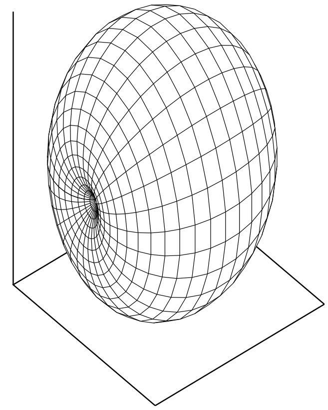
$\boxed{\text{略解}}$ Cardioid $r = a(1+\cos\theta)$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ 上の点 $(x(\theta), y(\theta))$ に対して,

$$\begin{cases} x(\theta) = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ x'(\theta) = -a(1+2\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$



であるから，次の増減表が成り立つ.

θ	-π	$\cdots$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
x'		-	0	+	0	-	0	+	
x	0	$\searrow$	$-\frac{a}{4}$	$\nearrow$	$2a$	$\searrow$	$-\frac{a}{4}$	$\nearrow$	0



パラメータ θ の区間 $[0, \dfrac{2}{3}\pi]$ と $[\dfrac{2}{3}\pi, \pi]$ に対応する Cardioid の部分は

$$\begin{cases} x(\theta) = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = a(1+\cos\theta)\sin\theta = y_1(\theta) \quad \left(0 \le \theta \le \dfrac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$$

と

$$\begin{cases} x(\theta) = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = a(1+\cos\theta)\sin\theta = y_2(\theta) \quad \left(\dfrac{2}{3}\pi \le \theta \le \pi\right) \end{cases}$$

で現されるから，回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{a}{4}}^{2a} \pi y_1^2\,dx - \int_{-\frac{a}{4}}^{0} \pi y_2^2\,dx \\
&= \pi \int_{\frac{3\pi}{2}}^{0} a^2(1+\cos\theta)^2 \sin^2\theta\Big(-a(1+2\cos\theta)\sin\theta\Big)\,d\theta - \pi \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\Big(-a(1+2\cos\theta)\sin\theta\Big)\,d\theta \\
&= \pi a^3 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\Big((1+2\cos\theta)\sin\theta\Big)\,d\theta + \pi a^3 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\Big((1+2\cos\theta)\sin\theta\Big)\,d\theta \\
&= \pi a^3 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\Big((1+2\cos\theta)\sin\theta\Big)\,d\theta = \pi a^3 \int_0^{\pi} \Big(1+4\cos\theta+5\cos^2\theta+2\cos^3\theta\Big)\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \pi a^3 \int_0^{\pi} \Big(6+6\cos\theta-5\sin^2\theta-2\cos\theta\sin^2\theta\Big)\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \pi a^3 \left[\frac{6}{4}\sin^4\theta - \frac{2}{6}\sin^6\theta\right]_0^{\pi} + 6\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta - 5\pi a^3 \int_0^{\pi}\sin^5\theta\,d\theta \\
&= 12\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,d\theta - 10\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\,d\theta = 12\pi a^3\frac{2}{3} - 10\pi a^3\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8\pi a^3}{3}. \qquad //
\end{aligned}$$

7 サイクロイドの坂の途中の点 $\mathrm{A}\big(x(\theta_0), y(\theta_0)\big)$ から滑り落ち始めて後の点 $\big(x(\theta), y(\theta)\big)$ での速度を $v(\theta)$ とすると，エネルギー保存則から

$$\frac{m\,v(\theta)^2}{2} = mg\big(y(\theta_0) - y(\theta)\big)$$

でなければならない．したがって，

$$v(\theta) = \sqrt{2g\big(y(\theta_0) - y(\theta)\big)} = \sqrt{2g\big(a + a\cos\theta_0 - (a + a\cos\theta)\big)} = \sqrt{2ga(\cos\theta_0 - \cos\theta)}.$$

さて，所要時間 T は $T = \displaystyle\int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}}{v(\theta)}\,d\theta$ によって計算される．このことは，速度 $v(\theta)$ が一定速度 v である場合には明らかであろう．また，この坂を表示するパラメータ θ が時刻 t の単調増加関数として $\theta = \theta(t)$ $(0 \leq t \leq T)$, $\theta(0) = 0$, $\theta(T) = \pi$ と関係付けられる場合には

$$v(\theta) = v(\theta(t)) = \sqrt{x'(\theta(t))^2 + y'(\theta(t))^2}\,\theta'(t) = v(t)$$

となっているから $\theta = \theta(t)$, $d\theta = \theta'(t)\,dt$ として置換積分すると

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}}{v(\theta)}\,d\theta = \int_0^T \frac{\theta'(t)\,dt}{\theta'(t)} = \int_0^T 1\,dt = T$$

のように説明することもできる．

このサイクロイドの坂のパラメータ表示から，

$$\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} = \sqrt{(a - a\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2} = \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos\theta} = a\sqrt{2(1 - \cos\theta)}.$$

であるから，

$$\begin{aligned}
T &= \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}}{v(\theta)}\,d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{a\sqrt{2(1 - \cos\theta)}}{\sqrt{2ga(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}\,d\theta \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos\theta}}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}\,d\theta = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sqrt{2}\,\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{(1 + \cos\theta_0) - (1 + \cos\theta)}}\,d\theta \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{\theta_0}{2} - \cos^2\dfrac{\theta}{2}}}\,d\theta\,.
\end{aligned}$$

$$u = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta_0}{2}}\,, \qquad du = -\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{2\cos\dfrac{\theta_0}{2}}\,d\theta \qquad \text{として置換積分すると，}$$

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_1^0 \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{\theta_0}{2} - \cos^2\dfrac{\theta}{2}}} \cdot \left(-\frac{2\cos\dfrac{\theta_0}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right) du = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{2\cos\dfrac{\theta_0}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{\theta_0}{2} - \cos^2\dfrac{\theta}{2}}}\,du \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1 - u^2}}\,du = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\Big[\sin^{-1} u\Big]_0^1 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\,.
\end{aligned}$$

注意. この計算から，時間 T は滑り始めの位置 $\mathrm{A}\big(x(\theta_0), y(\theta_0)\big)$ によらないことがわかる．

3.12 D. $\boxed{3}$ $s>0$ のとき，置換積分によって $\displaystyle\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$ を示せ．

3.13 A. **シュワルツ (Schwarz) の不等式** 略解

任意の実数 t に対して，関数 $f(x)\equiv 0$ または $g(x)\equiv 0$ のときは明らかである．そうではないとする．任意の実数 t に対して x の関数 $\varphi_t(x) = \bigl(tf(x)+g(x)\bigr)^2\ (a\le x\le b)$ を考える．

明らかに，$\varphi_t(x)\ge 0\ (a\le x\le b)$ であるから $\displaystyle\int_a^b \varphi_t(x)\,dx \ge 0$．このとき

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi_t(x)\,dx &= \int_a^b \bigl\{t^2 f(x)^2 + 2tf(x)g(x) + g(x)^2\bigr\}\,dx \\ &= t^2\Bigl(\int_a^b f(x)^2\,dx\Bigr) + 2t\Bigl(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Bigr) + \int_a^b g(x)^2\,dx \ \ge\ 0.\end{aligned}$$

ここで t は任意の実数を取ることができるから，定積分 $\displaystyle\int_a^b \varphi_t(x)\,dx$ から t の二次式が得られた．この二次式の値がが非負であることから，二次方程式

$$t^2\int_a^b f(x)^2\,dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g(x)^2 dx = 0$$

の判別式

$$\frac{D}{4} = \Bigl(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Bigr)^2 - \Bigl(\int_a^b f(x)^2\,dx\Bigr)\Bigl(\int_a^b g(x)^2\,dx\Bigr) \le 0$$

が成り立つ，すなわち

$$\Bigl(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Bigr)^2 \le \Bigl(\int_a^b f(x)^2\,dx\Bigr)\Bigl(\int_a^b g(x)^2\,dx\Bigr).$$

連続関数 $f(x), g(x)$ として連続関数 $|f(x)|, |g(x)|$ を考えると

$$\Bigl(\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx\Bigr)^2 \le \Bigl(\int_a^b f(x)^2\,dx\Bigr)\Bigl(\int_a^b g(x)^2\,dx\Bigr)$$

が得られる．平方根を取って，シュワルツ (Schwarz) の不等式が示される． //

$\boxed{1}$ 略解 最後の不等式は，Schwarz 不等式を使って

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^n}\,dx \le \Bigl(\int_0^1 1\,dx\Bigr)^{\frac12}\Bigl(\int_0^1 \bigl\{1-x^n\bigr\}\,dx\Bigr)^{\frac12} = \Bigl(\Bigl[x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigr]_0^1\Bigr)^{\frac12} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\ . \qquad //$$

$\boxed{2}$ 略解 $\displaystyle 1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0<x\le\frac12)$ であるから，

$$\frac12 < \int_0^{\frac12}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \le \int_0^{\frac12}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Bigl[\sin^{-1}x\Bigr]_0^{\frac12} = \sin^{-1}\frac12 = \frac{\pi}{6} < 0.524\ . \qquad //$$

$\boxed{3}$ 略解 つぎの計算に決着させる：

$$1 < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^\infty \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^2} = 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \cdots = 2\ . \qquad //$$

B. $\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\text{略解}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+bn^2}<\int_0^{\infty}\frac{1}{a+bx^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}.$ //

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\boxed{\text{略解}}$ $f(x),\ g(x)\ \ (a\le x\le b)$ を連続関数とし， $p,\ q>1,\ \ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ とする．$x_i=a+\dfrac{b-a}{n}\ \ (i=1,2,\cdots,n)$ と置くと，Hölder の不等式 (**2.13 極値と不等式**) から

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)||g(x_i)|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

このとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ より $\dfrac{b-a}{n}=\left(\dfrac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\dfrac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$ となるので

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)||g(x_i)|\frac{b-a}{n}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|^p\ \frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)|^q\ \frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

区分求積法から，

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)g(x)|\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)||g(x_i)|\frac{b-a}{n}\\ &\le \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|^p\ \frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)|^q\ \frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad //\end{aligned}$$

C. $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\text{略解}}$ 有界閉区間 $[a,\,b]$ 上の連続な関数 $\big|f(x)\big|$ の最大値を $M=\max\limits_{a\le x\le b}\big|f(x)\big|$ と置く．$\big|f(x)\big|\le M\ (a\le x\le b)$ であるから

$$\left\{\int_a^b\big|f(x)\big|^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}\le\left\{\int_a^b M^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}=M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

故に，**1.2 C.** $\boxed{4}$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b\big|f(x)\big|^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}\le\lim_{n\to\infty}M(b-a)^{\frac{1}{n}}=M\,.$$

つぎに，関数 $f(x)$ は連続であるから，**1.10 B. 最大値・最小値定理** により $M=\big|f(x_0)\big|$ となる $x_0\in[a,\,b]$ が取れる．関数 $\big|f(x)\big|$ の連続性から，任意に小さい正の数 ϵ に対してある正の数 δ を

$$x_0\le x\le x_0+\delta\qquad\Longrightarrow\qquad\big|f(x)\big|>M-\epsilon$$

または

$$x_0-\delta\le x\le x_0\qquad\Longrightarrow\qquad\big|f(x)\big|>M-\epsilon$$

が成り立つように取れる．それぞれの場合に

$$\left\{\int_a^b \left|f(x)\right|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \quad \geq \quad \left\{\int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(M-\epsilon \quad\right)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} = \left(M-\epsilon\right)\delta^{\frac{1}{n}}$$

または

$$\left\{\int_a^b \left|f(x)\right|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \quad \geq \quad \left\{\int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(M-\epsilon\right)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} = \left(M-\epsilon\right)\delta^{\frac{1}{n}}$$

が成り立つ．故に

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b \left|f(x)\right|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n\to\infty}\left(M-\epsilon\right)\delta^{\frac{1}{n}} = M-\epsilon \qquad (\forall\epsilon>0)\,.$$

これは

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b \left|f(x)\right|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \geq M$$

を意味しているから， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b \left|f(x)\right|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} = M$ が示された． //

D. $\boxed{\mathbf{1}}$ 略解． $0<a<b<\pi$ のとき，閉区間 $[a,\,b]$ 上の C^1 級の関数 $f(x)$ について

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \;\leq\; \left[\frac{-f(x)^2\cos x}{\sin x}\right]_a^b + \int_a^b f'(x)^2\,dx$$

が成り立っている (**3.13 D.** $\boxed{\textbf{例}}$) から，

$$\int_0^\pi f(t)^2\,dt = \lim_{a\to 0,\,b\to\pi}\int_a^b f(t)^2\,dt \leq \lim_{a\to 0,\,b\to\pi}\left[\frac{-f(t)^2\cos t}{\sin t}\right]_a^b + \lim_{a\to 0,\,b\to\pi}\int_a^b f'(t)^2\,dt.$$

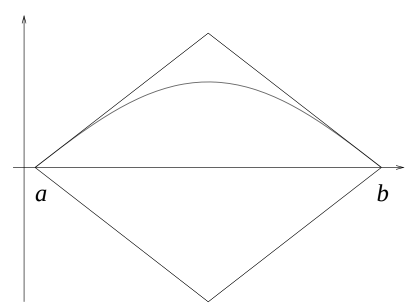
ここで， $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)^2}{\sin t} = \lim_{t\to+0}\frac{2f(t)f'(t)}{\cos t} = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{t\to\pi-0}\frac{f(t)^2}{\sin t} = \lim_{t\to\pi-0}\frac{2f(t)f'(t)}{\cos t} = 0$

に注意して，

$$\int_0^\pi f(t)^2\,dt \;\leq\; \lim_{a\to 0,\,b\to\pi}\int_a^b f'(t)^2\,dt = \int_0^\pi f'(t)^2\,dt.$$

が得られる． //

$\boxed{\mathbf{2}}$ 略解． $M = \displaystyle\max_{a\leq x\leq b}\left|f'(x)\right|$ と置く．



$f(a)=f(b)=0$ が成り立っているから

$\left|f(x)\right| \leq M(x-a)$ かつ $\left|f(x)\right| \leq M(b-x)$ $(a\leq x\leq b)$

が成り立つ (参考． **2.9 B.** $\boxed{6}$) **ので，**

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|f(x)\right| dx &= \int_0^{\frac{a+b}{2}} \left|f(x)\right| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left|f(x)\right| dx \leq \int_0^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\,dx \\ &= M\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^{\frac{a+b}{2}} + M\left[-\frac{(b-x)^2}{2}\right]_{\frac{a+b}{2}}^b \\ &= M\frac{(b-a)^2}{8} + M\frac{(b-a)^2}{8} = M\frac{(b-a)^2}{4}\;.\end{aligned}$$

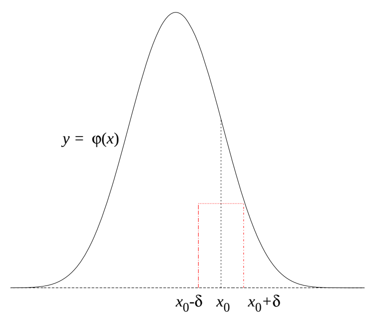
$$\therefore \qquad \max_{a\le x\le b} \left|f'(x)\right| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b \left|f(x)\right| dx\,. \qquad //$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 略解． 関数 $\varphi(x)$ が C^1 級で単調増加関数であるから，$\varphi'(x)\ge 0\ (0\le x\le 1)$ で

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha\varphi(x)\,dx-\frac{1}{\alpha+1}\int_0^1\varphi(x)\,dx &= \int_0^1\Big(x^\alpha-\frac{1}{\alpha+1}\Big)\varphi(x)\,dx\\ &= \left[\frac{x^{\alpha+1}-x}{\alpha+1}\varphi(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{\alpha+1}-x}{\alpha+1}\varphi'(x)\,dx\\ &= \int_0^1\frac{x(1-x^\alpha)}{\alpha+1}\varphi'(x)\,dx\ge 0. \qquad //\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 略解． $\varphi(x)\ge 0\ (a\le x\le b)$ が恒等的に 0 ではないと仮定すると，ある $x_0\in[a,b]$ で $\varphi(x_0)>0$ が成り立っている．このとき，**1.9 D.** $\boxed{\mathbf{4}}$ より，

$$\exists\,\delta>0\ :\ x_0-\delta<x\le x_0\ \ (\text{または } x_0\le x<x_0+\delta) \quad\Longrightarrow\quad \varphi(x)\ge\frac{\varphi(x_0)}{2}>0$$



が成り立つ． $\varphi(x)\ge 0\ (a\le x\le b)$ であるから，

リーマン和を考えると

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx\ \ge\ \frac{\varphi(x_0)}{2}\delta\ >\ 0$$

は明らかである．これは仮定に矛盾する． //

3.14 C. $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\text{略解}}$ $f(x)=\sin^{-1}\Big(\frac12-\sin x\Big)\quad(0\le x\le\frac{5\pi}{6})$ と置くと，

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{\sqrt{1-\Big(\frac12-\sin x\Big)^2}}\,,\qquad f''(x)=\frac{\Big(1-\Big(\frac12-\sin x\Big)^2\Big)\sin x+\Big(\frac12-\sin x\Big)\cos^2 x}{\Big(1-\Big(\frac12-\sin x\Big)^2\Big)^{\frac32}}\,.$$

$$\frac34\le 1-\Big(\frac12-\sin x\Big)^2\le 1\qquad(0\le x\le\frac{5\pi}{6})\qquad\text{であるから，}$$

$$0<f''(x)\ \le\ \frac{\sin x+\Big(\frac12-\sin x\Big)}{\Big(\frac34\Big)^{\frac32}}\ =\ \frac{4}{3\sqrt3}\ <\ \frac45\qquad(0\le x\le\frac{5\pi}{6})\,.$$

故に，閉区間 $[0,\ \frac{5\pi}{6}]$ を n 等分して $\displaystyle\int_0^{\frac{5\pi}{6}}\sin^{-1}\Big(\frac12-\sin x\Big)\,dx$ の値を台形公式で求めるときの誤差は $\dfrac{\Big(\frac{5\pi}{6}\Big)^3}{15n^2}=\dfrac{5^2\pi^3}{2^3 3^4 n^2}<\dfrac{2}{n^2}$ で評価される．

$n=40$ の場合には，$\displaystyle\int_0^{\frac{5\pi}{6}}\sin^{-1}\Big(\frac12-\sin x\Big)\,dx=-0.57\cdots$ と計算されるから平面曲線の囲む

面積は　$\pi^2 - 4\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) dx = \pi^2 + 2.28\cdots = 12.1\cdots$.　　//

$\boxed{2}$ 略解.　$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ と置くと，$f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ ，$f''(x) = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$. 閉区間 $[0,1]$ 上で $f^{(3)}(x) = \dfrac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \geq 0$ であるから，$M = \max\limits_{0\leq x\leq 1}\left|\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\right| = 2$ となり台形近似の誤差 $E = T_{10} - \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ は $|E| \leq \dfrac{M(b-a)^3}{12n^2} = \dfrac{2}{1200} < 0.002$ を満たす.

a_n	$1+a_n^2$	$f(a_n)$	
0.0	1.0000		
0.1			
0.2			
0.3			
0.4			
0.5			
0.6			
0.7			
0.8			
0.9			
1.0	2.0000		
計		1.5000	7.0997

左の表の空欄を埋める．左から第三列には $f(a_0)$ と $f(a_{10})$ を，第四列には $f(a_1)$ から $f(a_9)$ を計算して埋める．表から 10 等分の場合の近似値は

$$T_{10} = (1.50000 + 2\times 7.0997)\times\frac{1}{20} = 0.7850.$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ であるから，

$$0.7830 = 0.7850-0.002 < \frac{\pi}{4} < 0.7850+0.002 = 0.787$$

と評価される．従って $\dfrac{\pi}{4} = 0.78\cdots$ であること がわかる．$\dfrac{\pi}{4} = 0.78539\cdots$ であることが知られているから，誤差の絶対値は

$$|E| = |0.7850 - 0.78539\cdots| < 0.0004.$$

を満たしている．　//

3.15 D. $\boxed{1}$ $\boxed{\text{略解}}$

関数 e^{-x^2}, $\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n$ はどちらも偶関数であるから，閉区間 $I = [\,0,\,a]$ の場合に示せば充分である． さて，

$$\begin{aligned} e^{-x^2} - \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n &= \left(e^{-\frac{x^2}{n}}\right)^n - \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \\ &= \left(e^{-\frac{x^2}{n}} - \left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-\frac{x^2}{n}}\right)^k\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n-1-k}\right) \end{aligned}$$

また，**2.9 関数の増減 B.** $\boxed{3}$ **(5)** より

$$0 \leq e^{-\frac{x^2}{n}} - \left(1-\frac{x^2}{n}\right) \leq \frac{x^4}{2n^2}$$

が成り立つので，$n > a^2$ のとき $x \in I$ に対してつぎが成り立つ：

$$\left| e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \right| = \left| \left(e^{-\frac{x^2}{n}} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{-\frac{x^2}{n}} \right)^k \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n-1-k} \right) \right| \leq \frac{x^4}{2n^2} \cdot n \leq \frac{a^4}{2n} \ .$$

このことから，閉区間 I 上の関数のノルム $\left\| \cdot \right\|_I$ に関してつぎのことが成り立つ：

$$\left\| e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \right\|_I = \max_{x \in I} \left| e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \right| \leq \frac{a^4}{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \ .$$

これは，$\left\{ f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で e^{-x^2} に一様収束していることを示している．//

3.16 C. $\boxed{1}$ $\boxed{\text{略解}}$ $f(x) = \tan^{-1} x$ $(x \in \mathbf{R})$ の導関数は

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}$ であるから (微分積分学の基本定理により)，

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\, dt + \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[t^{2k} \right]_0^x + \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \qquad (-\infty < x < \infty) \ .
\end{aligned}$$

が成り立つ，というのは $f(0) = \tan^{-1}(0) = 0$ であるから．関数 $\dfrac{t^{2n}}{1+t^2}$ $(x \in \mathbf{R})$

は非負の値をとる偶関数で $\dfrac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$ $(x \in \mathbf{R})$ であるから

$$\begin{cases}
0 \ \leq \ \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \ \leq \ \int_0^x t^{2n}\, dt \ = \ \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & (x \geq 0) \\
\displaystyle\int_0^x t^{2n}\, dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ \leq \ \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \ \leq \ 0 & (x \leq 0)
\end{cases}$$

が成り立つ．すなわち $\left| \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \right| \ \leq \ \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|$ $(-\infty < x < \infty)$．明らかに

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| = 0$ $(-1 \leq x \leq 1)$ であるから， $-1 \leq x \leq 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left| \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \right| = 0$.

特に $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt = 0$ が成り立つ．さて

$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt$ $(-\infty < x < \infty)$ が成り立っているので，

$-1 \leq x \leq 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt = 0$ より

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} \right\} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n x^{2k+1}}{2k+1} + \lim_{n \to \infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)
\end{aligned}$$

が成り立つ．注意．この問題の解は $\boxed{\text{定理　べき級数の不定積分}}$ からも容易に導かれる．　//

2 略解

$0<\alpha=\tan^{-1}\dfrac{1}{5}<\dfrac{\pi}{4},\qquad 0<\beta=\tan^{-1}\dfrac{1}{239}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$　と置くと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{5}$　から

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{5}{12}\ ,\qquad \tan 4\alpha=\frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}=\frac{120}{119}\ .$$

加法定理により
$$\begin{cases}\tan(4\alpha-\beta)=\dfrac{\tan 4\alpha-\tan\beta}{1+\tan 4\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{120}{119}-\frac{1}{129}}{1+\frac{120}{119}\frac{1}{129}}=1\\ 0<4\alpha-\beta<\pi\end{cases}$$

であるから，
$$\frac{\pi}{4}=4\alpha-\beta=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

さて，$\tan^{-1}x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\quad(-1<x<1)$　が成り立つことを用いる．$x>0$ のとき，

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$　は交代級数（**1.3 級数　C.** $\boxed{\textbf{定理 (Leibniz)}}$）であるから

$$\begin{cases}\tan^{-1}x=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}+R_{2n+1}\\ |R_{2n+1}|\le\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad(0<x<1)\end{cases}$$

が成り立つ．このことから，

$$\begin{cases}\tan^{-1}\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3\cdot 5^3}+\dfrac{1}{5\cdot 5^5}+R_7=\dfrac{9253}{46875}+R_7=0.197397+R_7,\qquad 0<|R_7|<\dfrac{1}{7\cdot 5^7}<10^{-5}\\ \tan^{-1}\dfrac{1}{239}=\dfrac{1}{239}+R_3=0.00418+R_3,\qquad 0<|R_3|<\dfrac{1}{3\cdot 239^3}<10^{-7}\end{cases}$$

が成り立ち

$$\begin{cases}\pi=4\Big(4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}\Big)=16(0.197397+R_7)-4(0.00418+R_3)=3.1416+R\\ |R|=|16R_7-4+R_3|<10^{-4}\ .\qquad //\end{cases}$$

3 略解　つぎのように計算する：

$$e^x\sin x=\big(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}++\frac{x^5}{5!}\cdots\big)\big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\big)=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{9x^5}{120}+\cdots.$$

4 略解　関数　$f(x)g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\ (-R<x<R)$　と収束するべき級数によって表される から，ライプニッツの定理を使って高階導関数を計算して

$$\frac{\{f\cdot g\}^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k f^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$$

を見る．　//

おわりに

さて，このノートが微分積分学をどのように扱ったか，もう一度振り返ってみよう．

- 微分積分学はいわゆる教養の学ではないということ．

  近代の数学の特徴は記号（計算）と関数（表現）の使用にある．

  数学の歴史をひも解くと，ヴィエタによる代数学の記号化の推進とライプニッツによる微分積分学への記号計算の導入が、Leibniz の夢‘ 普遍記号法ー思考の記号化 ’として，近代以後の数学の発展に大きな影響をおよぼしていると認識されていることがわかる．また現実の自然科学の探求と直接に結びついた数学であることも、デカルト、ニュートン以後の近代数学の大きな特徴であると捉えられている．

  微分積分学は近代の数学が開発した最高の数学技術の一つの分野であるが，それにとどまるものではなく，微分積分学の成功の周りに近代数学の多様な発見のフロンティアが広ったのである．それは，古典‘ ユークリッド幾何学 ’が教養というにたると看做される側面が,‘ ユークリッド幾何学 ’は論理の展開の典型であることおよび厳密性の模範というところにあるとすれば，微分積分学には，数学解析の一つの技術であるということだけではなく,‘ 数学の広がりを導くフロンティア ’としての在り方が数学理論の発見の場の‘ 原型 ’のように見える側面がある．(そうであるとすれば，)

- ‘ 微分積分学 ’の導入は，現在も活きている数学解析の技術の獲得ということだけではなく，数学における機能的展開の‘ 元型 ’を示唆または意識した導入が待たれる．

- さて，実際にはどんな点を考慮したのか．

  - ‘ 現代の数学では，有理数の存在や定義には困難がない ’のと同じように，コンピュータと‘ 計算可能性 ’に支援されて‘ 実数の存在や定義には概ね困難はない ’.
  - 微分積分において，計算技能の習熟ではなく，様々な計算技術の了解を優先する．
  - 微分積分における‘ 概念をどう理解するか ’を重視する．

  微分積分学における概念の機能とその成果を有効に使っているシュミレーションとコントロールの実例を示すことができなかったのは，著者の力不足のためではあるが，残念である．また読者に期待する準備の削減についても，何も述べることはできなかった．多くの方々の意見と教示を期待するのみである．

関連図書

[1] 西山亨: 基礎課程 微分積分 I -1 変数の微積分- [数学基礎コース = K2], サイエンス社, 1998.

[2] 水田義弘: 入門微分積分, サイエンス社, 1996.

索引

あ〜こ

こ〜た

ち〜ほ

ま〜わ