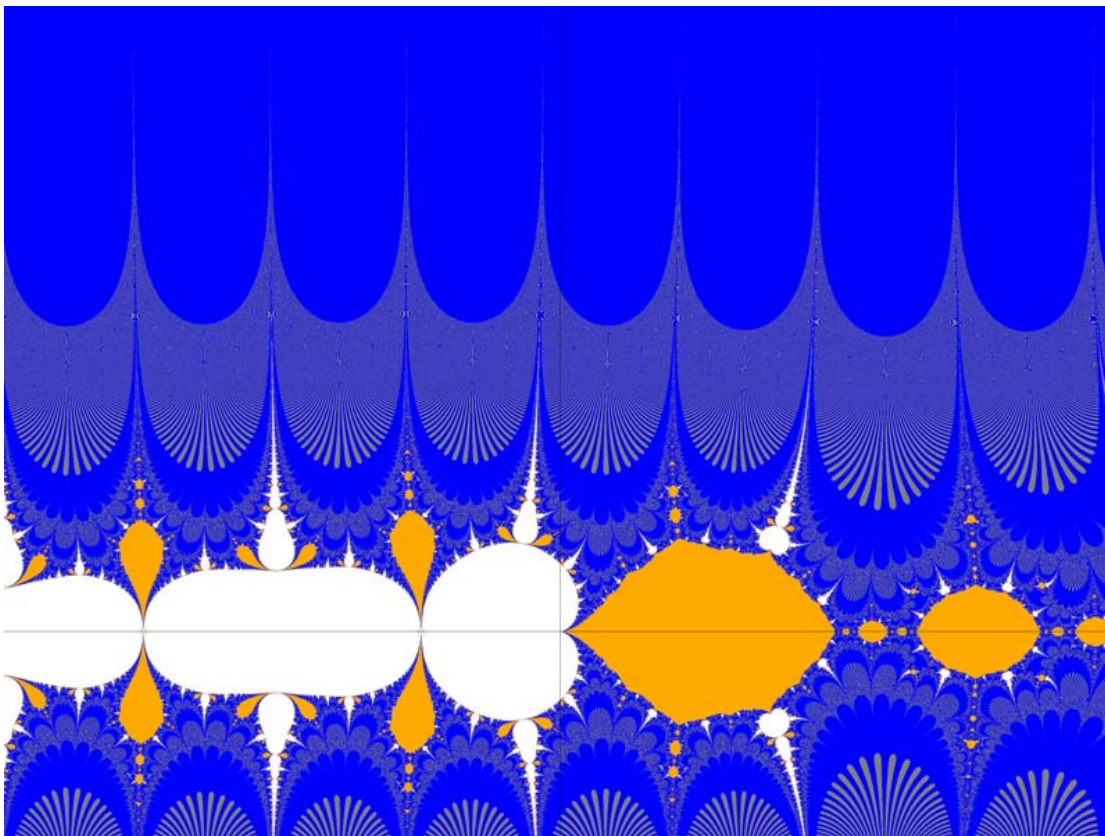


Collatz の問題から生じた

模様

浦田 敏夫

A 図 C0xy_-4.00-1.50.bmp : 3200 × 2400



$xp = yp = 0.00025$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

上図の範囲は複素数の平面の領域

$$\{z = x + iy \mid -4.0 < x < 4.0, -1.5 < y < 4.5\}.$$

この範囲に含まれる複素数 z で, 関数 $F(z)$ を反復 (合成) した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画.
(参照 1.3 コラッツの手続きを表現する正則関数 F)

上の A 図は, (この範囲に対応する) 長方形 $[-4.0, 4.0] \times [-1.5, 4.5]$ 内を 3200 × 2400 ピクセルで描画し, 1 ピクセル当たりの長さは 0.00025 である. 図中の直線は, 水平方向が x 軸, 垂直方向が y 軸である.

はじめに

コラッツの問題（または予想）として知られている未解決問題は，

「ある自然数（正の整数のこと）に対して，
その数が偶数であれば2で割り，奇数であれば3倍して1をたす．
得られた数に同様の操作を繰り返すと何回目かには1になる。」

という予想の成否を問う問題である．

このような手続きを限りなく繰り返す場合に生じる現象においては，整数に関わる問題であっても，複素数を変数とする解析関数の反復の理論の立場からの考察なども可能である．

このコラッツの問題に関わって考察される関数の一つに，複素数の平面 \mathbb{C} で定義された正則関数 $F(z)$ (参照 §1.3) がある．この正則関数 $F(z)$ の反復合成に関していくつかの計算を行ったが，初等的に簡単とは言ってもその内容を忘れてしまいそうなのでその計算と $F^n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) から産まれた図の情報を記録した；その BMP ファイル (C0xy_-4.00-1.50.bmp, ...) を

<https://www.dropbox.com/sh/ickxlwadm24xtv5/0Y3BAYySKJ>

[<http://suhwah.blogspot.jp/> を見よ .]

に置く．

2013年6月 浦田敏夫

目次

第 1 章 コラッツの問題とは？	1
1.1 コラッツの問題	1
1.2 コラッツの手続きを表現する正則関数 F	6
1.3 正則関数 F の反復	9
第 2 章 画像の情報	13
2.1 $-31.25 < x < 159.9, -4.3 < y < 1.7$	13
2.2 $z_0, 1, 3, 5, 7, 9, 11$ および 13 を含む Fatou 成分	15
2.3 $0.60 < x < 0.80, 0.9420 < y < 1.0919$	20
2.4 $2.94 < x < 3.02, 0.595 < y < 0.655$	22
2.5 $3.888 < x < 4.912, 0.8416 < y < 1.6096$	26
2.6 $8.5427 < x < 9.6647, -1.1000 < y < -0.2585$	28
2.7 $9.27020 < x < 9.35668, -0.025946 < y < 0.038918$	30
2.8 $12.41673 < x < 12.66298, -1.762858 < y < -1.511514$	31
2.9 $4.529632 < x < 4.542132, 1.125 < y < 1.325$	32
2.10 $27, 31$ または 137 を含む Fatou 成分	33
第 3 章 関数 F の性質	37
3.1 関数 F の不動点 z_0 の存在	37
3.2 $F(z)$ の正奇数における同等連続性	39
3.3 $F(z)$ の計算	44
第 4 章 画像の作成	49
4.1 描画プログラム Cimage.cpp	49
索引	

第1章 コラッツの問題とは？

1.1 コラッツの問題

コラッツの問題とかコラッツの予想と言われている未解決の問題がある．これまでには「Syracuse 予想」とかこの問題に関心をもった数学者の名前から「角谷の問題」, 「Hasse の手続き」, 「Ulam の問題」とか呼ばれたこともあったりしたが, 今では $3x + 1$ 問題 または コラッツの問題とかコラッツの予想と呼ばれている．数学者のコラッツ (Lothar Collatz(1910-1990)) が学生の頃 (1930 年代) に, この問題を通して, 数学の女王と言われる分野 '数論' の問題を見出したことが出発点のようである．

コラッツの問題というのは,
「ある自然数 (正の整数のこと) に対して,
その数が偶数であれば 2 で割り,
奇数であれば 3 倍して 1 をたす.
得られた数に同様の操作を繰り返すと何回目かには 1 になる .」

という予想の成否を問う問題である．

コラッツの問題に現れるこの操作のことをコラッツの操作とかコラッツの手続きと言う．たとえば,

1 の場合: 1 4 2 1

6 の場合: 6 3 10 5 16 8 4 2 1

7 の場合: 7 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

となる．ちょっと跳んで 27 を試してみると,

27 82 41 124 62 31 94 47 142 71 214 107 322 161 484 242

121 364 182 91 274 137 412 206 103 310 155 466 233 700

350 175 526 263 790 395 1186 593 1780 890 445 1336 668 334

167 502 251 754 377 1132 566 283 850 425 1276 638 319 958

479 1438 719 2158 1079 3238 1619 4858 2429 7288 3644 1822 911

2734 1367 4102 2051 6154 3077 9232 4616 2308 1154 577 1732

866 433 1300 650 325 976 488 244 122 61 184 92 46 23 70

35 106 53 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1 となり 111 回目

に, とにかくも, 1 に到達する．

コラッツの奇数手続き

自然数 m にコラッツの操作を繰り返したときに, 次々に現れる整数達の並び (コラッツの操作で生じる m の軌道) を考える．すぐわかるように, すべての自然数は, コラッツの操作の過程で奇数になる．そこで, 操作の過程であらわれる偶数の項をとばして奇数の項についてのみ考えよう．例として, 61 について見ていくと, 61 23 35 53 5 1 となる．

すべての正の奇数 x を変数とし正の奇数を値とする関数 $\varphi(x)$ を次のように定義する（‘ φ ’を関数 $\varphi(x)$ の名前と考える）：

$3x + 1$ が 2^k でわりきれて 2^{k+1} ではわりきれない（ k はある自然数）場合に，正の奇数

$$y = \frac{3x + 1}{2^k}$$

を関数 φ の値 $y = \varphi(x)$ とする．正の奇数 x から正の奇数 $y = \varphi(x)$ を得るこの手続きをコラッツの奇数手続きと呼ぶ：この場合，

$$3x + 1 = 2^k y, \quad y = \varphi(x)$$

が成り立っている．

明らかに 関数 φ の値は正の奇数にコラッツの手続きを繰り返して最初に得られる奇数である． $\varphi(1) = 1$ である．例えば， $x = 53$ のときには， $3x + 1 = 160$ ．160 は $32 = 2^5$ でわりきれて，その商は5であるから

$$\varphi(53) = 5$$

となる．

さて，コラッツの奇数手続きを繰り返すということを数学的に表そう：まず，関数 $\varphi(x)$ を考える．そして

$$\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) \quad (\varphi(\varphi(x)) \text{ は関数値 } \varphi(x) \text{ での関数 } \varphi \text{ の値.})$$

$$\varphi^3(x) = \varphi(\varphi(\varphi(x)))$$

...

$$\varphi^n(x) = \varphi(\varphi^{n-1}(x)) = \overbrace{\varphi(\varphi(\cdots(\varphi(x))\cdots))}^{n \text{ 回}}$$

...

と帰納的に関数 $\varphi^n(x)$, $n = 2, 3, \dots$ を決める．

関数 $\varphi^n(x)$ ($n = 2, 3, \dots$) は関数 $\varphi(x)$ の反復 と言われる，いわゆる合成関数である．

[関数 $\varphi^n(x)$ は関数値 $\varphi(x)$ の n 乗 $\varphi(x)^n = \overbrace{\varphi(x) \times \varphi(x) \times \cdots \times \varphi(x)}^{n \text{ 個}}$ とは違うことに注意すること．]

自然数に対する コラッツの問題は，関数 φ の反復を考えると，任意の正の奇数 $2p + 1$ に対してある自然数 n が存在して

$$\varphi^n(2p + 1) = 1$$

が成り立つかという問題である．

さて，すべての自然数を $3m + 1, 3m + 2, 3m + 3$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) の形に表せるように，正の奇数 y は6でわった余りによって， $6n + 1, 6n + 3, 6n + 5$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の型をしている．

このことから，次の結論が導かれる：

定理 . 正の奇数 y が与えられたとき , 正の奇数 x を未知数とする方程式 $\varphi(x) = y$ のすべての奇数解 x は次のように求められる :

$y = 6n + 1$ のとき , すべての奇数解は

$$\frac{2^{2p+2}(6n+1)-1}{3} = 4^p(8n+1) + 4^{p-1} + \dots + 4 + 1$$

$$(p = 0, 1, 2, \dots).$$

$y = 6n + 3$ のとき , 奇数解なし .

$y = 6n + 5$ のとき , すべての奇数解は

$$\frac{2^{2p+1}(6n+5)-1}{3} = 4^p(4n+3) + 4^{p-1} + \dots + 4 + 1$$

$$(p = 0, 1, 2, \dots).$$

余談

$k = 1, 2, \dots$ の場合に , 正の整数 v_1, v_2, \dots, v_k を変数とする関数 $C(v_1, v_2, \dots, v_k)$

$$\begin{aligned} C(v_1, v_2, \dots, v_k) &= 2^{v_1+v_2+\dots+v_k} + 3 \cdot 2^{v_1+v_2+\dots+v_{k-1}} + \dots \\ &\quad + 3^i \cdot 2^{v_1+v_2+\dots+v_{k-i}} + \dots + 3^{k-1} \cdot 2^{v_1} + 3^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \cdot 2^{v_1+v_2+\dots+v_{k-i}} + 3^k \end{aligned}$$

を考える . $k = 1$ の場合には , 正の整数 v_1 を変数として $C(v_1) = 2^{v_1} + 3$ である . 明らかに , v_1, v_2, \dots, v_k が正の整数であれば , $C(v_1, v_2, \dots, v_k)$ の値は正の奇数である .

正の奇数 x に対して , $\varphi(x) = x_1, \varphi^2(x) = x_2, \dots, \varphi^n(x) = x_n$ となっているならば , ある正の整数 p_1, p_2, \dots, p_{n-1} が存在して

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{p_1} x_1 = 3x + 1 \\ 2^{p_2} x_2 = 3x_1 + 1 \\ \vdots \\ 2^{p_i} x_i = 3x_{i-1} + 1 \\ \vdots \\ 2^{p_n} x_n = 3x_{n-1} + 1, \end{array} \right. \quad \text{が成り立つことになる . これから}$$

$$\begin{aligned} 2^{p_1+p_2+\dots+p_n} \cdot x_n &= 2^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}} + 3 \cdot 2^{p_1+p_2+\dots+p_{n-2}} + \dots \\ &\quad + 3^i \cdot 2^{p_1+p_2+\dots+p_{n-i-1}} + \dots + 3^{n-2} \cdot 2^{p_1} + 3^{n-1} + 3^n \cdot x \\ &= C(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) + 3^n \cdot x. \end{aligned}$$

が導かれる . $\varphi^n(x) = y$ となっている正の奇数 x と y が満たしている条件については , つぎのことがわかる (cf. [5]) .

定理 . 正の奇数 x と y が与えられたとき ,

$\varphi^n(x) = y$ が成り立つためには , n 個の正の整数 $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n$ が存在して

$$3^n x = 2^{q_1+q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})$$

が成り立つことが必要充分条件である .

証明 . 条件の必要性は明らかであるから , 条件が充分であることを示そう .

条件が成り立っているから,

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= \frac{2^{q_1+q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}{3^{n-1}} + 1 \\ &= \frac{2^{q_1+q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}) + 3^{n-1}}{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} C(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}) &= \sum_{i=0}^{n-2} 3^i \cdot 2^{q_1+q_2+\dots+q_{n-i-1}} + 3^{n-1} \\ &= 2^{q_1} \left(\sum_{i=0}^{n-3} 3^i \cdot 2^{q_2+q_3+\dots+q_{n-i-1}} + 3^{n-2} \right) + 3^{n-1} \\ &= 2^{q_1} C(q_2, q_3, \dots, q_{n-1}) + 3^{n-1} \end{aligned}$$

であるから,

$$3x + 1 = 2^{q_1} \cdot \frac{2^{q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_2, \dots, q_{n-1})}{3^{n-1}}$$

が成り立つ. 上式の左辺は正の整数であるから, 正の整数 $2^{q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_2, \dots, q_{n-1})$ は 3^{n-1} でわりきれ, すなわち, 3^{n-1} を因数とする正の整数である. $C(q_2, \dots, q_{n-1})$ は正の奇数であるから, $2^{q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_2, \dots, q_{n-1})$ も正の奇数. 故に,

$$\frac{2^{q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_2, \dots, q_{n-1})}{3^{n-1}}$$

は正の奇数でなければならない. 今, この正の奇数を

$$x_1 = \frac{2^{q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_2, \dots, q_{n-1})}{3^{n-1}}$$

と置くと,

$$\begin{cases} 3x + 1 = 2^{q_1} \cdot x_1, \text{ このとき } x_1 = \varphi(x) \\ 3^{n-1} x_1 = 2^{q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_2, \dots, q_{n-1}) \end{cases}$$

が成り立つ. この議論を繰り返して

$$\begin{cases} \vdots \\ 3x_{i-1} + 1 = 2^{q_i} \cdot x_i, \text{ このとき } x_i = \varphi(x_{i-1}) \\ 3^{n-i} x_i = 2^{q_{i+1}+\dots+q_{n-1}+q_n} y - C(q_{i+1}, \dots, q_{n-1}) \\ \vdots \\ 3x_{n-3} + 1 = 2^{q_{n-2}} \cdot x_{n-2}, \text{ このとき } x_{n-2} = \varphi(x_{n-3}) \\ 3^2 x_{n-2} = 2^{q_{n-1}+q_n} y - C(q_{n-1}) \end{cases}$$

となる. ここで, $C(q_{n-1}) = 2^{q_{n-1}} + 3$ に注意すると,

$$\begin{cases} 3x_{n-2} + 1 = 2^{q_{n-1}} \cdot x_{n-1}, \text{ このとき } x_{n-1} = \varphi(x_{n-2}) \\ 3x_{n-1} = 2^{q_n} y - 1 \end{cases}$$

が成り立つ. こうして,

$$3x_{n-1} + 1 = 2^{q_n} y, \quad \text{すなわち} \quad y = \varphi(x_{n-1}) = \varphi^n(x)$$

が示された.

この定理が意味しているのは、次のようなことである：

コラッツの奇数手続き φ の n 回の操作で 1 に到達するような奇数 x は、ある n 個の正の整数 $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n$ が存在して $C(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-2} 3^i \cdot 2^{q_1+q_2+\dots+q_{n-i-1}} + 3^{n-1}$ によって

$$x = \frac{2^{q_1+q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} - C(q_1, q_2, \dots, q_{n-1})}{3^n}$$

と現わされる奇数に限る。例えば、

$$\varphi^{-1}(1) = \left\{ \frac{2^{2q} - 1}{3} \mid q \in \mathbf{N} \right\} = \{1, 5, 21, 85, 341, \dots\}.$$

さらに、コラッツの予想が成り立つかどうかという問題は、すべての正の奇数がある n 個の正の整数 $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n$ によって

$$\frac{2^{q_1+q_2+\dots+q_{n-1}+q_n} - \left(\sum_{i=0}^{n-2} 3^i \cdot 2^{q_1+q_2+\dots+q_{n-i-1}} + 3^{n-1} \right)}{3^n}$$

の形に現わされ得るかどうかという問題であることがわかる。

1.2 コラッツの手續きを表現する正則関数 F

解析関数であって、コラッツの奇数手續きを表現しているものはないだろうか. そのような関数として、(コラッツの奇数手續きを表す関数 φ を使う!) 複素数 z を変数とする関数

$$F(z) = \frac{4}{\pi^2} \cos^2 \frac{\pi z}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\}$$

がある. この無限級数の和として表されている関数 $F(z)$ は、有限和

$$\frac{4}{\pi^2} \cos^2 \frac{\pi z}{2} \sum_{m=0}^n \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\}$$

において $n \rightarrow \infty$ とするときの極限として与えられる関数である. 今、有理型関数

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\}$$

を考えると、 $G(z)$ は $z = 2n+1$ ($n = 0, 1, \dots$) の近くでは、 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2n-1| < 1\}$ で正則な関数

$$g(z) = -\frac{\phi(2n+1)}{(2n+1)^2} + \sum_{n \neq m \geq 0} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\}$$

によって、

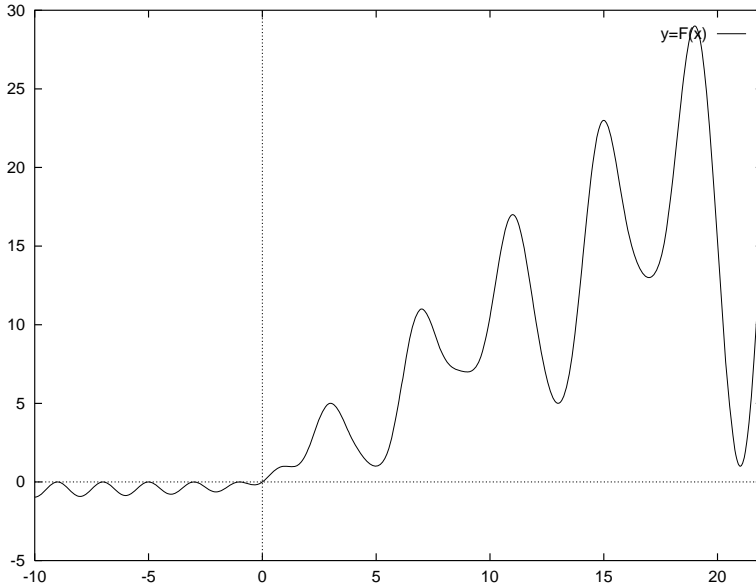
$$G(z) = \frac{\varphi(2n+1)}{(z-2n-1)^2} + g(z)$$

と表される. このことから、 $z = 2n+1$ の近くでは、

$$\begin{aligned} F(z) &= \left(\frac{4}{\pi^2} \cos^2 \frac{\pi z}{2} \right) \cdot G(z) = \frac{2}{\pi^2} (1 + \cos \pi z) \cdot G(z) = \\ &= \frac{2}{\pi^2} (1 - \cos \pi(z-2n-1)) \cdot g(z) + \varphi(2n+1) + 2 \varphi(2n+1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+2)!} (z-2n-1)^{2m} \end{aligned}$$

が成り立つ. これは、複素数 z が正の奇数 n である場合には、 $F(n) = \varphi(n)$ ($n = 1, 2, \dots$) であることを示している、ひいては、関数 $F(z)$ が複素数の平面 \mathbb{C} 上の正則関数であることがわかる.

複素数 z が実数 x に等しい場合、 $F(x)$ の区間 $-10 < x < 22$ でのグラフはつぎの図.



複素数の性質から,

$$G(\bar{z}) = \overline{G(z)}, \quad F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$$

が成り立っている. $F(0) = 0$ および $F(1) = 1$ は明らかであるが, 関数 $F(z)$ は無限に多くの不動点を持つこともすぐにわかる. 何となれば, 正の奇数で

$$F(4n+1) = \varphi(4n+1) \leq 3n+1 < 4n+1 \quad \text{かつ} \quad F(4n+3) = \varphi(4n+3) = 6n+5 > 4n+3$$

であるから, 連続関数の中間値の定理により, 関数 $F(z)$ の変域を実数上に制限した連続関数 $F(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) は開隣り合う正の奇数の間に必ず不動点を取らざるを得ないからである.

さて, $|z| < 2m+1$ ($m = 0, 1, \dots$) のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-2m-1)^2} &= \frac{1}{(2m+1)^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2m+1}\right)^2} = \frac{1}{(2m+1)^2} \left\{ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (p+1) \left(\frac{z}{2m+1}\right)^p \right\} \\ &= \frac{1}{(2m+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} (p+1) \frac{z^p}{(2m+1)^{p+2}} \end{aligned}$$

と表されるので, \mathbf{C} 上の有理型関数 $G(z)$

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (p+1) \left(\sum_{m \geq 0} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^{p+2}} \right) z^p \\ &= 2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^3} \right) z + 3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^4} \right) z^2 + \dots \end{aligned}$$

三角関数 $\cos \pi z$ はつぎのような冪級数の和として計算できるとわかっている:

$$\cos \pi z = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \frac{\pi^{2q} z^{2q}}{(2q)!} = 1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \frac{\pi^6 z^6}{6!} + \frac{\pi^8 z^8}{8!} - \dots$$

こうして, 関数 $F(z)$ を複素数変数 z の冪級数として

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{2}{\pi^2} \left(2 + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \frac{\pi^{2q} z^{2q}}{(2q)!} \right) \left\{ \sum_{p=2}^{\infty} \left(p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^{p+1}} \right) z^{p-1} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \left\{ \left(4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^3} \right) z + \left(6 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^4} \right) z^2 \right. \\ &\quad + \left(8 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^5} - \pi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^3} \right) z^3 \\ &\quad \left. + \left(10 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^6} - \frac{3\pi^2}{2!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^4} \right) z^4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

と表すことができる. $F(z)$ の冪級数展開から, 正則関数 $F(z)$ の導関数は

$$\begin{aligned}
F'(z) = & \frac{2}{\pi^2} \left\{ \left(4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^3} \right) + \left(12 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^4} \right) z \right. \\
& + \left(24 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^5} - 3\pi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^3} \right) z^2 \\
& \left. + \left(30 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^6} - \frac{9\pi^2}{2!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^4} \right) z^3 + \dots \right\}
\end{aligned}$$

と表される．特に，このとき，複素微分係数

$$\begin{aligned}
F'(0) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^3} \\
&> \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{10} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^3} \\
&= \frac{8}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{5}{27} + \frac{1}{125} + \frac{11}{7^3} + \frac{7}{9^3} + \frac{17}{11^3} + \frac{5}{13^3} + \frac{23}{15^3} + \frac{13}{17^3} + \frac{29}{19^3} + \frac{1}{21^3} \right\} \\
&= 1.024318 > 1
\end{aligned}$$

さらに， $\varphi(2m+1) \leq \frac{6m+4}{2} = 3m+2 < 2(2m+1)$ ($m=1, 2, \dots$) に注意すると，

$$\sum_{m=11}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^3} < \sum_{m=11}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)^2} < \int_{10}^{\infty} \frac{2}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{21},$$

であるから，

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{m=11}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^3} < \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{21} < \frac{8}{207} = 0.04 \quad \text{そして} \quad 1.02 < F'(0) < 1.07.$$

尚，§1.1 の定理を使えば，つぎの等式が成り立っていることがわかる：

$$\begin{aligned}
F'(0) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2n+1)}{(2n+1)^3} \\
&= \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6k+1}{(4^n(8k+1) + 4^{n-1} + \dots + 4 + 1)^3} \right) \\
&\quad + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6k+5}{(4^n(4k+3) + 4^{n-1} + \dots + 4 + 1)^3} \right).
\end{aligned}$$

関数 $F(z)$ の (反復) 合成 を調べる為に，

$$\begin{aligned}
F^2(z) &= F(F(z)) \\
&\vdots \\
F^n(z) &= F(F^{n-1}(z)) = \overbrace{F(F(\dots(F(z))\dots))}^{n \text{ 回}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

と帰納的に決める．[関数 $F^n(z)$ は関数値 $F(x)$ の n 乗 $F(z)^n = \overbrace{F(x) \times F(x) \times \dots \times F(x)}^{n \text{ 個}}$ とは違う．]

1.3 正則関数 F の反復

正則関数 $F(z)$ による複素数の平面 \mathbb{C} 上の複素力学系における点の収束の状況を局所一様性の立場から調べることに、特に、

「複素数 z が正の奇数であるときは、いつでも

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z) = 1$$

となるだろうか?」

という疑問を調べることはコラッツの問題の探求に関連している。

$F(z)$ の不動点 0 ($F(0) = 0$ を満たしている.) と 1 ($F(1) = 1$ を満たしている.) に注目する。 $z = 0$ での複素微分係数 $F'(0) > 1$ であるという事実は、関数 F の一つの不動点 0 は F の反発的不動点であること、すなわち 0 の近くでは関数 F を繰り返すときの点 z ごとの変化が激しいことを意味している。 0 の近くでは、一般に、 $F^n(z)$ は (n が増えるにつれて) 複素数平面中に散らばっていく。

さらに、関数 F の不動点である 1 ($F(1) = 1$ を満たしている.) に対しては、 $F'(1) = 0$ であることもわかっている。これは 1 が F の超吸引的不動点だということ、すなわち 1 の近くでは関数 F を繰り返すときの点 z ごとの変化が安定していて、 $F^n(z)$ は (n が増えるにつれて) 1 に近づいていくことを意味している。

図版の A 図と B 図、またこの節の C 図、E 図は、関数 $F(z)$ を複素数平面のある領域に含まれる z で反復 (合成) した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画された。すべての図の中における黄色い領域や白い領域および各点の色はつぎのようにして決められている：

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z) = 1 \text{ となる複素数 } z \text{ は} \\ \text{(ある番号 } n \text{ で } |F^n(z) - 1| < 0.2 \text{ となるとき) 黄色で表し,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z) = z_0 \text{ となる複素数 } z \text{ は} \\ \text{(ある番号 } n \text{ で } |F^n(z) - z_0| < 0.01 \text{ となるとき) 白色で表す.} \end{array} \right.$$

この複素数 $z_0 = -0.03 \dots$ は関数 F の吸引的不動点 ($F(z_0) = z_0$, $|F'(z_0)| < 1$ を満たしている!) である (3.1 を参照せよ、また判定数値 0.2 , 0.01 については 3.3 を参照せよ)。 z_0 の近くでは関数 F を繰り返すときの点 z ごとの変化が安定している、 z_0 の近くでは $F^n(z)$ は (n が増えるにつれて) z_0 に近づいていくことがわかっている。

(すべての図において)、各点の色はさらに多層的に、関数 $F(z)$ の n 回反復 (合成) $F^n(z)$ ($F(z)$ の反復回数 n) の虚数部に従って、すなわち $u + iv = F^n(z)$ となるとき、つぎのように塗られている。

$$\left\{ \begin{array}{l} u > 200,000,000 \text{ となる複素数 } z \text{ は} \\ \text{銀灰色 } RGB(160, 160, 160) \text{ で表され, また} \\ v > 200 \text{ または } v < -200 \text{ となる複素数 } z \text{ は} \\ \text{青色 } RGB(0, 0, 255) \text{ で表されている.} \\ \text{これら以外の複素数 } z \text{ は, 明灰色 } RGB(230, 230, 230) \text{ で塗る.} \end{array} \right.$$

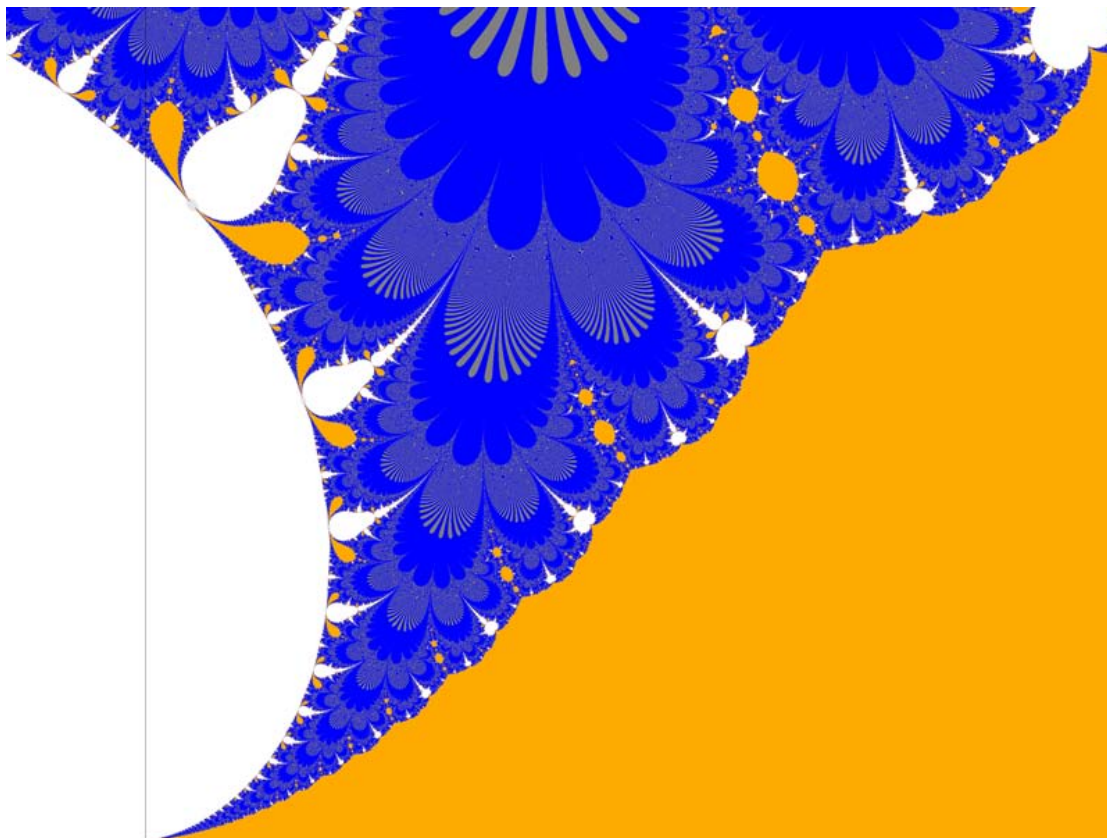
各図に記載した情報 $x_p = y_p = \dots$ は複素数 $z = x + iy$ の実数部 x と虚数部 y の 1 ピクセル当たりの長さ (変化量) を示す。

つぎの B 図は，複素数の平面の領域

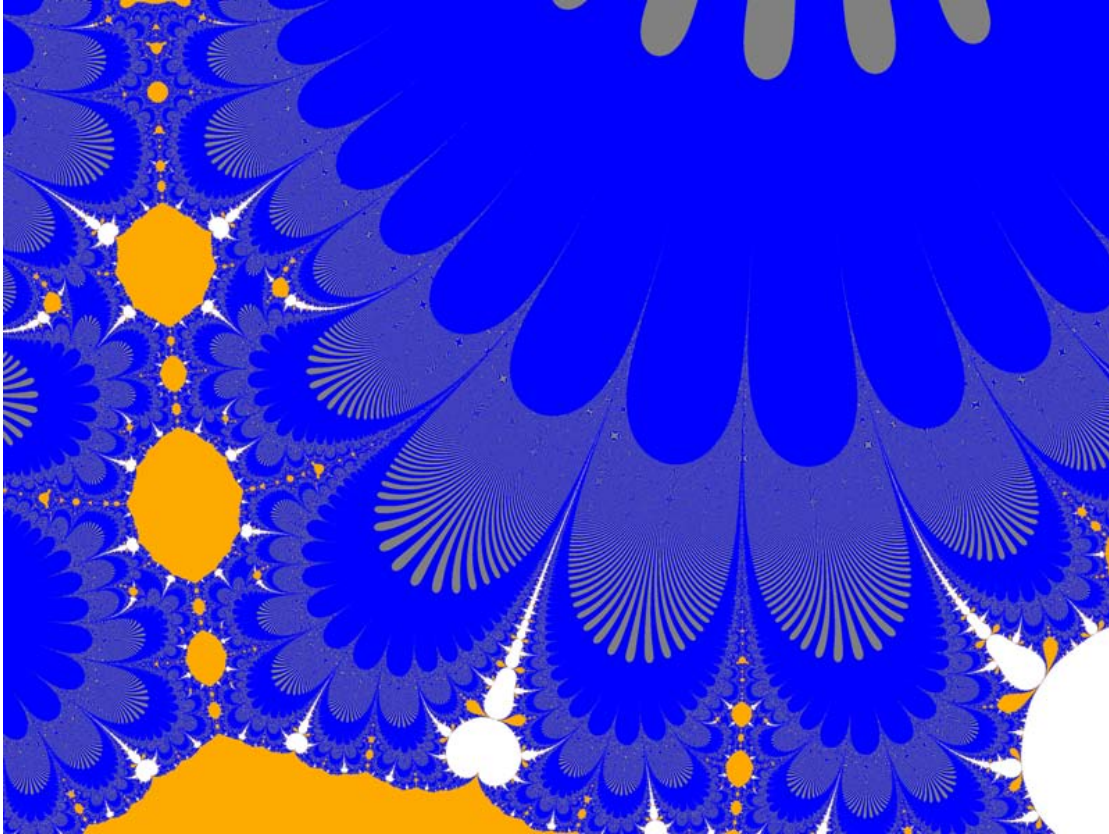
$$\{z = x + iy \mid -0.100 < x < 0.700, 0.000 < y < 0.600\}$$

に含まれる z で，反復 (合成) した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画．図中の直線は y 軸である．

B 図 C11_-0.10-0.00.bmp : 3200 × 2400



$xp = yp = 0.00025$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100



$xp = yp = 0.00025$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

上の C 図は、複素数の平面の領域

$$\{z = x + iy \mid 0.700 < x < 1.500, 0.600 < y < 1.200\}$$

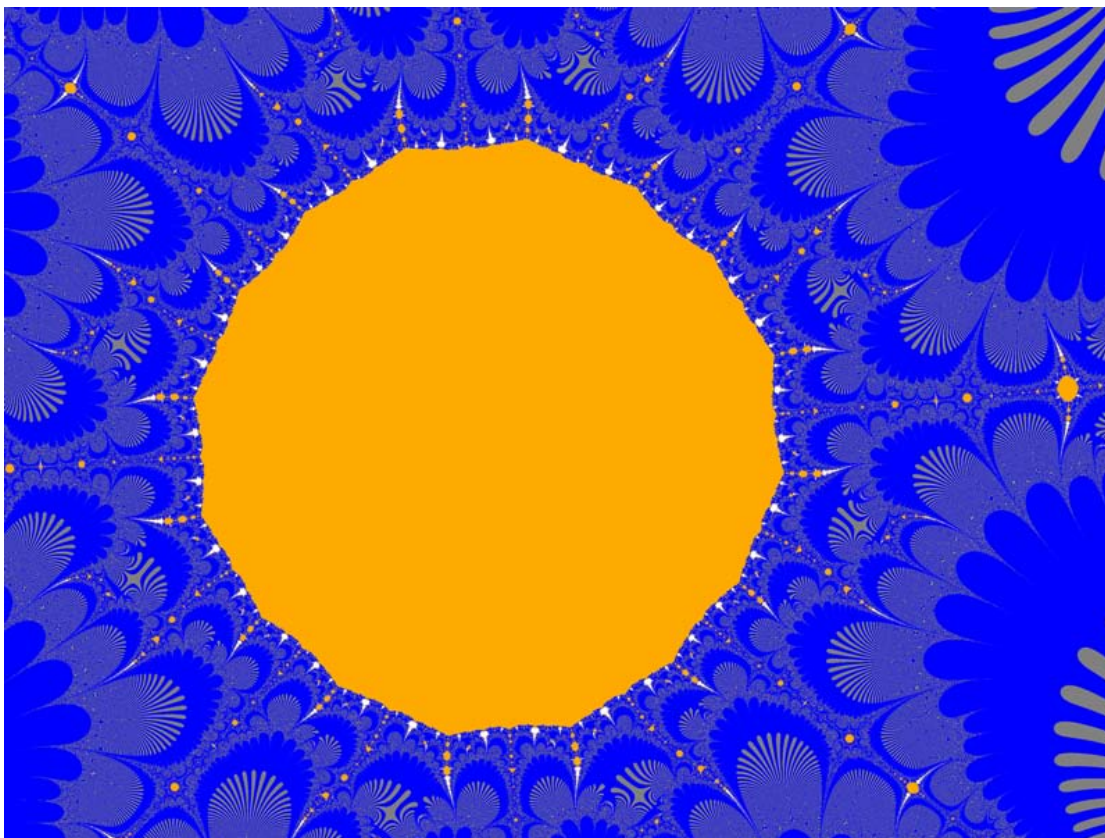
に含まれる z で反復 (合成) した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画 .

つぎの D 図は，複素数平面の領域

$$\{z = x + iy \mid 2.9400 < x < 3.0200, 0.5950 < y < 0.6550\}$$

に含まれる z で反復 (合成) した関数 $F^n(z)$ の複素数値から作画 .

D 図 C0121_2.94_0.595.bmp : 3200 × 2400



$xp = yp = 0.000025$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

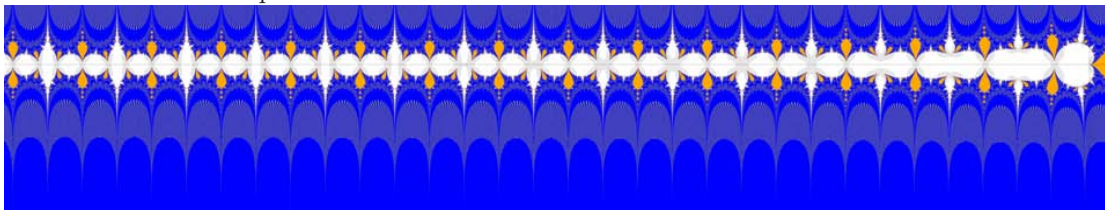
第2章 画像の情報

図は画像作成プログラム 4.1 Cimage.cpp で $G(z)$ を近似計算している項数を $lm = 1000$ として作画されている。

各図中に黒く引かれている直線は、水平方向が x 軸、垂直方向が y 軸である。

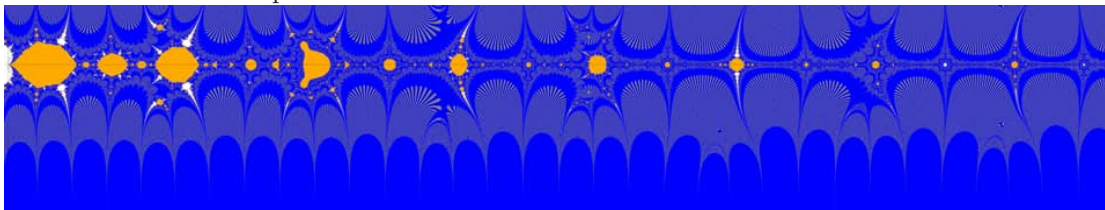
2.1 $-31.25 < x < 159.9, -4.3 < y < 1.7$

C0L30_-31.25-4.30.bmp : 9600 × 1800



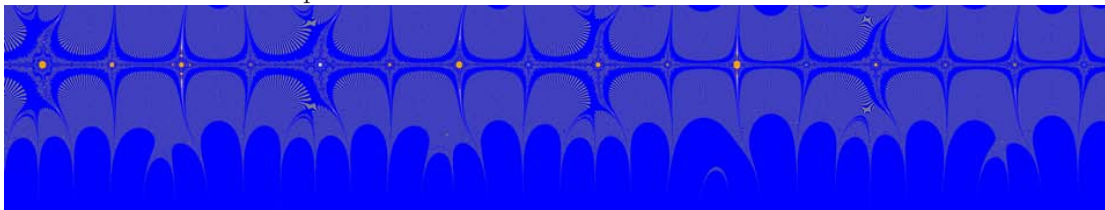
$xp = yp = 0.00333333, [-31.25, 0.75] \times [-4.30, 1.69994]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 30

C1L30_-0.100-4.300.bmp : 9600 × 1800



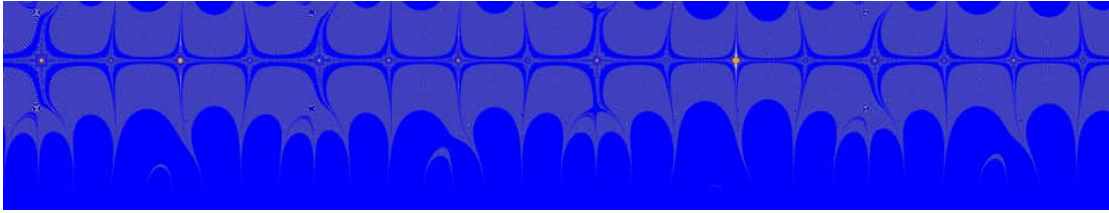
$xp = yp = 0.00333333, [-0.1, 31.89968] \times [-4.3, 1.69994]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 30

C2L30_31.89968-4.300.bmp : 9600 × 1800



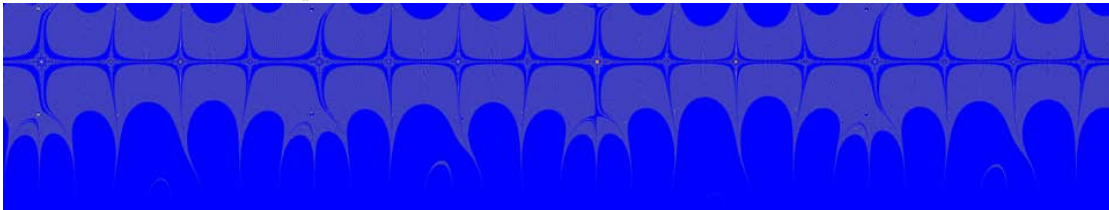
$xp = yp = 0.00333333, [31.89968, 63.89936] \times [-4.3, 1.69994]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 30

C3L30_63.89936-4.300.bmp : 9600 × 1800



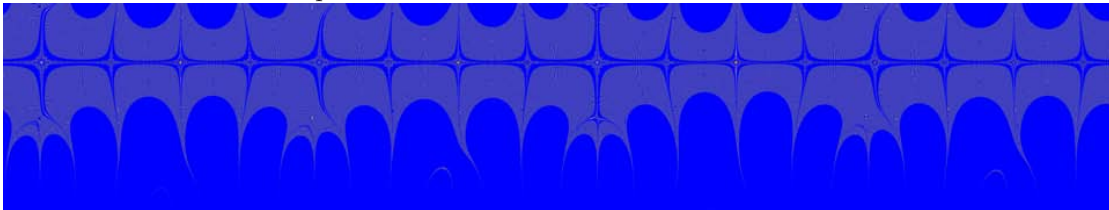
$xp = yp = 0.00333333$, $[63.89936, 95.89904] \times [-4.3, 1.69994]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 30

C4L30_95.89904-4.300.bmp : 9600 × 1800



$xp = yp = 0.00333333$, $[95.89904, 127.89872] \times [-4.3, 1.69994]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 30

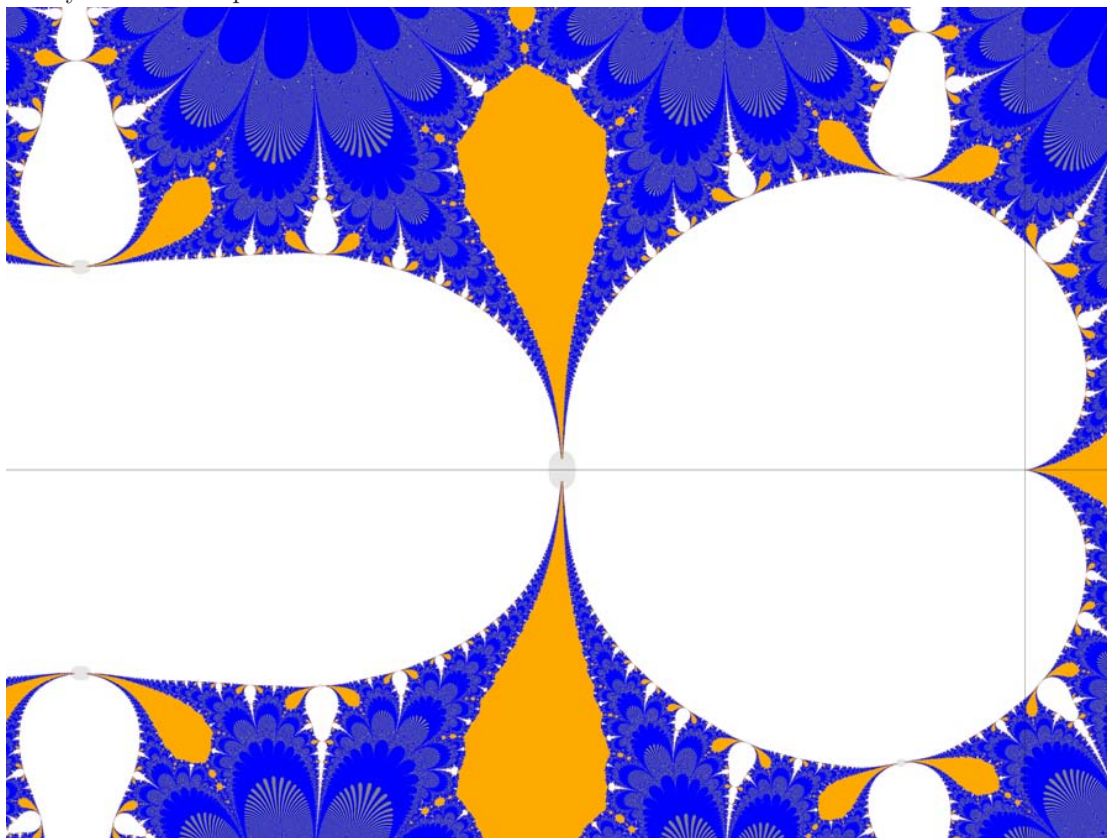
C5L30_127.89872-4.300.bmp : 9600 × 1800



$xp = yp = 0.00333333$, $[127.89872, 159.8984] \times [-4.3, 1.69994]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 30

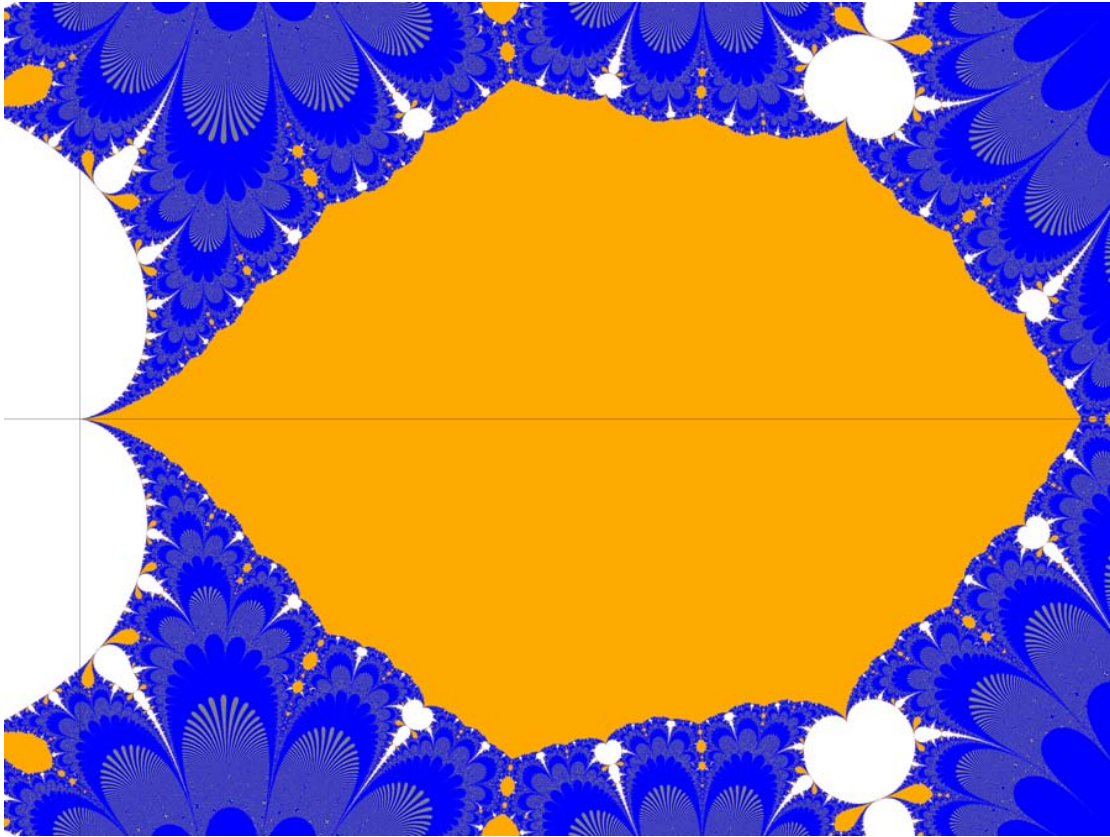
2.2 $z_0, 1, 3, 5, 7, 9, 11$ および 13 を含む Fatou 成分

C00xy-2.20-0.8.bmp : 3600 × 2700



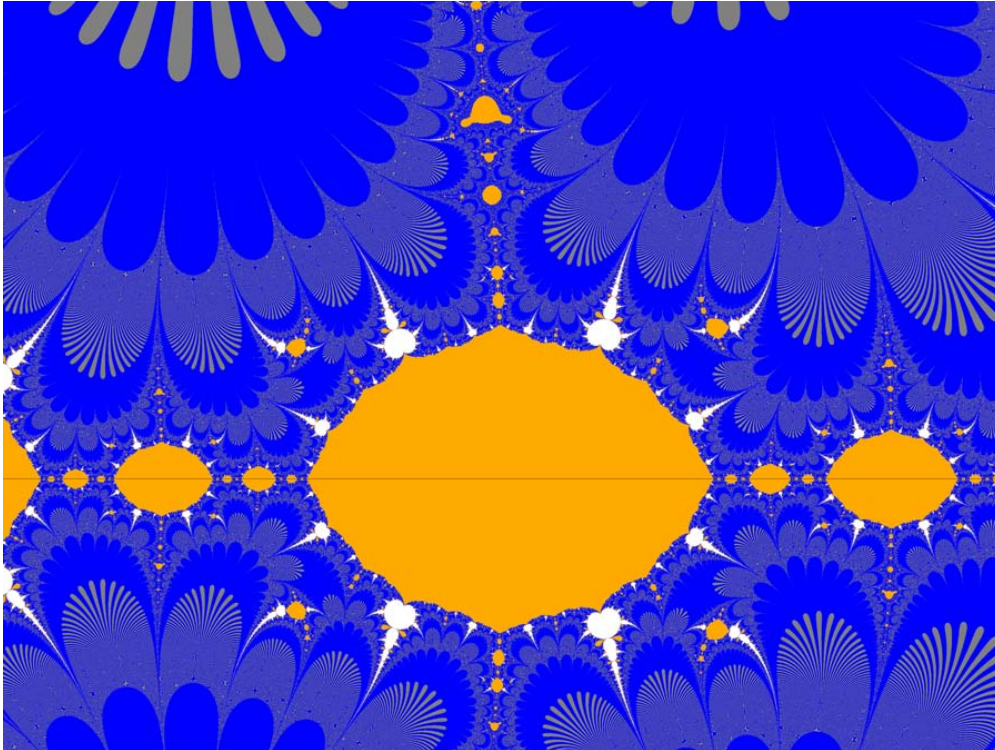
$xp = yp = yp = 0.00066666$, $[-2.20, 0.20] \times [-0.8, 1.0]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

C01xy_-0.150-0.825.bmp : 3600 × 2700



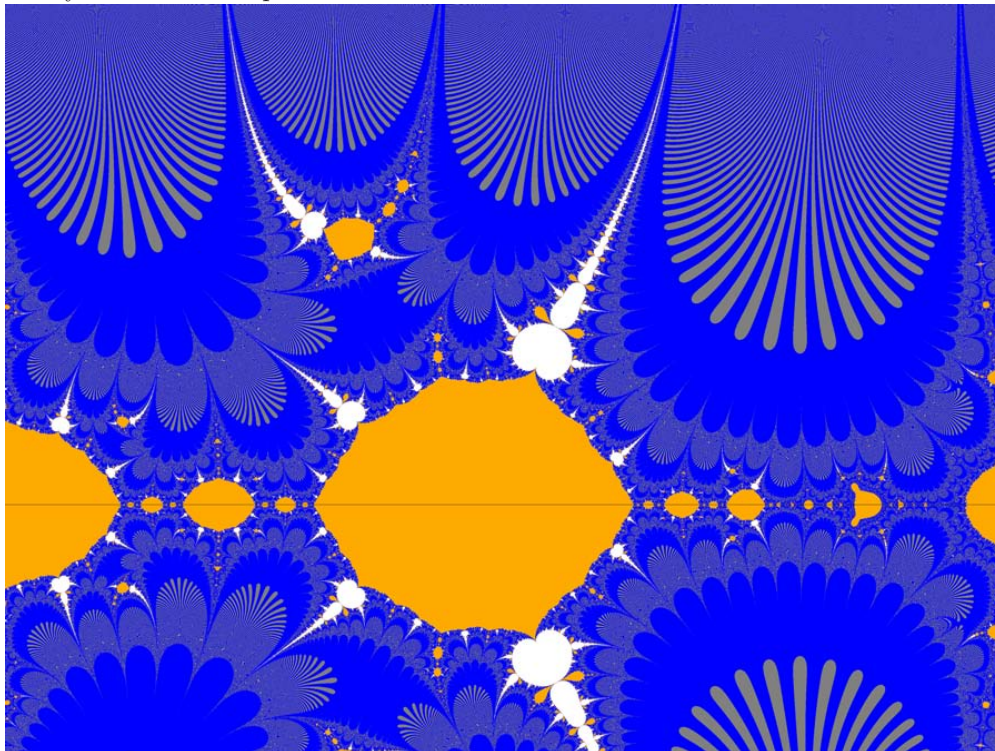
$xp = yp = 0.0006111111$, $[-0.15, 2.05] \times [-0.825, 0.825]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

C03xy_1.90-0.60.bmp : 3600 × 2700



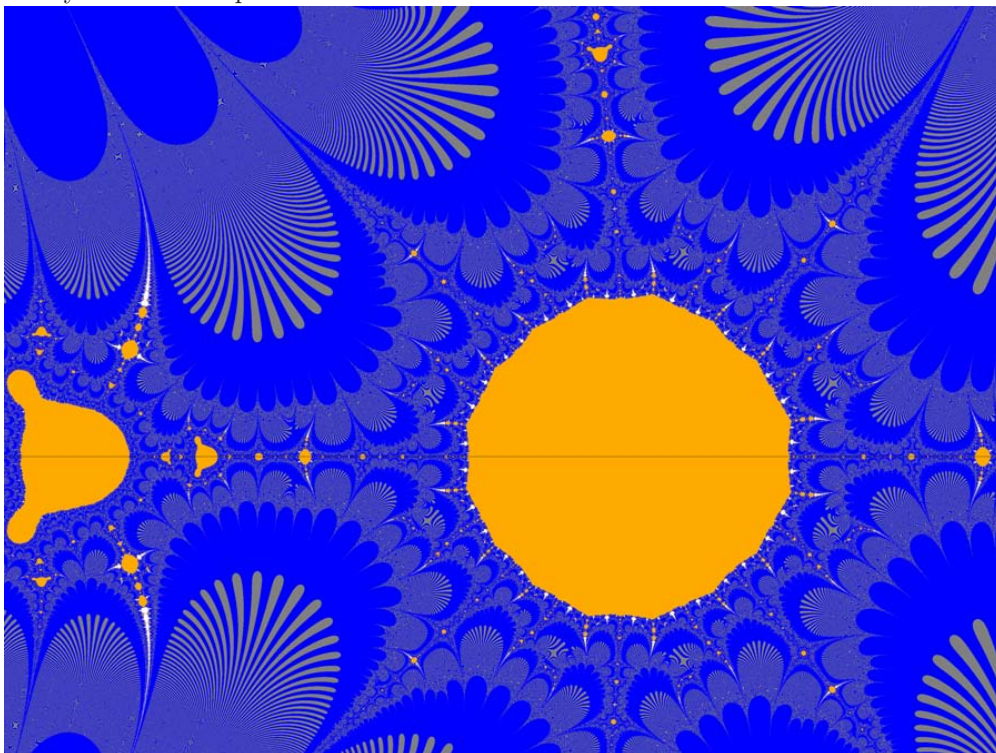
$xp = yp = 0.000611111$, $[1.90, 4.10] \times [-0.60, 1.05]$ $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

C05xy_3.000-1.000.bmp : 3600 × 2700



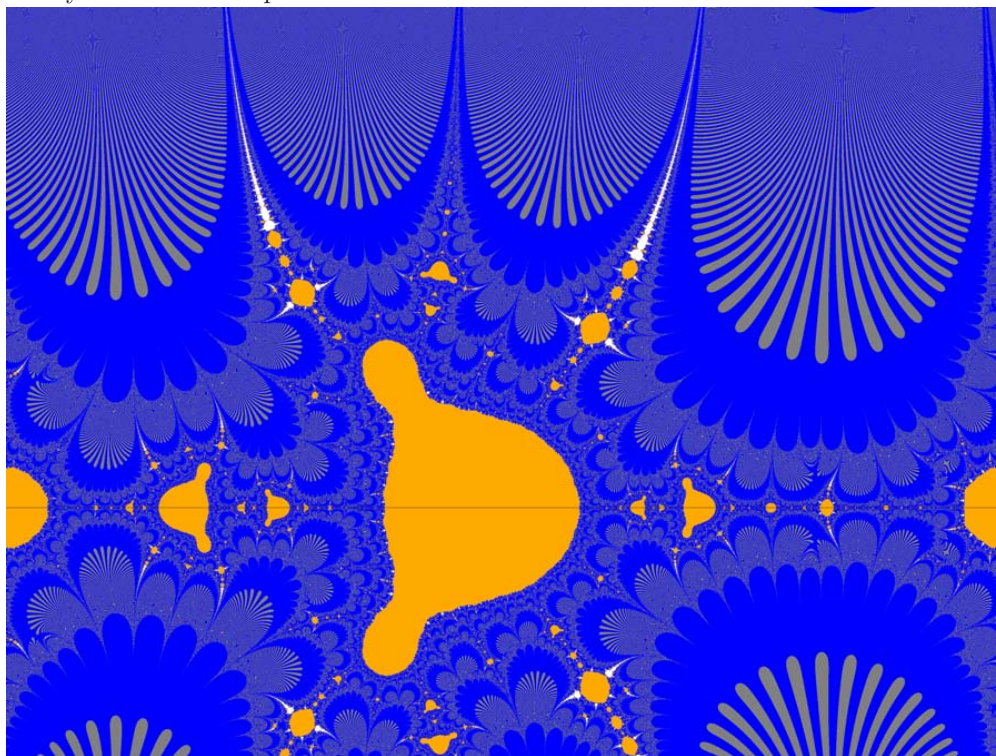
$xp = yp = 0.0011111$, $[3.0, 7.0] \times [-1.0, 2.0]$ $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

C07xy_6.38-0.30.bmp : 3600 × 2700



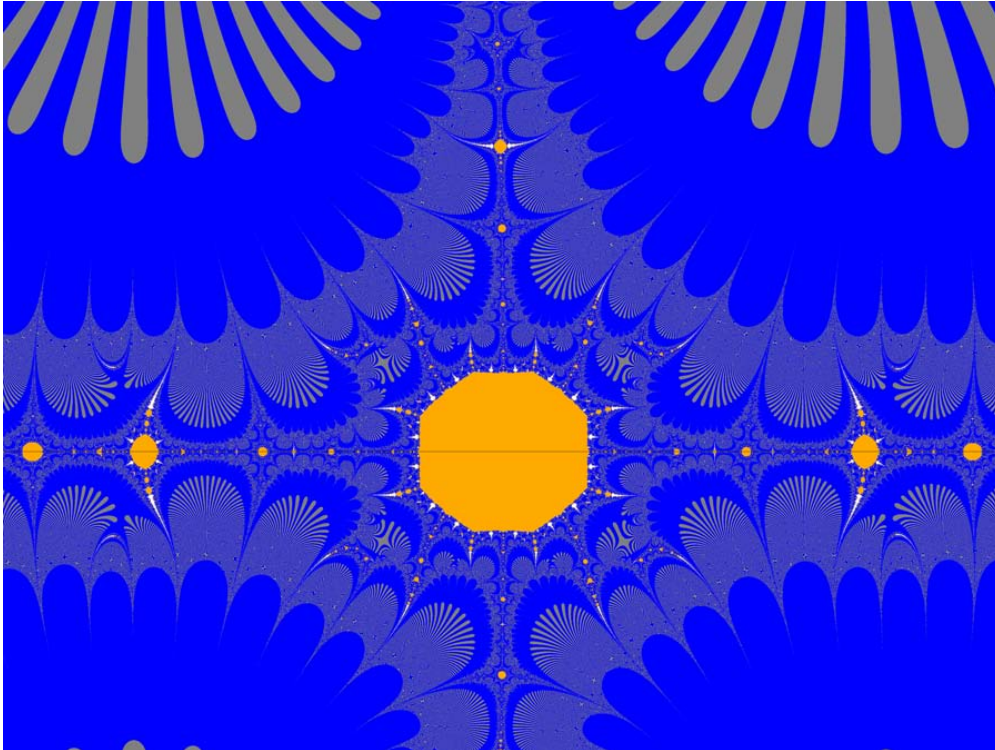
$x_p = y_p = 0.00027777$, $[6.38, 7.38] \times [-0.30, 0.45]$ $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

C09xy_7.000-1.000.bmp : 3600 × 2700



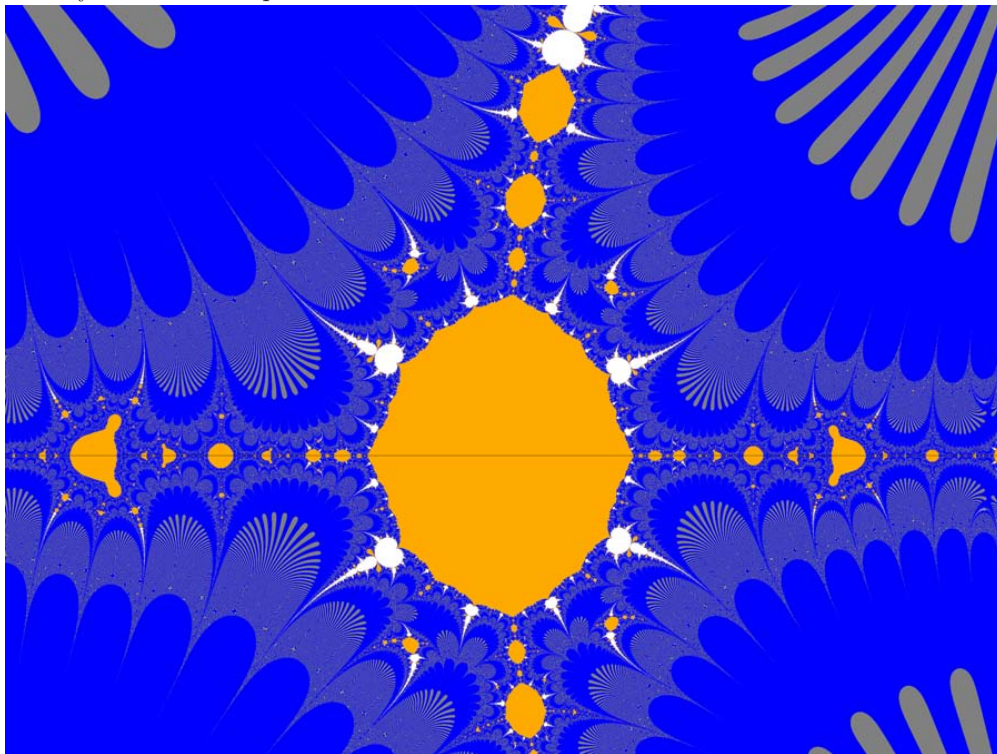
$x_p = y_p = 0.0011111$, $[7.000, 11.000] \times [-1.000, 2.000]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

C11xy_10.00-0.60.bmp : 3600 × 2700



$xp = yp = 0005555556$, $[10.0, 12.0] \times [-0.6, 0.9]$ $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

C013xy_12.00-0.60.bmp : 3600 × 2700

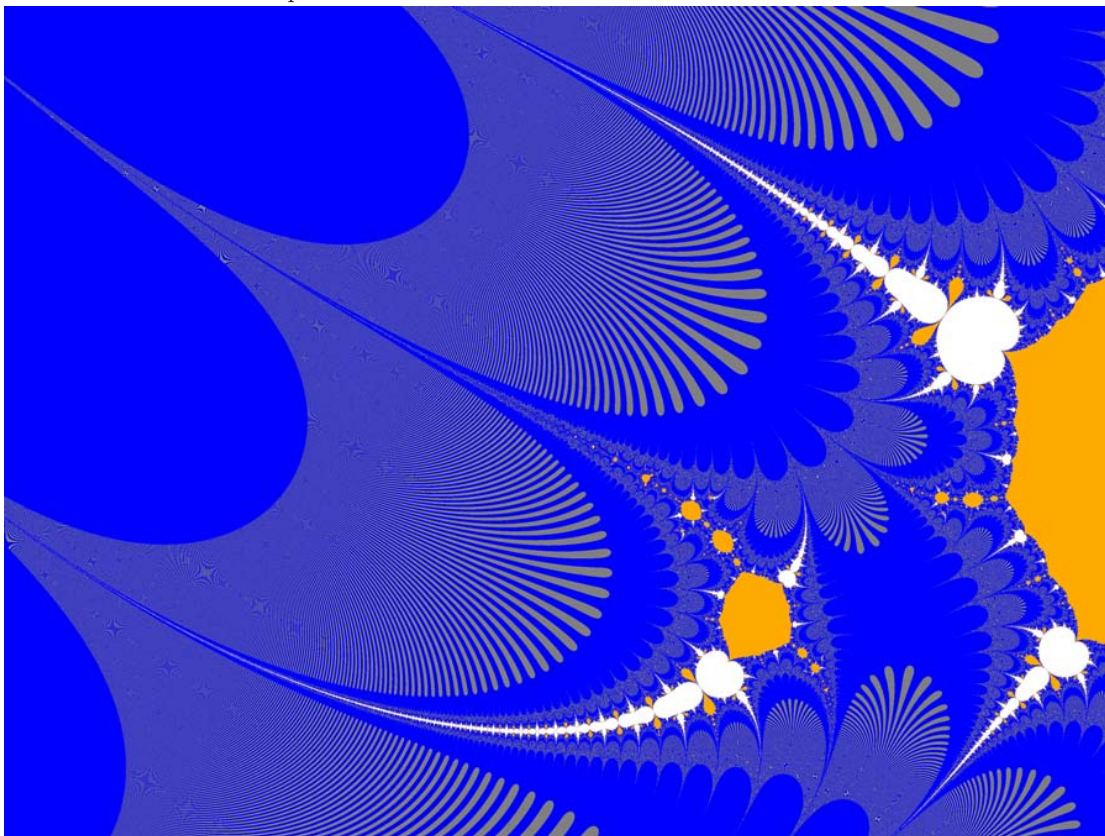


$xp = yp = 0.0005555556$, $[12.00, 14.00] \times [-0.60, 0.90]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

2.3 $0.60 < x < 0.80, 0.9420 < y < 1.0919$

下図は C 図 C011_0.70_0.60.bmp : $[0.7, 1.5] \times [0.6, 1.2]$ の部分を含む拡大図 .

C0111_0.6000_0.9420.bmp : 3600×2700



$xp = yp = 0.00005553333, [0.6, 0.8] \times [0.9420, 1.0919]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

下図は先図 C0111G_0.6000_0.9420.bmp : $[0.6, 0.8] \times [0.9420, 1.0919]$ の部分を含む拡大図 .

C0111G_0.7398_0.9727.bmp : 3600×2700

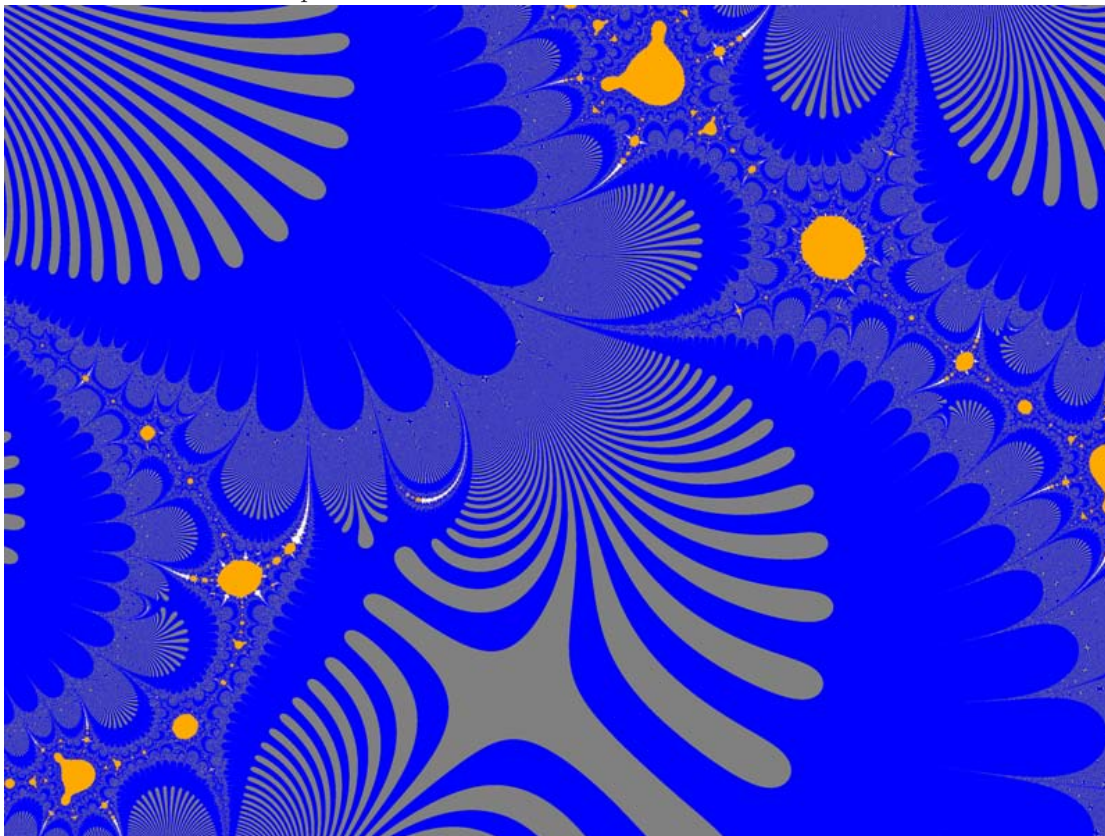


$xp = yp = 0.0000136278$, $[0.7398, 0.78886] \times [0.9727, 1.009495]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

2.4 $2.94 < x < 3.02$, $0.595 < y < 0.655$

下図は D 図 C0121_2.94_0.595.bmp : $[2.94, 3.02] \times [0.595, 0.655]$ の部分の拡大図 .

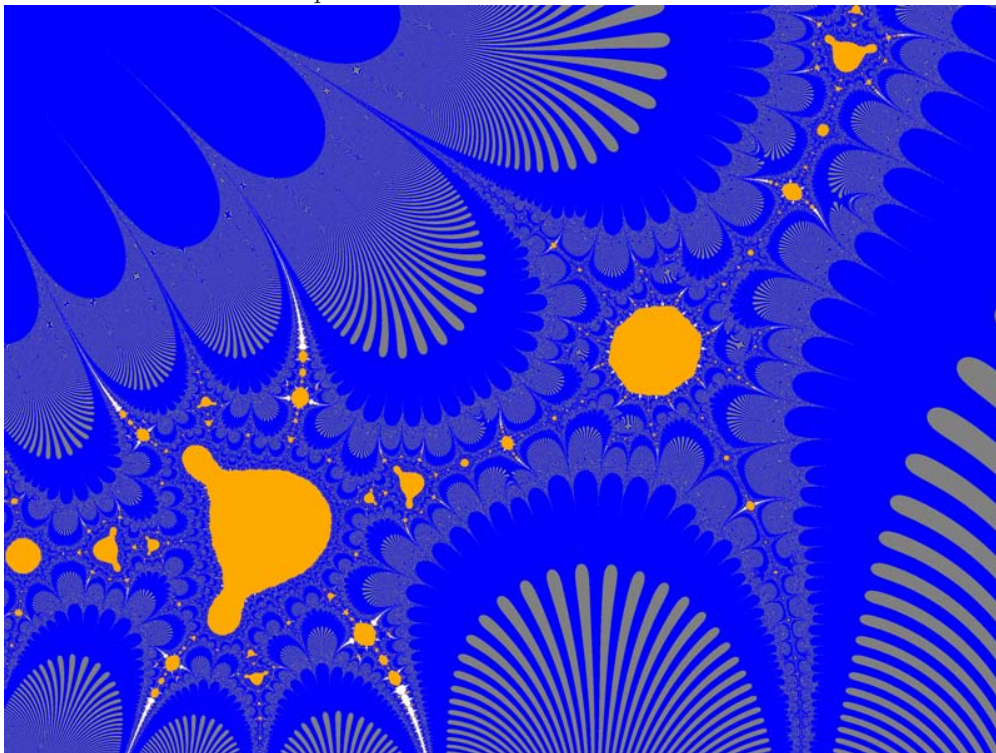
C01212_2.9446_0.6297.bmp : 3200×2400



$xp = yp = 0.00000250$, $[2.9446, 2.9526] \times [0.6297, 0.6357]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

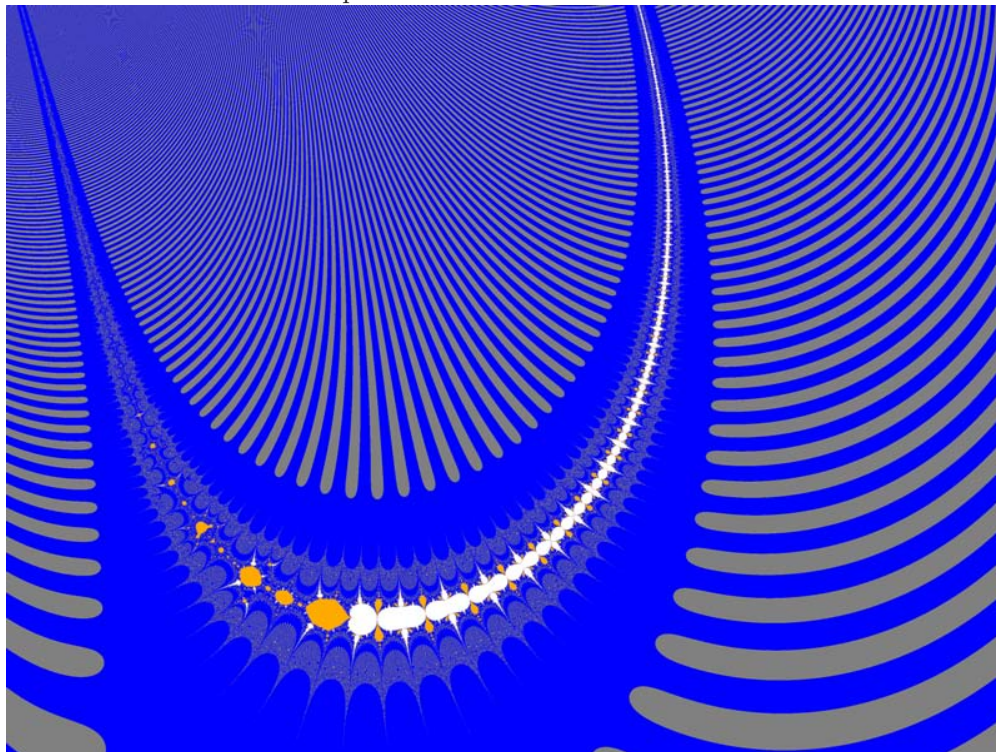
次頁の図は上図 C01212_2.9446_0.6297.bmp :
 $[2.9446, 2.9526] \times [0.6297, 0.6357]$ の部分の拡大図 .

C012121.2.9446_0.6297.bmp : 3200 × 2400



$xp = yp = 0.0000006250$, $[2.9446, 2.9466] \times [0.6297, 0.6312]$ $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

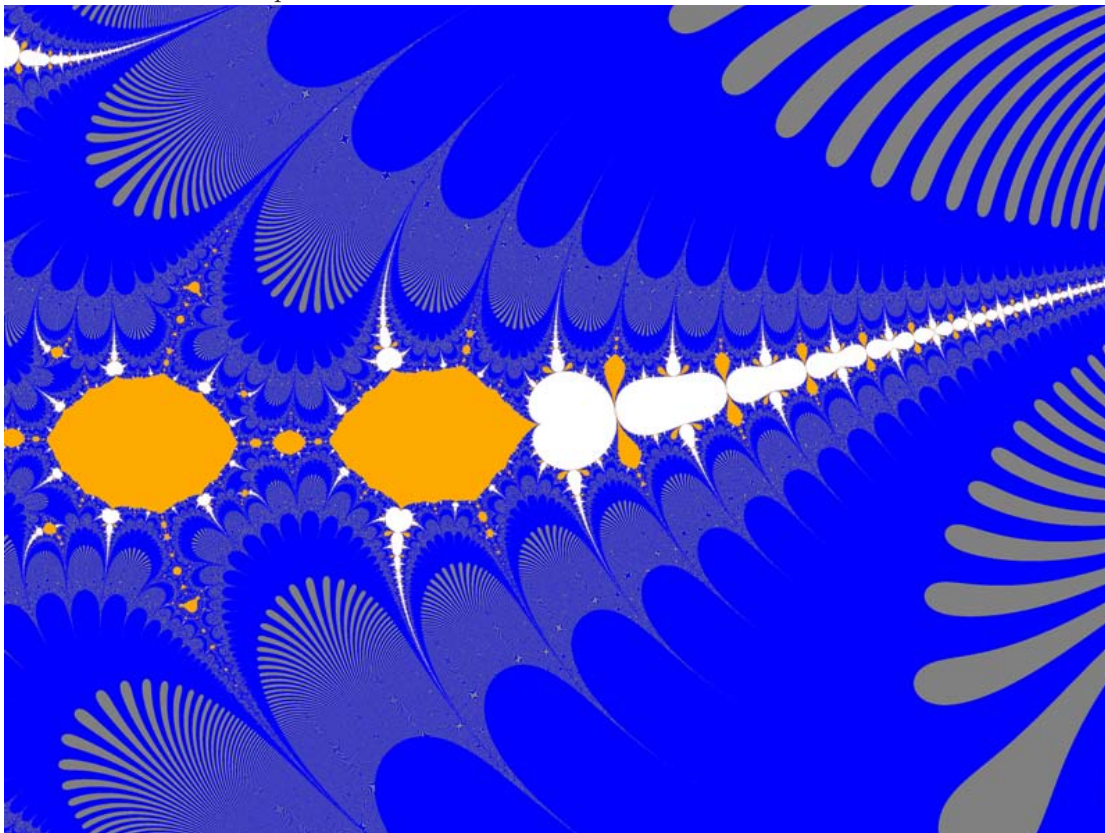
C012122.2.94726_0.63200.bmp : 3200 × 2400



$xp = yp = 0.0000006250$, $[2.94726, 2.94926] \times [0.6320, 0.6335]$ $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

下図も D 図 C0121_2.94_0.595.bmp : $[2.94, 3.02] \times [0.595, 0.655]$ の部分の拡大図 .

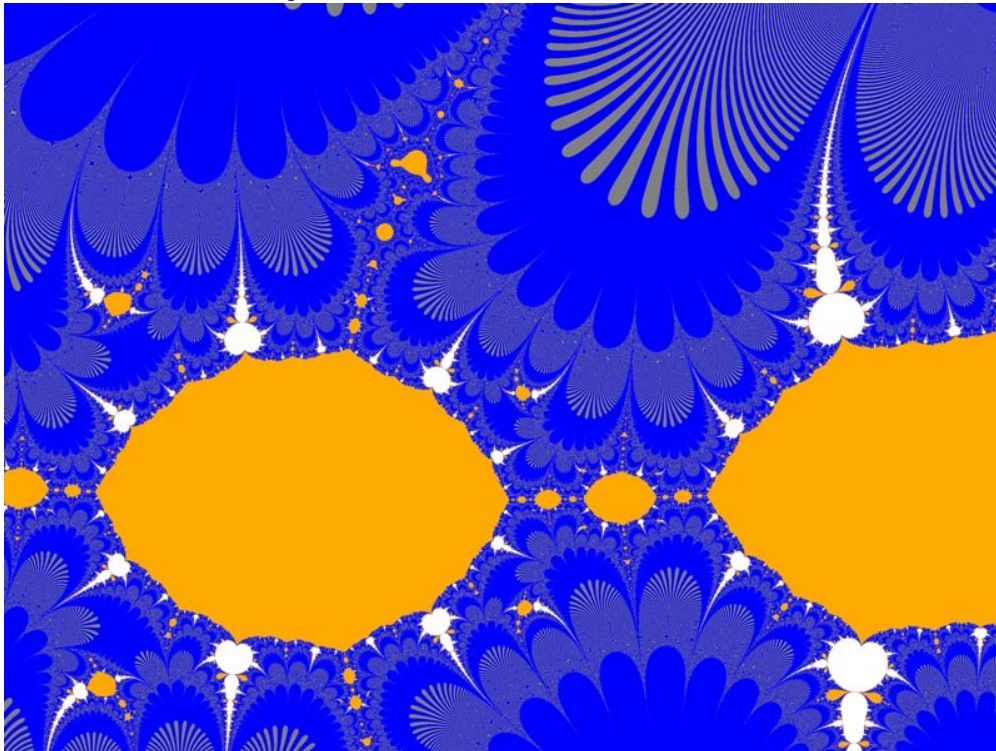
C01211_2.997_0.620.bmp : 3200×2400



$xp = yp = 0.00000125$, $[2.997, 3.001] \times [0.620, 0.623]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

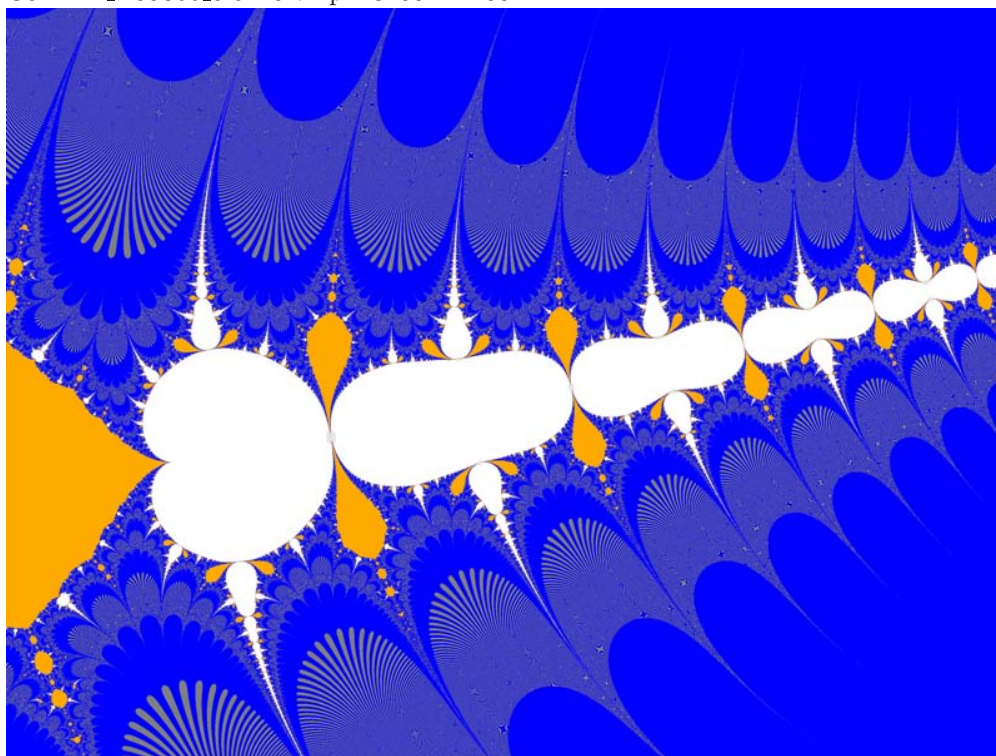
次頁の図は上図 C01211_2.997_0.620.bmp : $[2.997, 3.001] \times [0.620, 0.623]$ の部分の拡大図 .

C012111_2.997_0.621.bmp : 3200 × 2400



$xp = yp = 0.000000520$, $[2.997, 2.998664] \times [0.621, 0.622248]$, $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

C012112_2.99866_0.6210.bmp : 3200 × 2400

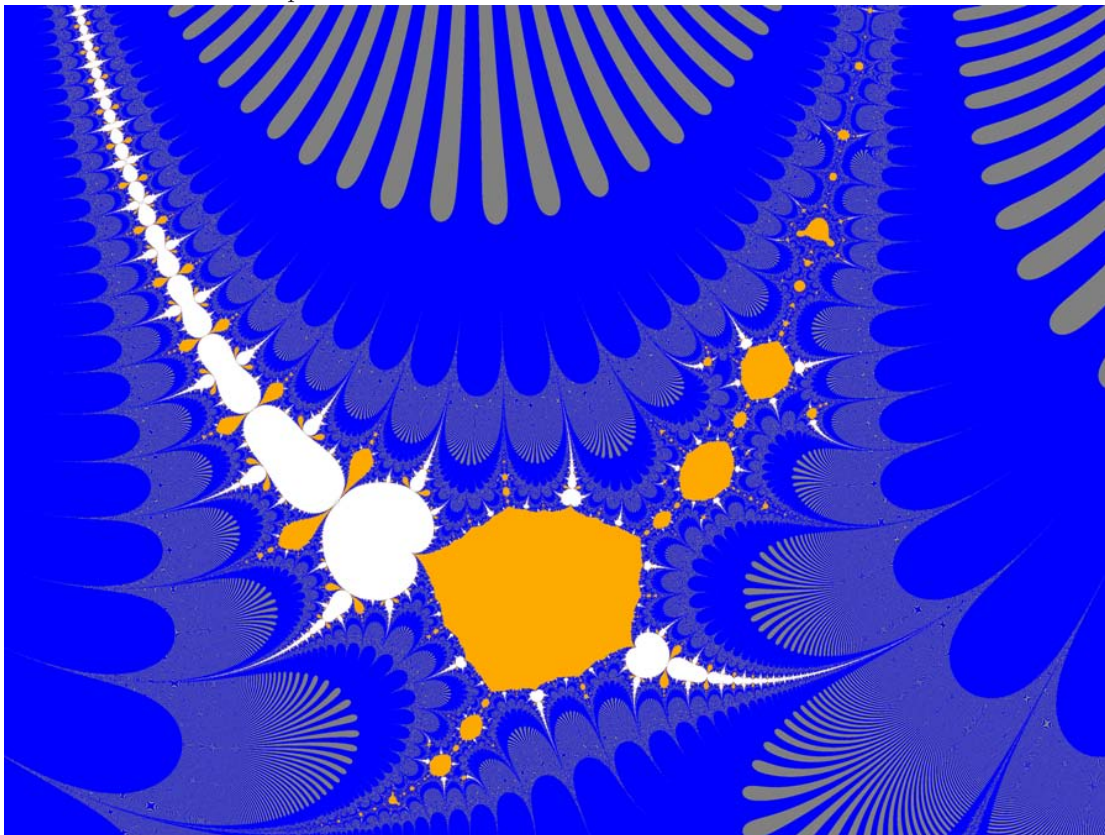


$xp = yp = 0.000000520$, $[2.99866, 3.000324] \times [0.621, 0.622248]$

$F(z)$ の反復回数 ≤ 100

2.5 $3.888 < x < 4.912$, $0.8416 < y < 1.6096$

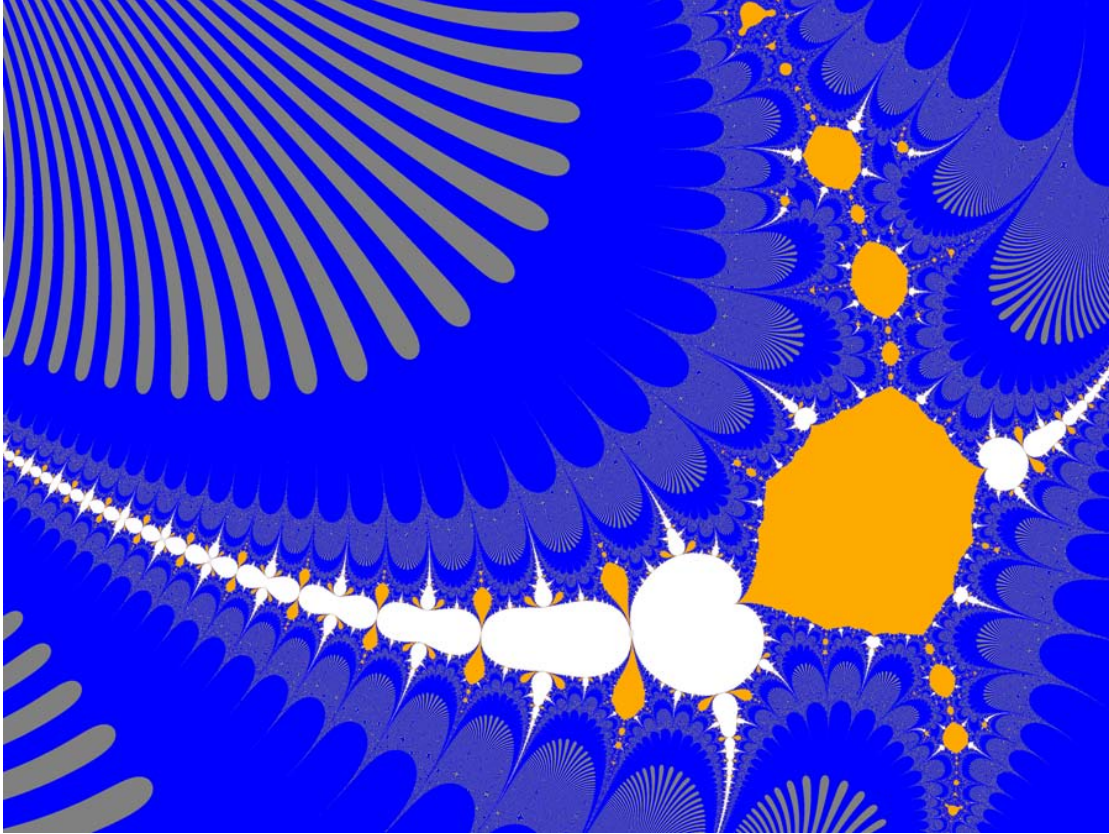
C0100_3.8880_0.8416.bmp : 3600 × 2700



$xp = yp = 0.0002844444$, $[3.888, 4.912] \times [0.8416, 1.6096]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

次頁図は上図 C0100_3.8880_0.8416.bmp の部分 $[4.505, 4.545] \times [1.27, 1.30]$ の拡大図 .

C01011.4.5050-1.2700.bmp : 3600 × 2700

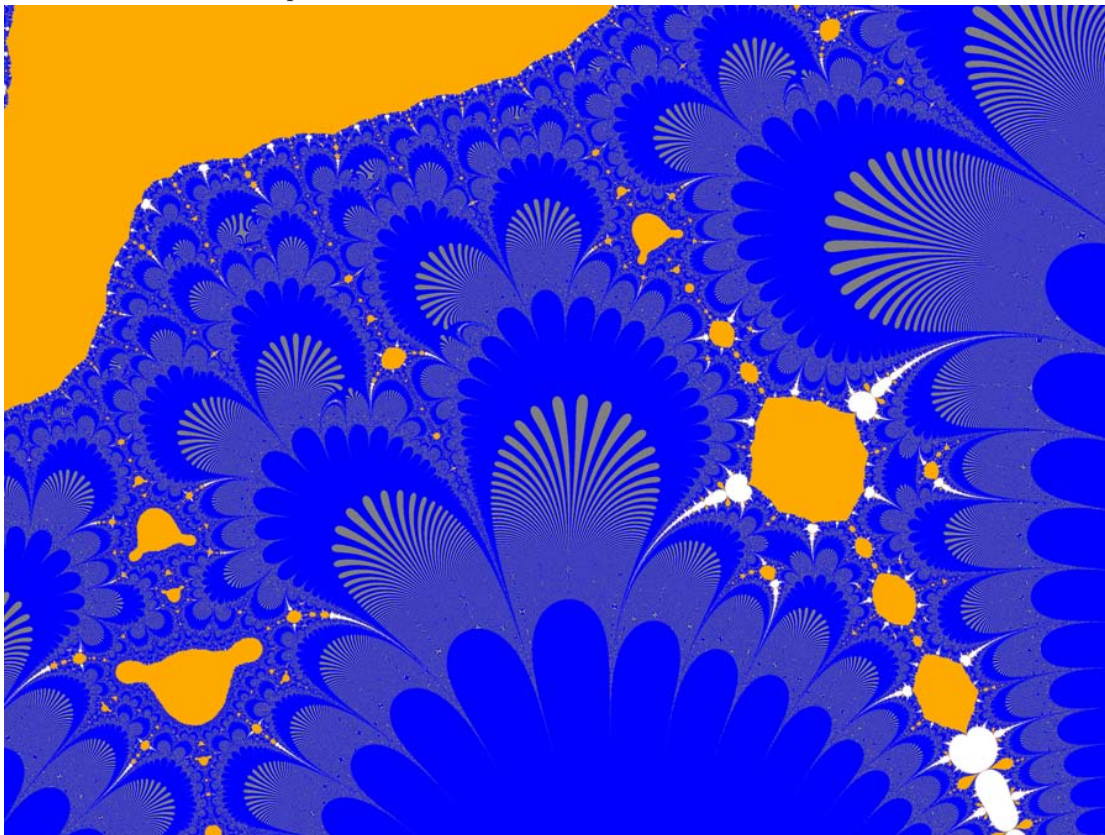


$x_p = y_p = 0.0000111108$, $[4.505, 4.545] \times [1.27, 1.30]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

2.6 $8.5427 < x < 9.6647, -1.1000 < y < -0.2585$

下図は 2.2 C09xy_7.000-1.000.bmp の部分の拡大図 .

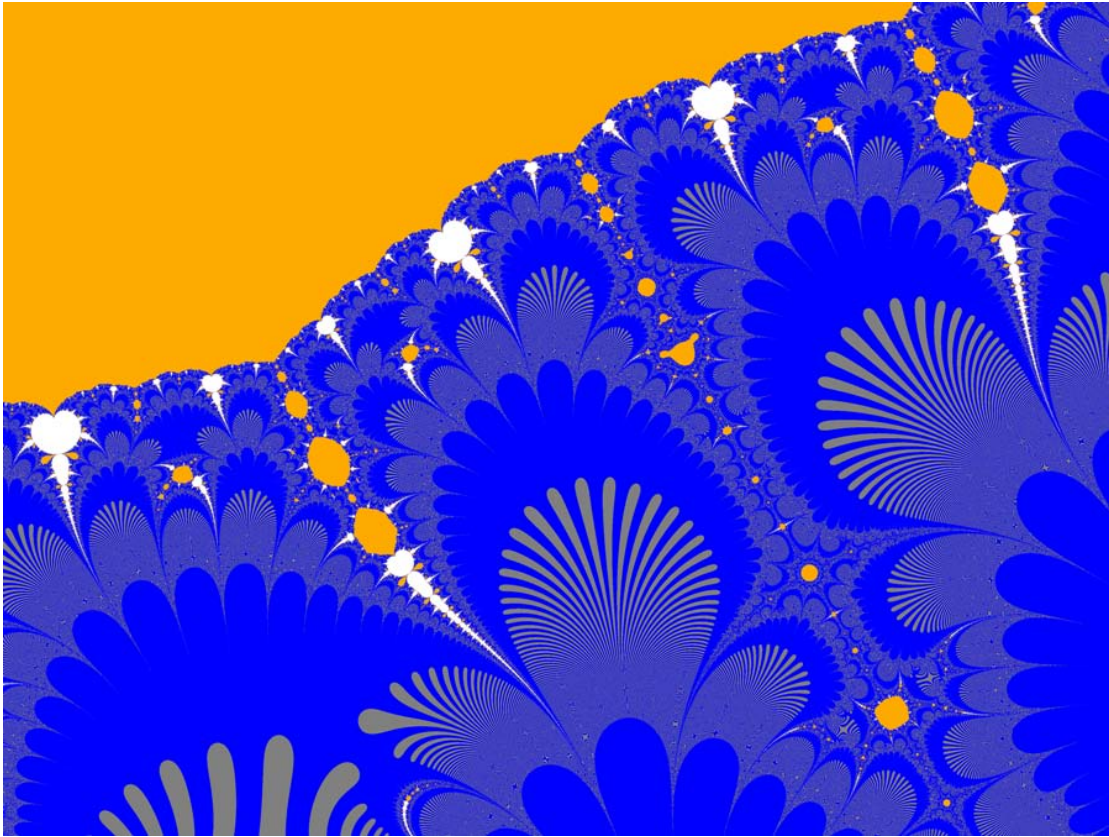
C0985_8.5427-1.1000.bmp : 3600 × 2700



$xp = yp = 0.000311666666, [8.5427, 9.6647] \times [-1.1000, -0.2585]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

次頁図は上図 C0985_8.5427-1.1000.bmp の部分
[9.039, 9.12593] × [-0.3675, -0.3023] の拡大図 .

C0990_9.0390-0.3675.bmp : 3600 × 2700

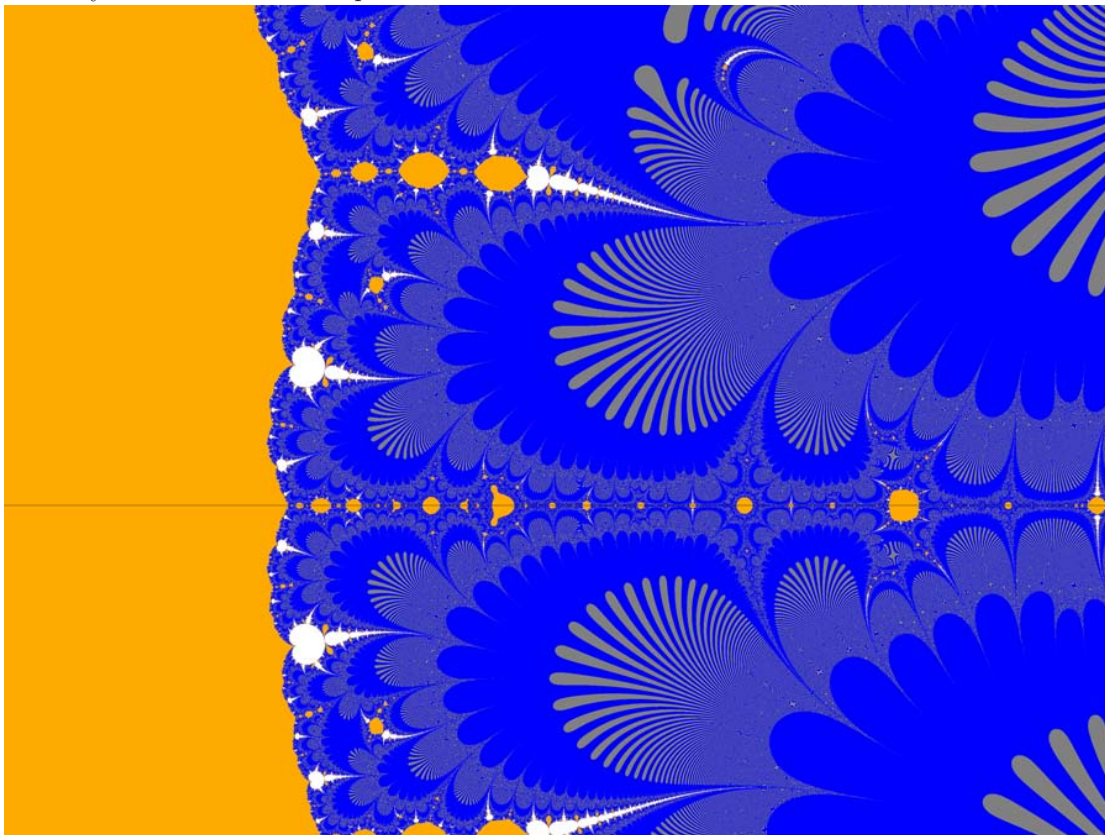


$xp = yp = 0.000024147333$, $[9.039, 9.12593] \times [-0.3675, -0.3023]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

2.7 $9.27020 < x < 9.35668, -0.025946 < y < 0.038918$

下図も前図 2.2 C09xy_7.000-1.000.bmp の部分の拡大図 .

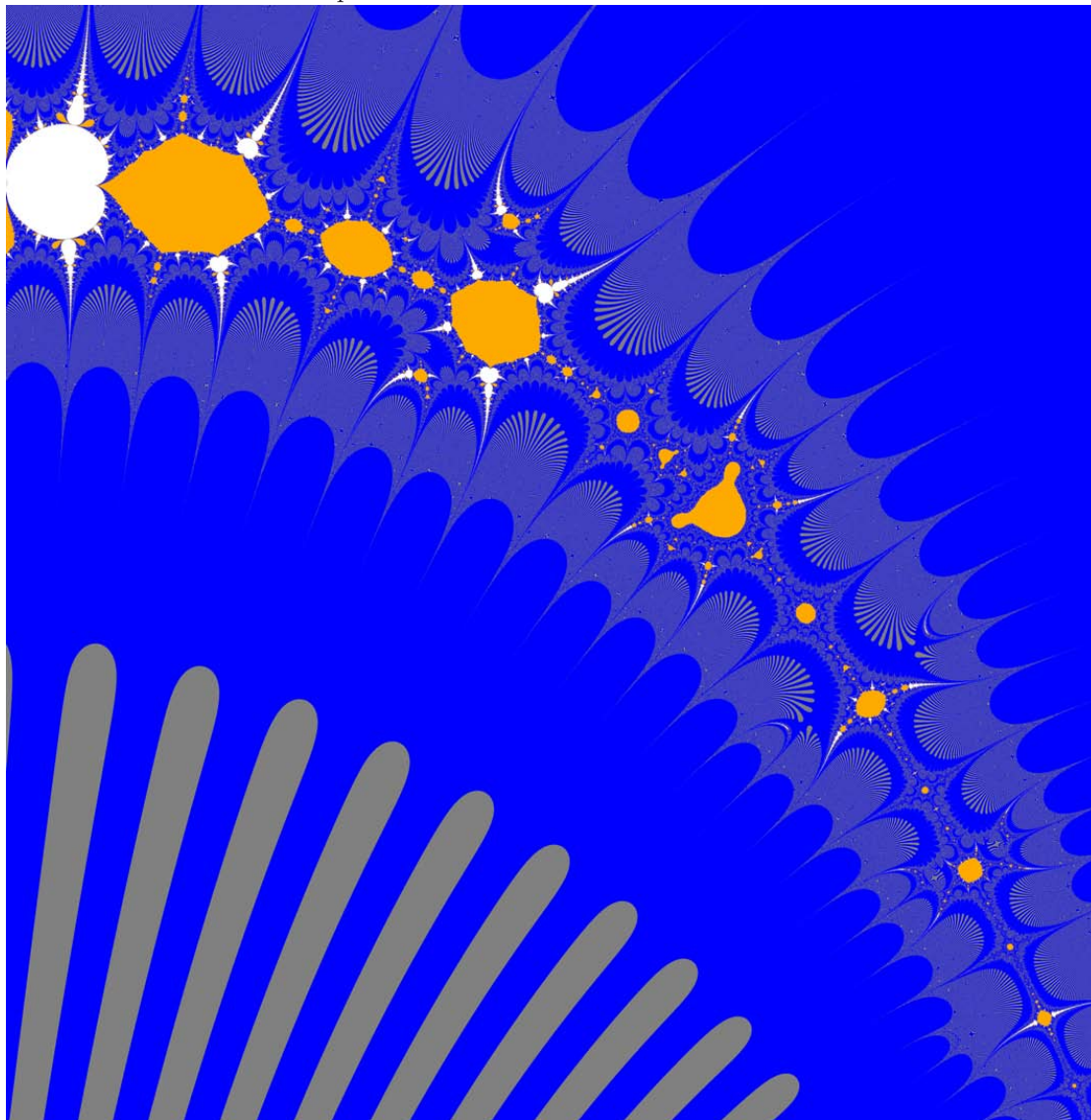
C0992xy_9.27020-0.025946.bmp : 3600×2700



$xp = yp = 0.0000240237839$
 $[9.27020, 9.35668] \times [-0.025946, 0.038918]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

2.8 $12.41673 < x < 12.66298, -1.762858 < y < -1.511514$

C0213-12.41673-1.762858.bmp : 5320 × 5430



$xp = yp = 0.000046288$
 $[12.41673, 12.66298] \times [-1.762858, -1.511514]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100



2.9 $4.529632 < x < 4.542132, 1.125 < y < 1.325$

C1211_4.529632_1.125000.bmp : 800×12800

$xp = yp = 0.000015625$

$[4.529632, 4.542132] \times [1.125, 1.325]$

$F(z)$ の反復回数 ≤ 100

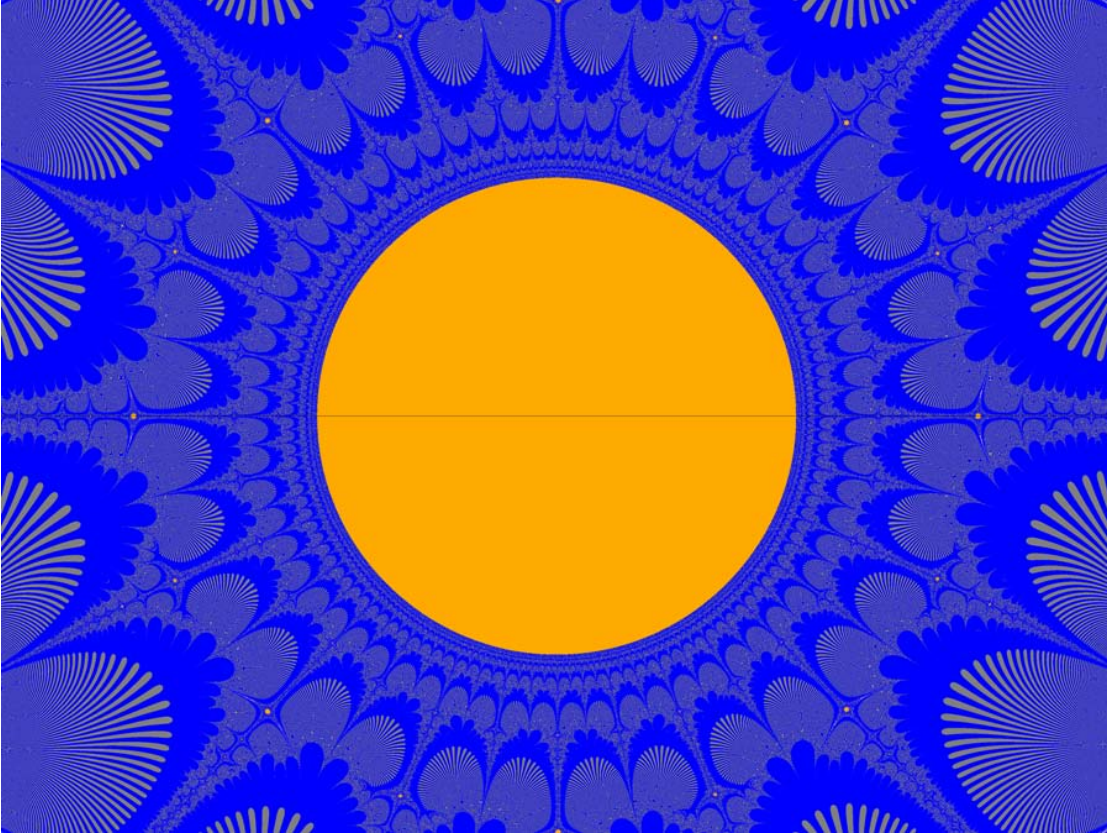
2.10 27, 31 または 137 を含む Fatou 成分

2.1 C1L30_-0.100-4.300.bmp を見ると, $z = 27$ および $z = 31$ の近くは, 明灰色 RGB(230,230,230) で塗られている .

$$F^{41}(27) = \varphi^{41}(27) = 1, \quad F^{39}(31) = \varphi^{39}(31) = 1$$

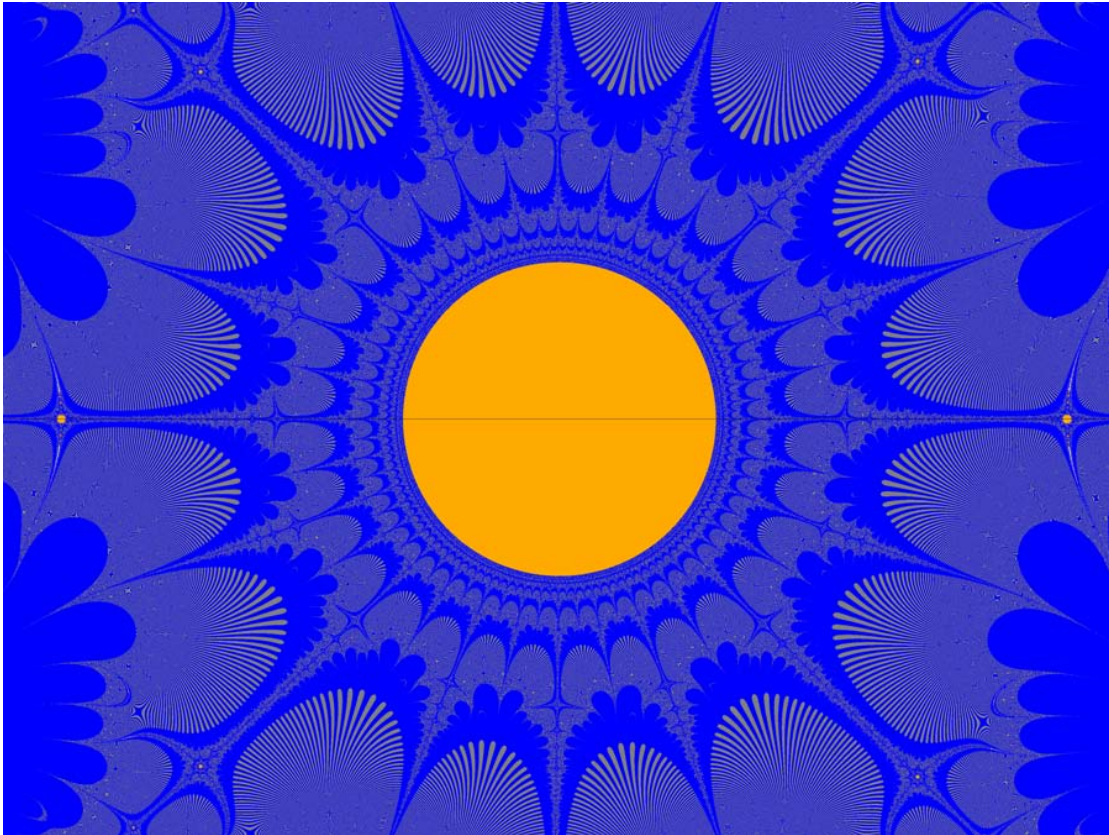
である事から, 関数 $F(z)$ の反復回数を 50 まで増やして作図すると, つぎの図が得られる .

C27n50_26.88-0.09.bmp : 3600 × 2700



$xp = yp = 0.00006666$
 $[26.88, 27.12] \times [-0.09, 0.09]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 50

C31n50_30.88-0.09.bmp : 3600 × 2700



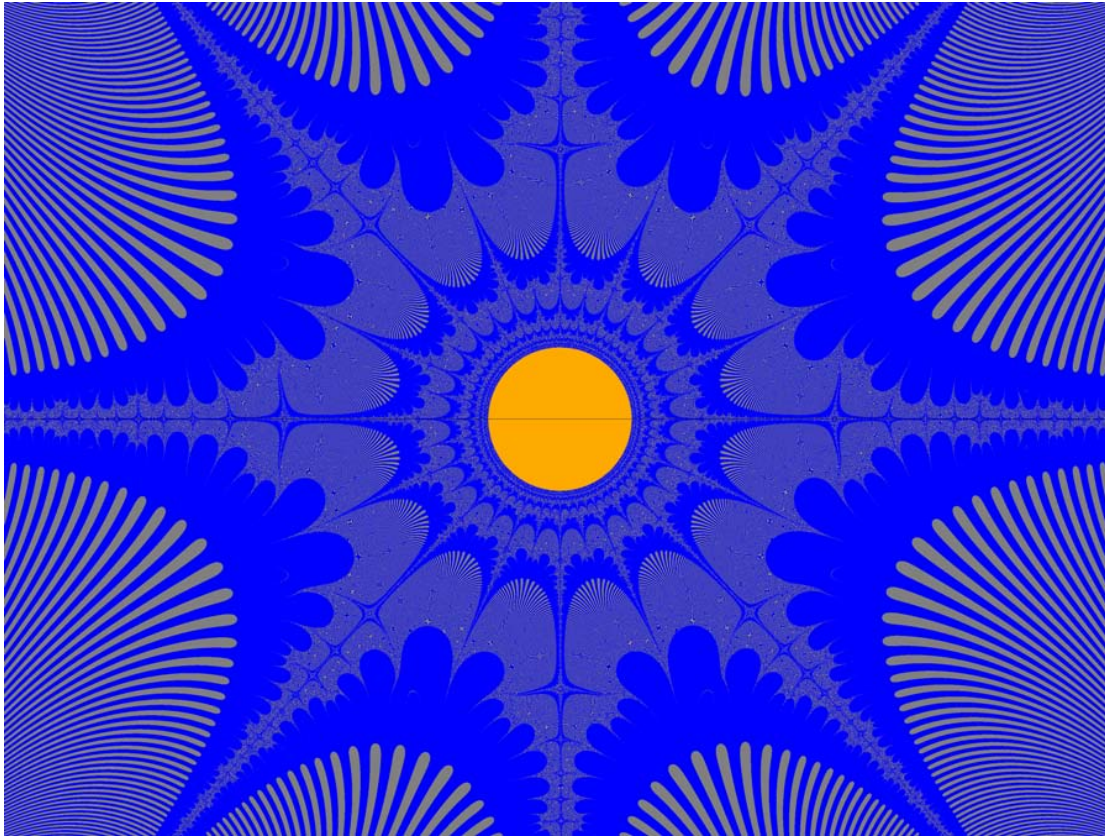
$xp = yp = 0.00006666$
 $[30.88, 31.12] \times [-0.09, 0.09]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 50

2.1 C5L127.89872-4.300.bmp を見ると, $z = 137$ の近くも, 明灰色 RGB(230,230,230) で塗られている.

$$F^{32}(137) = \varphi^{32}(137) = 1$$

であるので, 関数 $F(z)$ の反復回数を 32 まで増やして描画すると, つぎの図が得られる.

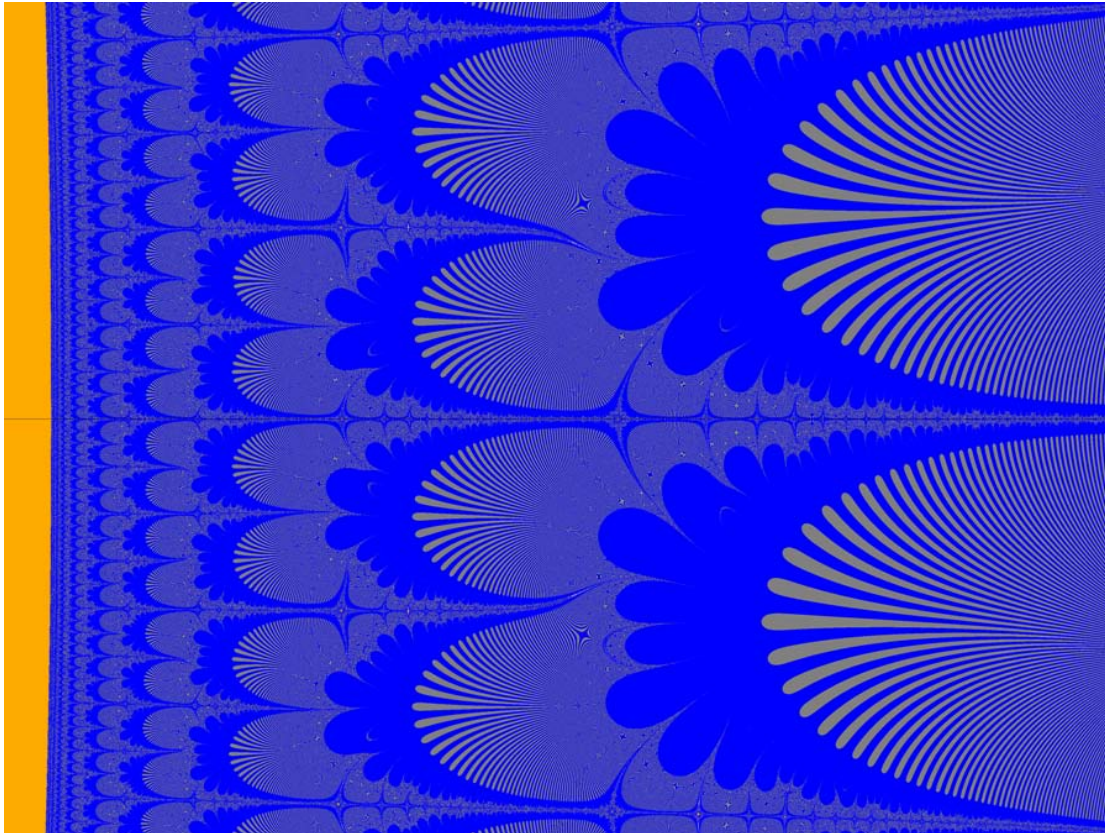
C137n32_136.88-0.09.bmp : 3600 × 2700



$xp = yp = 0.000066666$
 $[136.88, 137.12] \times [-0.09, 0.09]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 32

図 C27n50.26.88-0.09 に見られる 27 を含む Fatou 成分があまりにも円に見えるので，27 を含む Fatou 成分の境界近辺で拡大してみたのが下図である．画像作成プログラム 4.1 Cimage.cpp で $G(z)$ を近似計算している項数を $lm = 10000$ に増やして作図した．27 を含む Fatou 成分の境界が円周であるとは信じられない；計算プログラムに欠陥があるのだろうか？

C27lm10000.27.051500-0.00140625.bmp : 3600 × 2700



$xp = yp = 0.0000010416666$
 $[27.0515, 27.05525] \times [-0.00140625, 0.00140625]$
 $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

第3章 関数 F の性質

3.1 関数 F の不動点 z_0 の存在

関数 $F(z)$ が負の奇数で関数値 0 を取ることは明らかである． $F(0) = F(-1) = 0$ も成り立っている． $F'(0) > 1$ であるから，十分に 0 に近い負の数 x で $\frac{F(x)}{x} > 1$ すなわち， $F(x) < x$ が成り立っている． $F(-1) > -1$ であるから，中間値の定理により開区間 $(-1, 0)$ の中に $(F(z))$ の変域を実数上に制限した関数 $F(x)$ の不動点が存在することがわかる．この不動点を求めよう．

$$F(z) = \frac{2}{\pi^2}(1 + \cos \pi z) \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\}$$

であるから，

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(z) = -\frac{2}{\pi} \sin \pi z \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \\ \quad - \frac{4}{\pi^2} (1 + \cos \pi z) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(z-2m-1)^3}, \\ F''(z) = -2 \cos \pi z \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \\ \quad + \frac{8 \sin \pi z}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(z-2m-1)^3} \\ \quad + \frac{12}{\pi^2} (1 + \cos \pi z) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{(z-2m-1)^4} \end{array} \right.$$

と計算できる． $-\frac{1}{2} < z = x < 0$ のとき， $F''(x) > 0$ と成ることがわかるので，関数 $F(x)$ は開区間 $(-\frac{1}{2}, 0)$ で凸で $F'(x)$ は開区間 $(-\frac{1}{2}, 0)$ で狭義単調に増加している．改めて $F(-\frac{1}{4})$ を計算してみると，

$$\begin{aligned} 0 > F\left(-\frac{1}{4}\right) &= \frac{2}{\pi^2} (1 + \cos \frac{\pi}{4}) \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \\ &\geq \frac{2+\sqrt{2}}{\pi^2} \sum_{m=0}^{10} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} - \frac{2+\sqrt{2}}{\pi^2} \sum_{m=11}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{2(2m+1)^3} \\ &\left(\because 0 < \frac{1}{(2m+1)^2} - \frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} < \frac{1}{2(2m+1)^3}, \quad (m=0, 1, \dots) \right) \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{\pi^2} \left[\sum_{m=0}^{10} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} - \sum_{m=11}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{2(2m+1)^3} \right]. \end{aligned}$$

このとき，計算して

$$0 > \sum_{m=0}^{10} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} = -0.47975 \dots > -\frac{1}{2},$$

また 1.2 における $F'(0)$ の計算の途中で示した

$$0 < \sum_{m=11}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{2(2m+1)^3} < \sum_{m=11}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} < \frac{1}{21}$$

より

$$0 > F\left(-\frac{1}{4}\right) \geq \frac{4}{\pi^2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{21}\right) > -\frac{4}{9} \times \frac{23}{42} = -\frac{46}{189} > -\frac{1}{4}.$$

関数 $F(x)$ は开区間 $(-\frac{1}{2}, 0)$ で凸であるから， $F(x)$ は开区間 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 内には唯一つの不動点 z_0 を持つ．平均値の定理により，ある $z_1 \in (z_0, 0)$ で

$$\frac{F(z_0)}{z_0} = 1 = F'(z_1)$$

であるが， $F'(x)$ は开区間 $(-\frac{1}{2}, 0)$ で単調増加あるから $F'(z_0) < 1 = F'(z_1)$ でなければならない．加えて， $F'(z_0) > 0$ であることを示そう．

$$\begin{aligned} F'\left(-\frac{1}{4}\right) &= \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi z}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \\ &\quad + \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^3} \\ &= \frac{2(2+\sqrt{2})}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^3} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(2m+1)^2} - \frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} \right\} \\ &> \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left[\frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^3} - \left\{ \frac{1}{(2m+1)^2} - \frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} \right\} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^3} - \frac{m+\frac{9}{16}}{(2m+1)^2 \left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(2m+1)}{\left(2m+1+\frac{1}{4}\right)^2} \left\{ \frac{1}{2m+1+\frac{1}{4}} - \frac{m+\frac{9}{16}}{(2m+1)^2} \right\} > 0. \\ \therefore \left(2m+\frac{5}{4}\right) \left(m+\frac{9}{16}\right) &= 2m^2 + \frac{38}{16}m + \frac{45}{64} < (2m+1)^2. \end{aligned}$$

こうして， $0 < F'(z_0) < 1$ が示された．計算機を使って吸引的不動点 z_0 の近似値を求めれば， $z_0 = -0.0327 \dots$ が得られる．

3.2 $F(z)$ の正奇数における同等連続性

すべての正の奇数が $F(z)$ の Fatou 集合に属していることを意味するつぎの事実が成り立つ：

定理. $z = 1$ の近くで

$$|F(z) - 1| \leq \frac{4}{5} \cdot |z - 1| \quad \left(|z - 1| < \frac{1}{3\pi}\right)$$

が成り立つ，さらに $z = 2n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) の近くで

$$|F(z) - F(2n + 1)| < 3(n + 1) \cdot \pi^2 |z - 2n - 1|^2 \quad \left(|z - 2n - 1| < \frac{1}{3\pi}\right)$$

が成り立つ．

証明．

$$1 + \cos \pi z = 1 - \cos \pi(z - 2n - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+2} (z - 2n - 1)^{2k+2}}{(2k + 2)!}$$

であるから， $z = 2n + 1$ の近くでは，

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{2}{\pi^2} (1 + \cos \pi z) \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2m + 1) \left\{ \frac{1}{(z - 2m - 1)^2} - \frac{1}{(2m + 1)^2} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi^2} (1 - \cos \pi(z - 2n - 1)) \varphi(2n + 1) \left\{ \frac{1}{(z - 2n - 1)^2} - \frac{1}{(2n + 1)^2} \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\pi^2} (1 - \cos \pi(z - 2n - 1)) \sum_{n \neq m \geq 0} \varphi(2m + 1) \left\{ \frac{1}{(z - 2m - 1)^2} - \frac{1}{(2m + 1)^2} \right\} \\ &= \frac{2\varphi(2n + 1)}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{(z - 2n - 1)^2} - \frac{1}{(2n + 1)^2} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+2} (z - 2n - 1)^{2k+2}}{(2k + 2)!} \\ &\quad + \frac{2}{\pi^2} (1 - \cos \pi(z - 2n - 1)) \sum_{n \neq m \geq 0} \varphi(2m + 1) \left\{ \frac{1}{(z - 2m - 1)^2} - \frac{1}{(2m + 1)^2} \right\} \\ &= \varphi(2n + 1) + 2\varphi(2n + 1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{1}{(2k + 2)!} + \frac{1}{\pi^2 (2n + 1)^2 (2k)!} \right\} \pi^{2k} (z - 2n - 1)^{2k} \\ &\quad + \frac{2}{\pi^2} (1 - \cos \pi(z - 2n - 1)) \sum_{n \neq m \geq 0} \varphi(2m + 1) \left\{ \frac{1}{(z - 2m - 1)^2} - \frac{1}{(2m + 1)^2} \right\} \end{aligned}$$

である．ここで， $|t| \leq \frac{1}{3}$ の場合

$$|1 - \cos t| = \left| -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^{2k}}{(2k)!} \leq |t|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \leq \frac{12}{23} |t|^2$$

である，何故ならば

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^{k-2} &< \frac{1}{4!} \left(1 + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1}{(5 \cdot 6 \cdot 9)^2} + \frac{1}{(5 \cdot 6 \cdot 9)^3} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{24} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{270}}\right) = \frac{1}{24} \left(\frac{270}{269}\right) < \frac{1}{23} \end{aligned}$$

そして

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^{k-2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{9 \cdot 23} < \frac{12}{23}$$

であるから、したがって

$$|1 - \cos \pi(z - 2n - 1)| \leq \frac{12}{23} \pi^2 |z - 2n - 1|^2 \quad \left(|z - 2n - 1| < \frac{1}{3\pi} \right)$$

である。また、 $|z - 2n - 1| < \frac{1}{3\pi}$ 、すなわち、 $\pi^2 |z - 2n - 1|^2 < \frac{1}{9}$ の場合

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{1}{(2k+2)!} + \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2 (2k)!} \right\} \pi^{2k} (z - 2n - 1)^{2k} \right| \\ & \leq \pi^2 |z - 2n - 1|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2k+2)!} + \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2 (2k)!} \right\} \left(\frac{1}{9} \right)^{k-1} \\ & = \pi^2 |z - 2n - 1|^2 \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{9} \right)^{k-2} + \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{9} \right)^{k-1} \right\} \\ & \leq \pi^2 |z - 2n - 1|^2 \left\{ \frac{1}{23} + \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2} \cdot \frac{12}{23} \right\} \leq \frac{\pi^2 |z - 2n - 1|^2}{23} \left\{ 1 + \frac{12}{\pi^2 (2n+1)^2} \right\} \\ & < \begin{cases} \frac{1}{10} \pi^2 |z - 2n - 1|^2 & (n = 0) \\ \frac{1}{20} \pi^2 |z - 2n - 1|^2 & (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

つぎに、 $(n = 0)$ で $|z - 1| < \frac{1}{3\pi}$ の場合に

$$\left| \sum_{m \geq 1} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z - 2m - 1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \right| < \frac{\pi^2}{2}.$$

が成り立つことを示そう。まず、 $\varphi(1) = 1$ 、 $\varphi(2m+1) \leq 3m+2$ ($m = 1, 2, \dots$) に注意すると、

$$\frac{\varphi(2m+1)}{2m+1} \leq \frac{5}{3} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立っている。 $|z - 1| < \frac{1}{3\pi}$ のとき、 $0 < \operatorname{Re} z < 2$ であるから

$$2(2m+1) \geq |z - 2(2m+1)| \geq |z - 2m - 1| \geq 2m - 1 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

となることが容易にわかるので、

$$\begin{aligned} \left| \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z - 2m - 1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \right| & = \varphi(2m+1) \left| \frac{1}{(z - 2m - 1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right| \\ & \leq \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{|2(2m+1) - z|}{|z - 2m - 1|^2} \cdot |z| \\ & \leq \frac{\varphi(2m+1)}{2m+1} \cdot \frac{\left| 2 - \frac{z}{2m+1} \right|}{|z - 2m - 1|^2} \cdot |z| \\ & \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{(2m-1)^2} \cdot |z| = \frac{10}{3(2m-1)^2} \cdot |z| \end{aligned}$$

である。また、 $|z - 1| < \frac{1}{3\pi}$ の場合 $z < 1 + \frac{1}{3\pi} < \frac{10}{9}$ であるので、

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \geq 1} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \right| &\leq \sum_{m \geq 1} \frac{10}{3(2m-1)^2} \cdot |z| \leq \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{9} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{(2m-1)^2} \\ &\leq \frac{100}{27} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{25}{54} \pi^2 < \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

である．こうして $z = 1$ では $F(1) = \varphi(1) = 1$ であるから， $|z-1| < \frac{1}{3\pi}$ ，すなわち， $\pi|z-1| < \frac{1}{3}$ の場合

$$\begin{aligned} |F(z) - 1| &= \left| 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{1}{(2k+2)!} + \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2 (2k)!} \right\} \pi^{2k} (z-1)^{2k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi^2} (1 - \cos \pi(z-1)) \sum_{n \neq m \geq 0} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \right| \\ &\leq 2 \cdot \frac{1}{10} \pi^2 |z-1|^2 + \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{12}{23} \pi^2 |z-1|^2 \cdot \frac{\pi^2}{2} \\ &= \frac{83}{115} \cdot \pi^2 |z-1|^2 \leq \frac{83}{115} \cdot \frac{\pi}{3} |z-1| \\ &\leq \frac{4}{5} \cdot |z-1| \end{aligned}$$

が成り立つ．これは関数族 $\{F^k(z)\}_{k=0,1,\dots}$ が半径 $\frac{1}{3\pi}$ の開円板

$$D_1 = \left\{ z \mid |z-1| < \frac{1}{3\pi} \right\}$$

で一様有界で， $z = 0$ へ一様収束することを示している．関数族 $\{F^k(z)\}_{k=0,1,\dots}$ は開円板 D_1 で正規族で，開円板 D_1 は $F(z)$ は Fatou 集合に含まれる．

さて，1 より大きい正の奇数に対して，つぎの補題が証明できる．

補題． $z = 2n+1$ ($n = 1, 2, \dots$) の近くで， $|z-2n-1| < 1$ の場合にはつぎが成り立つ：

$$\left| \sum_{n \neq m \geq 0} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \right| < \frac{25(n+1)}{12} \pi^2.$$

証明．

$$\left| \sum_{0 \leq m < \frac{n}{2}} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \right| \leq \sum_{0 \leq m < \frac{n}{2}} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{|2(2m+1) - z|}{|z-2m-1|^2} \cdot |z|$$

である． $0 \leq m < \frac{n}{2}$ のとき，

$$\begin{cases} 2(2m+1) &\leq 2n < \operatorname{Re} z \\ 2m+1 &\leq 2n-2m-1 \leq |z-2m-1| \\ |z-2(2m+1)| &\leq |z-2m-1| \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{|2(2m+1)-z|}{|z-2m-1|^2} \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(2m+1)} \cdot \frac{1}{|z-2m-1|} \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2}. \\
\sum_{0 \leq m < \frac{n}{2}} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{|2(2m+1)-z|}{|z-2m-1|^2} \cdot |z| &\leq \sum_{0 \leq m < \frac{n}{2}} \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2} \cdot |z| \\
&\leq \frac{5|z|}{3} \cdot \sum_{m \leq 0} \frac{1}{(2m+1)^2} \leq \frac{5(2n+2)}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} \\
&\leq \frac{5(n+1)\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

$m \geq \frac{n}{2}$ (≥ 0) のとき,

$$\begin{cases} 2(2m+1) &\geq 2(n+1) = 2n+2 \\ 2(2m+1) - 2n &\geq |z - 2(2m+1)| \geq 2(2m+1) - 2n - 2 = 2(2m-n) \end{cases}$$

であるから,

$$2 > 2 - \frac{2n}{2m+1} \geq \left| \frac{z}{2m+1} - 2 \right| \geq \frac{2(2m-n)}{2m+1} \quad (m \geq \frac{n}{2} (\geq 0)).$$

さらに,

$$\begin{cases} |z - 2m - 1| &\geq 2m + 1 - 2n - 2 = 2(m - n) - 1 > 0 \quad (m > n) \\ |z - 2m - 1| &\geq 2n - 2m - 1 = 2(n - m) - 1 > 0 \quad (\frac{n}{2} \leq m < n) \end{cases}$$

となるから,

$$0 \leq \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{|2(2m+1)-z|}{|z-2m-1|^2} \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{|2 - \frac{z}{2m+1}|}{|z-2m-1|^2} \leq \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{|z-2m-1|^2} \quad (n \neq m \geq \frac{n}{2}).$$

従って,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n \neq m \geq \frac{n}{2}} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \right| \\
&< \sum_{\frac{n}{2} \leq m < n} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{|2(2m+1)-z|}{|z-2m-1|^2} \cdot |z| + \sum_{m > n} \frac{\varphi(2m+1)}{(2m+1)^2} \cdot \frac{|2(2m+1)-z|}{|z-2m-1|^2} \cdot |z| \\
&\leq \frac{10|z|}{3} \sum_{\frac{n}{2} \leq m < n} \frac{1}{|z-2m-1|^2} + \frac{10|z|}{3} \sum_{m > n} \frac{1}{|z-2m-1|^2} \\
&\leq \frac{10|z|}{3} \left\{ \sum_{\frac{n}{2} \leq m < n} \frac{1}{(2(n-m)-1)^2} + \sum_{m > n} \frac{1}{(2(m-n)-1)^2} \right\} \\
&\leq \frac{10|z|}{3} \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} \right) = \frac{5\pi^2|z|}{6} \leq \frac{5(n+1)\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

以上のことから,

$$\left| \sum_{n \neq m \geq 0} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \right| < \frac{5(n+1)\pi^2}{12} + \frac{5(n+1)\pi^2}{3} = \frac{25(n+1)}{12} \pi^2$$

が示された. □

さて, $F(2n+1) = \varphi(2n+1)$ であるから,
 $|z-2n-1| < \frac{1}{3\pi}$, すなわち, $\pi|z-2n-1| < \frac{1}{3}$ の場合

$$\begin{aligned} |F(z) - F(2n+1)| &= \left| 2\varphi(2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{1}{(2k+2)!} + \frac{1}{\pi^2(2n+1)^2(2k)!} \right\} \pi^{2k} (z-2n-1)^{2k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi^2} (1 - \cos \pi(z-2n-1)) \sum_{n \neq m \geq 0} \varphi(2m+1) \left\{ \frac{1}{(z-2m-1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2} \right\} \right| \\ &\leq 2\varphi(2n+1) \cdot \frac{1}{10} \pi^2 |z-2n-1|^2 + \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{12}{23} \pi^2 |z-2n-1|^2 \cdot \frac{25(n+1)}{12} \pi^2 \\ &= \left\{ \frac{3n+2}{5} + \frac{50(n+1)}{23} \right\} \pi^2 |z-2n-1|^2 \\ &\leq 3(n+1) \cdot \pi^2 |z-2n-1|^2 \end{aligned}$$

が成り立ち, 定理は証明される.

今, $(1 \leq) F(2n+1) \leq 3n+2$ に注意すれば, $|z-2n-1| < \frac{1}{4\pi^2(2n+1)}$ のときには,

$$3(n+1) \cdot \pi^2 \left(\frac{1}{4\pi^2(2n+1)} \right)^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{3(n+1)}{4(2n+1)^2} \leq \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{3n+2} \leq \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{F(2n+1)}$$

が成り立つ ($n=1, 2, \dots$) ことがわかるので,

$$|z-2n-1| < \frac{1}{4\pi^2(2n+1)} \implies |F(z) - F(2n+1)| < \frac{1}{4\pi^2 F(2n+1)} \quad \left(< \frac{1}{3\pi} \right)$$

となる. こうして $|z-2n-1| < \frac{1}{4\pi^2(2n+1)}$ のとき, 帰納的に

$$\begin{aligned} |F^2(z) - F^2(2n+1)| &< \frac{1}{4\pi^2 F^2(2n+1)} \quad \left(< \frac{1}{3\pi} \right) \\ &\vdots \\ |F^k(z) - F^k(2n+1)| &< \frac{1}{4\pi^2 F^k(2n+1)} \quad \left(< \frac{1}{3\pi} \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

が成り立つ. これは関数族 $\{F^k(z) - F^k(2n+1)\}_{k=0,1,\dots}$ が半径 $\frac{1}{4\pi^2(2n+1)}$ の開円板

$$D_n = \left\{ z \mid |z-2n-1| < \frac{1}{4\pi^2(2n+1)} \right\}$$

で一様有界で, Montel の定理により正規族となることを示している. 関数族 $\{F^k(z)\}_{k=0,1,\dots}$ が開円板 D_n で正規族であることが容易に導かれるので, 開円板 D_n は $F(z)$ は Fatou 集合に含まれることがわかる.

3.3 $F(z)$ の計算

関数 $F(z)$ の反復 $F(z), F^2(z), F^3(z), \dots, F^n(z)$ の複素数値の状況に基づいて, 複素数 z の点に色を (1.3 の決定法で) 塗ってビットマップを BMP ファイルへ作画する (Windows 上の Visual C++ を使う Win32_console_Applications としての) プログラムを考える.

始めに注意すべきことは, 正の整数 159487 は コラッツの奇数手続き 64 回目に 1 に到達する; 29 回目に 2548500407, 30 回目に 3822750611, 31 回目に 5734125917 となる. コラッツの奇数手続きを表現する関数 $\varphi(n)$ を大きい正の奇数 n に対して計算するためには多倍長計算法を使わざるを得ないが, ここでは, 関係する奇整数の大きさが 200,000,000 以下となるように制限して, $\varphi(n)$ の計算は C++ 言語における整数型 long int 型で行う.

さて, 閉長方形

$$\{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid |x| \leq 2000000, |y| \leq 2000\}$$

内で複素数値 $F(z)$ を計算できるように (可能ならば) 考えて, $z_0 = -0.037 \dots$ ($F(z)$ の吸引的不動点) と 0 や 1 を含む領域

$$\{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid |x| < 100, |y| < 10\}$$

内の長方形上で (複素数値 $F(z), F^2(z), F^3(z), \dots, F^n(z)$ に基づいて) $|F^n(z) - z_0|$, $|F^n(z) - 1|$ や $|\operatorname{Im} F^n(z)|$ の大きさによる層の図を描くことを考える.

複素数 z における関数値

$$F(z) = \frac{2}{\pi^2} (1 + \cos \pi z) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\}$$

を計算するために, 予め $\varphi(1), \varphi(3), \dots, \varphi(2k+1), \dots, \varphi(2,020,001)$ を求めておく.

まず, $\operatorname{Re} z < 0$ である複素数 z における関数値 $F(z) = \frac{2}{\pi^2} (1 + \cos \pi z) \cdot G(z)$ は

$$F_{\text{left}}(z) = \frac{2}{\pi^2} (1 + \cos \pi z) \cdot \sum_{k=0}^{\ell-1} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\}$$

で近似する, ここで $\ell (\gg 1)$ は適当な番号を選ぶ.

さて, 有理型関数

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\}$$

は極 $z = 2n+1$ ($n = 0, 1, \dots$) の近くでは, $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-2n-1| < 1\}$ で正則な関数

$$g(z) = -\frac{\phi(2n+1)}{(2n+1)^2} + \sum_{n \neq k \geq 0} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\}$$

によって,

$$G(z) = \frac{\varphi(2n+1)}{(z-2n-1)^2} + g(z)$$

と表される. $z = 2n+1$ の近くでは, $|z-2n-1| < \frac{1}{4\pi^2(2n+1)}$ のとき

$$\frac{2}{\pi^2} (1 + \cos \pi z) \cdot \frac{\varphi(2n+1)}{(z-2n-1)^2} = \frac{2}{\pi^2} (1 - \cos \pi(z-2n-1)) \cdot \frac{\varphi(2n+1)}{(z-2n-1)^2} \approx \varphi(2n+1)$$

であるから, 3.2 定理のおかげで, $D_n = \left\{ z \mid |z - 2n - 1| < \frac{1}{4\pi^2(2n+1)} \right\}$ 上では $F(z) \approx \varphi(2n+1)$ と考えてもよい ($\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(z)$ を追求しているから).

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{2}{\pi^2}(1 + \cos \pi z) \cdot G(z) \\ &= \frac{2}{\pi^2}\{1 - \cos \pi(z - 2n - 1)\} \cdot G(z) \\ &= \frac{2}{\pi^2}\{1 - \cos \pi(z - 2n - 1)\} \cdot G(z) \quad \left(|z - 2n - 1| \geq \frac{1}{4\pi^2(2n+1)} \right) \end{aligned}$$

を近似計算するために, 自然数 $\ell (> 1)$ を固定して自然数 $z = 2n + 1$ の近くで $G(z)$ を近似計算するつぎの関数 $g_n(z)$ を考えよう:

$$\left[\begin{aligned} g_n(z) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\} \\ &\quad + \sum_{k=n-\ell}^{n+\ell-1} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\} \quad (0 \leq 2\ell < n), \\ g_n(z) &= \sum_{k=0}^{n+\ell-1} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\} \quad (0 \leq n \leq 2\ell) \end{aligned} \right.$$

そして, $z = 2n + 1$ の周りで $F(z) = \frac{2}{\pi^2}(1 - \cos \pi(z - 2n - 1)) \cdot G(z)$ を近似計算する関数として

$$F_n(z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2}(1 - \cos \pi(z - 2n - 1)) \cdot g_n(z) & \left(|z - 2n - 1| \geq \frac{1}{4\pi^2(2n+1)} \right) \\ \varphi(2n+1) & \left(|z - 2n - 1| < \frac{1}{4\pi^2(2n+1)} \right) \end{cases}$$

を考える. これらの近似関数を通して計算しても, 正の奇数 $z = 2n + 1$ での $\{F^k(2n+1)\}_{k=1,2,\dots}$ の状況を見誤ることはない.

吸収的不動点 $z_0 = -0.037\dots$ の周りの直接鉢

$F(z)$ の吸収的不動点 $z_0 = -0.037\dots$ については, z_0 の周りのどんな開円板で

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^k(z) = z_0$$

が成り立つのかは計算できていない. とりあえず,

- ⎧ 複素数 z に対し, ある番号 n で $|F^n(z) - 1| < 0.1$ となるとき, 黄色を塗り,
- ⎧ 複素数 z に対し, ある番号 n で $|F^n(z) - z_0| < 0.001$ となるとき白色を塗る

という実験を行った: 画像作成プログラム 4.1 Cimage.cpp で $G(z)$ を近似計算している項数を $\ell = 10000$ に増やして作図した結果がつぎの図 CF1m10000xy_-0.150-0.825.bmp である.

この実験的計算から, z_0 を中心とする半径 0.01 の開円板上では

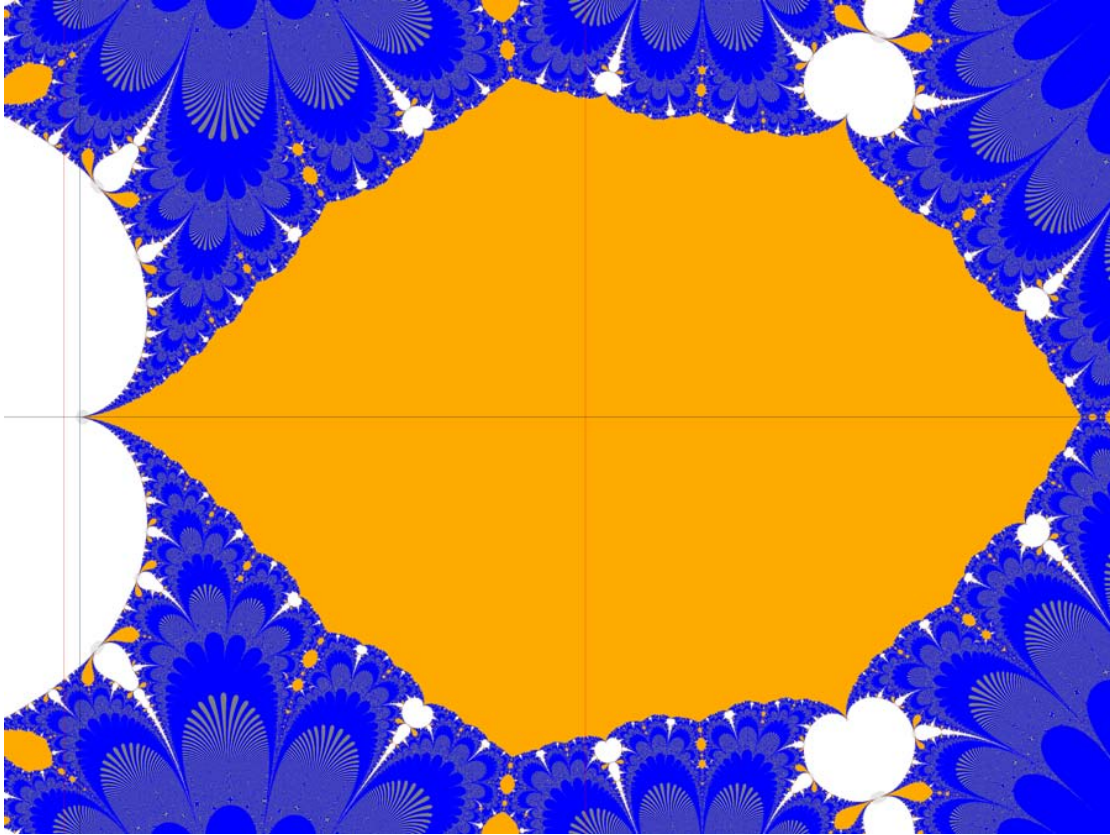
$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^k(z) = z_0$$

が成り立ち, また $z = 1$ を中心とする半径 0.2 の開円板上では

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^k(z) = 1$$

が成り立つといえるようである .

CFIm10000xy_-0.150-0.825.bmp : 3600 × 2700



$xp = yp = 0.00061111111$, $[-0.15, 2.05] \times [-0.825, 0.825]$, $F(z)$ の反復回数 ≤ 100

注意 . 上図には, xy 座標軸に加えて, $z = z_0$ および $z = 1$ を通る赤い直線をも描いている .

$G(z)$ に対する近似とその誤差

今, 有理型関数 $G(z)$ と有限和 $G_L(z) = \sum_{k=0}^{L-1} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\}$ の値の差

$$|G(z) - G_L(z)| = \left| \sum_{k=L}^{\infty} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\} \right|$$

について考えてみる .

$\operatorname{Re} z < 0$ である複素数 z に対しては,

$$\frac{\varphi(2k+1)}{|z-2k-1|} < \frac{\varphi(2k+1)}{2k+1} \leq \frac{5}{3}, \quad \frac{|2(2k+1)-z|}{|z-2k-1|} = \frac{|z-2(2k+1)|}{|z-(2k+1)|} < 1$$

より

$$\begin{aligned}
|G(z) - G_L(z)| &\leq \sum_{k=L}^{\infty} \varphi(2k+1) \left| \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right| \\
&= \sum_{k=L}^{\infty} \frac{\varphi(2k+1)}{|z-2k-1|^2} \cdot \frac{|2(2k+1)-z|}{(2k+1)^2} \cdot |z| \\
&= |z| \sum_{k=L}^{\infty} \frac{\varphi(2k+1)}{|z-2k-1|} \cdot \frac{|2(2k+1)-z|}{|z-2k-1|} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2} \\
&\leq \frac{5|z|}{3} \cdot \sum_{k=L}^{\infty} \leq \frac{5|z|}{3} \int_{L-1}^{\infty} \frac{dt}{(2t+1)^2} = \frac{5|z|}{3} \left[\frac{-1}{2(2t+1)} \right]_{t=L-1}^{\infty} \\
&= \frac{5|z|}{6(2L-1)}
\end{aligned}$$

が成り立っている。

$\operatorname{Re} z \geq 0$ である複素数 z に対しては,

$$\begin{aligned}
|G(z) - G_L(z)| &\leq \sum_{k=L}^{\infty} \varphi(2k+1) \left| \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right| \\
&= \sum_{k=L}^{\infty} \frac{\varphi(2k+1)}{(2k+1)^2} \cdot \frac{|2(2k+1)-z|}{|z-2k-1|^2} \cdot |z| \\
&= |z| \sum_{k=L}^{\infty} \frac{\varphi(2k+1)}{2k+1} \cdot \frac{1}{|z-2k-1|^2} \cdot \left| 2 - \frac{z}{2k+1} \right| \\
&\leq \frac{5|z|}{3} \cdot \sum_{k=L}^{\infty} \frac{1}{|z-2k-1|^2} \cdot \left| 2 - \frac{z}{2k+1} \right|
\end{aligned}$$

が成り立っている。

複素数 $z = x + iy$ がある正の整数 $c_0 \gg 3$ に関して条件

$$2n_0 \leq \operatorname{Re} z < 2n_0 + 2 \quad \text{かつ} \quad -c_0 \leq \operatorname{Im} z \leq c_0$$

を満たすときには, 番号 $l_0 > c_0$ と番号 $k = l_0 + n_0 + i \geq l_0 + n_0$ ($i \geq 0$) に対して

$$\begin{cases} \left| 2 - \frac{z}{2k+1} \right| = \sqrt{\left(2 - \frac{x}{2k+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{2k+1}\right)^2} < \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} < 3 \\ |z-2k-1|^2 \geq (2n_0+2-2k-1)^2 = (2l_0-1+2i)^2 \end{cases}$$

となるから, $L = l_0 + n_0$ に対して

$$\begin{aligned}
|G(z) - G_L(z)| &\leq 5|z| \cdot \sum_{k=L}^{\infty} \frac{1}{|z-2k-1|^2} \leq 5|z| \cdot \left\{ \frac{1}{(2l_0-1)^2} + \frac{1}{(2l_0+1)^2} + \cdots \right\} \\
&= 5|z| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2l_0-1+2i)^2} \\
&< 5|z| \cdot \int_{x=-1}^{\infty} \frac{1}{(2l_0-1+2t)^2} dt = \frac{5|z|}{2} \left[\frac{-1}{2l_0-1+2t} \right]_{t=-1}^{\infty} = \frac{5|z|}{2(2l_0-3)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に， $n_0 \leq 2l_0$ の場合， $g_{n_0}(z) = G_L(z)$ であるから

$$|G(z) - g_{n_0}(z)| < \frac{5|z|}{2(2l_0 - 3)}$$

である．

また， $n_0 > 2l_0$ ，すなわち， $n_0 - l_0 > l_0$ の場合，

$$\begin{cases} 2 - \frac{x}{2l_0 + 1} = \frac{4l_0 + 2 - x}{2l_0 + 1} \\ -2n_0 < 4l_0 + 2 - 2n_0 - 2 < 4l_0 + 2 - x \leq 4l_0 + 2 - 2n_0 = 2(2l_0 - n_0 + 1) \leq 0 \end{cases}$$

であるから，番号 $k = l_0 + i \geq l_0$ ($i \geq 0$) に対して

$$\begin{aligned} \left| 2 - \frac{z}{2k+1} \right| &\leq \left| 2 - \frac{x}{2k+1} \right| + \frac{|y|}{2k+1} \leq \left| 2 - \frac{x}{2k+1} \right| + \frac{c_0}{2k+1} \\ &< \frac{2n_0}{2l_0+1} + \frac{c_0}{2l_0+1} < \frac{3n_0}{2l_0+1}. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{k=l_0}^{n_0-l_0-1} \varphi(2k+1) \left| \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right| \\ &= |z| \sum_{k=l_0}^{n_0-l_0-1} \frac{\varphi(2k+1)}{2k+1} \cdot \frac{1}{|z-2k-1|^2} \cdot \left| 2 - \frac{z}{2k+1} \right| \\ &\leq \frac{5|z|}{3} \cdot \sum_{k=l_0}^{n_0-l_0-1} \frac{1}{|z-2k-1|^2} \cdot \frac{3n_0}{2l_0+1} \\ &\leq \frac{5n_0|z|}{2l_0+1} \cdot \sum_{i=0}^{n_0-2l_0-1} \frac{1}{(2n_0-2l_0-1-2i)^2} \\ &< \frac{5n_0|z|}{2l_0+1} \cdot \int_{x=1}^{n_0-2l_0} \frac{1}{(2n_0-2l_0-1-2x)^2} dx \\ &= \frac{5n_0|z|}{2(2l_0+1)} \left\{ \frac{1}{2l_0-1} - \frac{1}{2n_0-2l_0-3} \right\} < \frac{5n_0|z|}{2(2l_0+1)(2l_0-1)}. \end{aligned}$$

特に， $n_0 > 2l_0$ の場合， $L = l_0 + n_0$ に対して

$$g_{n_0}(z) = G_L(z) - \sum_{k=l_0}^{n_0-l_0-1} \varphi(2k+1) \left\{ \frac{1}{(z-2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\}$$

であるから

$$\begin{aligned} |G(z) - g_{n_0}(z)| &\leq |G(z) - G_L(z)| + \Lambda \\ &\leq \frac{5|z|}{2(2l_0-3)} + \frac{5n_0|z|}{2(2l_0+1)(2l_0-1)} \\ &= \frac{5|z|}{2} \left\{ \frac{1}{2l_0-3} + \frac{n_0}{2(2l_0+1)(2l_0-1)} \right\}. \end{aligned}$$

が成り立つ．

第4章 画像の作成

4.1 描画プログラム Cimage.cpp

関数 $F(z)$ を計算するため C++ コードを書いた .
xbound = 1010000 個の奇整数 $\varphi(2n+1)$ ($n = 0, 1, \dots, \text{xbound}-1$) を入れる配列 long am[xbound] を準備し, long double caf(long, long[]) で予め計算しておく .
コード dLcomplex f3z(dLcomplex, long, long, double, long []) は, 倍精度浮動小数点複素数型 typedef complex <double >dLcomplex を使って, 複素数 z の実部 $\text{Re } z < 2 \times \text{xbound}$ の時に $F(z)$ を計算する . コード dLcomplex f5z(dLcomplex, long, long, double, long []) は, 複素数 z の実部 $\text{Re } z \geq 2 \times \text{xbound}$ の時に $F(z)$ を計算する .

これらを使って, 関数 $F(z)$ の反復 $F(z), F^2(z), F^3(z), \dots, F^n(z)$ の複素数値の状況に基づいて, 複素数 z の点に色を (1.3 の決定法で) 塗って作図するプログラム Cimage.cpp を書いた (Visual C++ Win32_console.Application として) .

```
// Cimage.cpp
// chg0=abs(z2-(dLcomplex)1.0); if(chg0<0.2)
// chg1=abs(z2+(dLcomplex)0.03271); if(chg1<0.01)
// myCanvas = blue, if( y>200 || y<-200 )
// 座標軸の追加
#include <stdio.h>
#include <windows.h>
#include <math.h>
#include <complex>

using namespace std;

#define WIDTH 3200
#define HEIGHT 2400

typedef struct RGB
{
    BYTE red, green, blue;
} RGB;

RGB myCanvas[WIDTH][HEIGHT];

typedef complex<long double> dLcomplex; // 倍精度浮動小数点複素数型

const dLcomplex Limunit = dLcomplex(0.0, 1.0); // 虚数単位
const dLcomplex Lunit = dLcomplex(1.0, 0.0);
const dLcomplex Lzero = dLcomplex(0.0, 0.0);

const dLcomplex f2 = dLcomplex (0.20264236728467554289, 0.0); // 2.0/(pi*pi);
```

```

const long double pi=3.14159265358979323846264338327950288419716939937510;
const long double xbd =200000000.00;
const long xbound = 10020021; // 1000000+2*lm+2
const long xbound2 = 20000001;

long am[xbound];

dLcomplex f3z( dLcomplex, long, long double, long []);
dLcomplex f5z( dLcomplex, long, long double, long []);
long double caf( long, long, long []);
long scaf( long);

void InitBitmapFileHeader(BITMAPFILEHEADER *fileHeader, int width, int height);
void InitBitmapInfoHeader(BITMAPINFOHEADER *infoHeader, int width, int height);
void InitBitmapHeader(BITMAPFILEHEADER *fileHeader, BITMAPINFOHEADER
*infoHeader, int width, int height);
void WriteBitmapHeader(FILE *fp, BITMAPFILEHEADER fileHeader, BITMAPINFOHEADER infoHeader);
void WriteBitmapLine(FILE *fp, RGB *rgb, int width);

void main()
{
    RGB rgb[WIDTH];
    BITMAPFILEHEADER fileHeader;
    BITMAPINFOHEADER infoHeader;

    FILE *fp;

    if ((fp = fopen("outPut.bmp", "wb")) == NULL) {
        printf("file open error!!\n");
        exit(2); /* エラーの場合は通常、異常終了する */
    }
    else
        printf("The file 'outPut.bmp' was opened\n");

    InitBitmapHeader(&fileHeader, &infoHeader, WIDTH, HEIGHT); // ヘッダを作成

    WriteBitmapHeader(fp, fileHeader, infoHeader); // ヘッダを出力

    int counter=0, column=0, n;
    long lm=10001, nt=1001;
    long double chg0=0.0, chg1=0.0, gs, x, y;

    // ビットマップデータ
    // C0xy_-4.00-1.50 : xp=0.0025, yp=0.0025, x0=-4.00, y0=-1.50;
    // WIDTH=3200 HEIGHT=2400

    long double xp=0.0025, yp=0.0025, x0=-4.00, y0=-1.50;

    dLcomplex z, z0, z1, z2;

    gs=caf(xbound, lm, am);
    z0 = (dLcomplex) x0+Limunit*(dLcomplex) y0;

    //Color of BackGround
    for (column = 0; column < HEIGHT; column++){
        for (counter = 0; counter < WIDTH; counter++)
            {

```

```

        myCanvas[counter][column].red = 230;
        myCanvas[counter][column].green = 230;
        myCanvas[counter][column].blue = 230;
    }
};

// F(z) の計算をして、要素の値をセットする

printf("\n DETA 計算中  \n");

//Data 取得
for (column = 0; column < HEIGHT; column++){
    printf("DETA  column = %d\n", column);

    z1=z0;
    x=real(z);

    for (counter = 0; counter < WIDTH; counter++)
    {
        z=z1;

        for(n=1; n<=nt; n++) { // x=real(z);
            if(x>xbound2) {
                z2=f5z( z, lm, gs, am);
            }
            else{ z2=f3z( z, lm, gs, am);
            }

            x=real(z2);
            y=imag(z2);

            if (x>xbd) {
                myCanvas[counter][column].red = 128;
                myCanvas[counter][column].green = 128;
                myCanvas[counter][column].blue = 128;
                break;
            };

            if( y>200 || y<-200 )
            {
                myCanvas[counter][column].red = 0;
                myCanvas[counter][column].green = 0;
                myCanvas[counter][column].blue = 255;
                break;
            };

            chg0=abs(z2-(dLcomplex)1.0);
            if(chg0<0.2) { myCanvas[counter][column].red = 255;
                myCanvas[counter][column].green = 170;
                myCanvas[counter][column].blue = 0;
                break;
            };

            chg1=abs(z2+(dLcomplex)0.0327);
            if(chg1<0.01) { myCanvas[counter][column].red = 255;
                myCanvas[counter][column].green = 255;
                myCanvas[counter][column].blue = 255;
                break;
            };
        }
    }
};

```



```

        z=z2;
    }
    z1 = z1+(dLcomplex) xp;
}
z0 = z0+(dLcomplex) Limunit*yp;
}

////////////////////////////////////
//座標軸Delta C0xy_-4.00-1.50
for (counter = 0; counter < WIDTH; counter++){
    myCanvas[counter][600].red = 0;
    myCanvas[counter][600].green = 0;
    myCanvas[counter][600].blue = 0;
};
for (column = 0; column < HEIGHT; column++){
    myCanvas[1600][column].red = 0;
    myCanvas[1600][column].green = 0;
    myCanvas[1600][column].blue = 0;
};

////////////////////////////////////

printf("\n 描 画 中  ");
for (column = 0; column < HEIGHT; column++){
    for (counter = 0; counter < WIDTH; counter++){
        rgb[counter].red = myCanvas[counter][column].red;
        rgb[counter].green = myCanvas[counter][column].green;
        rgb[counter].blue = myCanvas[counter][column].blue;
    }
    WriteBitmapLine(fp, rgb, WIDTH); // 1行分出力
}
fclose(fp);
printf("\n 描 画 終 了  ");
return;
}

// dLcomplex f5z( dLcomplex, long, llong double, long []);
dLcomplex f5z( dLcomplex zz, long mm, long double gt, long am[])
{
/* Real(z) >= xbound2 = 2000000 のとき (am[xbound] 不足), F(z) を計算する:

```

$$F(z) = (2/\pi^2)(1 + \cos \pi z) \sum_k \varphi(2k+1) \{1/(z-2k-1)^2 - 1/(2k+1)^2\} \quad (k \geq 0).$$

$$G = \sum_k \varphi(2k+1) \{1/(z-2k-1)^2 - 1/(2k+1)^2\} \quad (k \geq 0)$$

$$F(z) \sim \varphi(2*lp+1), \quad \text{if } (av < cv).$$

$$F(z) = (2/\pi^2)(1 - \cos(\pi(z-2p-1))) * G, \quad \text{if } (av \geq cv).$$

$$mm : \sum_k \text{の項数} (= lm)$$

*/

```

long lp=0, n, lc;
long double av, cv, x, xint;

// const dLcomplex f2 = dLcomplex (0.20264236728467554289, 0.0);
// f2=(dLcomplex) 2.0/(pi*pi);

dLcomplex ap, f(0.0, 0.0), g(0.0, 0.0),
g1, g11, g12, g13, g2, g21, g22, g3,
h(0.0, 0.0), hc, z;

z=zz;

x=real(z);

modf( x/2, &xint);

lp=( long) xint; // lp > xbound = 10000011;

// cv=(long double) 0.0084/(2*(long double) lp + 1.0); // 1/(12*pi^2) < 0.0084...

cv=(long double) 0.025/(2*(long double) lp + 1.0);
// 1/(4*pi^2) = 0.025330329591...

h = z - (dLcomplex) 2.0*xint - (dLcomplex) 1.0;
av=abs(h);

if( av<cv){ // z は 2*lp+1 を含む Fatou成分 に含まれている .
ap=(dLcomplex) scaf(lp);
f=ap;
}
else{ // av >= cv
hc=(dLcomplex) 1.0 - cos((dLcomplex) pi*h); // hc = 1+cos( z)

// lp > 2*mm, i.e., lp-mm > mm
g=(dLcomplex) -gt;
g1=z+(dLcomplex) 1.0;
g2=-1.0;

for (n=0;n<mm;n++){ // \sum_{k=0}^{mm}
g1=g1-(dLcomplex) 2.0; // g1=z-2*n-1
g11=(dLcomplex) 1.0/g1; // g11=1/(z-2*n-1)
g12=g11*g11; // g12=1/(z-2*n-1)^2

g = g + (dLcomplex) am[n]*g12;
};

```

```

lc=lp-mm; // lc=max(mm+1, lp-mm);
g2= (dLcomplex) 2.0*(dLcomplex) lc-(dLcomplex) 1.0;
g1=z-g2;

for (n=lc ; n<lp+mm; n++){ // \sum_{k=lc}^{lp+mm}
    g1=g1-(dLcomplex) 2.0; // g1=z-2*n-1
    g11=(dLcomplex) 1.0/g1; // g11=1/(z-2*n-1)
    g12=g11*g11; // g12=1/(z-2*n-1)^2

    g2=g2+(dLcomplex) 2.0; // g2=2*n+1
    g21=(dLcomplex) 1.0/g2;
    g22=g21*g21;

    g3=g12-g22;
    g = g + (dLcomplex) scaf(n)*g3;
};

// hc=1.0-cos( pi*h) = 1 - cos( (z-2*lp-1)) = 1 + cos( z)
f=f2*hc*g; // f=f(z) , f2=(dcomplex) 2.0/(pi*pi);
};

return f;
}

```

```

// dLcomplex f3z( dLcomplex, long, long double, long []);
dLcomplex f3z( dLcomplex zz, long mm, long double gt, long am[])
{

```

/* Real(z) < xbound2 = 2000000 のとき (am[xbound] 使用可能) , F(z) を計算する :

$$F(z) = (2/\pi^2)(1 + \cos \pi z) \sum_k \varphi(2k+1) \{1/(z-2k-1)^2 - 1/(2k+1)^2\} \quad (k \geq 0).$$

$$G = \sum_k \varphi(2k+1) \{1/(z-2k-1)^2 - 1/(2k+1)^2\} \quad (k \geq 0)$$

$$F(z) \sim \varphi(2*lp+1), \quad \text{if } (av < cv).$$

$$F(z) = (2/\pi^2)(1 - \cos(\pi(z-2p-1))) * G, \quad \text{if } (av \geq cv).$$

$$mm : \sum_k \text{の項数} (= lm)$$

*/

```

long lp=0, n, lc;
long double av, cv, x, xint;

// const dLcomplex f2 = dcomplex (0.20264236728467554289, 0.0);
// f2=(dcomplex) 2.0/(pi*pi);

dLcomplex ap, f(0.0, 0.0), g(0.0, 0.0),
    g1, g11, g12, g13, g2, g21, g22, g3,
    h(0.0, 0.0), hc, z;

z=zz;
x=real(z);
modf( x/2, &xint);

```

```

lp=( long) xint; // lp < xbound = 1000011;

g=0;
g1=z+(dLcomplex) 1.0;
g2=-1.0;

if( lp<0) { // x < 0
    g=(dLcomplex) -gt;

    for(n=0;n<mm;n++){ // \sum_{k=0}^{mm}
        g1=g1-(dLcomplex) 2.0; // g1=z-2*n-1
        g11=(dLcomplex) 1.0/g1; // g11=1/(z-2*n-1)
        g12=g11*g11; // g12=1/(z-2*n-1)^2

        g = g + (dLcomplex) am[n]*g12;
    };
    // g = n{1/(z-2n-1)^2 - 1/(2n+1)^2}

    f=f2*hc*g; // f=f(z) , f2=(dcomplex) 2.0/(pi*pi);
}
else { // 0 <= x ( < 2*xbd=2004000 )
    av=abs(h);
    // cv=(long double) 0.0084/(2*(long double) lp + 1.0); // 1/(12*pi^2) < 0.0084

    cv=(long double) 0.025/(2*(long double) lp + 1.0);
    // 1/(4*pi^2) = 0.025330329591... > 0.025

    if( av<cv){ // z は 2*lp+1 を含む Fatou成分 に含まれている .
        ap=(dLcomplex) am[lp];
        f=ap;
    }
    else{ // av >= cv

        if( lp<2*mm )
        {
            g1=z+(dLcomplex) 1.0;
            g2=-1.0;
            g=(dLcomplex) -gt;

            for(n=0;n<mm;n++){ // \sum_{k=0}^{mm-1}
                g1=g1-(dLcomplex) 2.0; // g1=z-2*n-1
                g11=(dLcomplex) 1.0/g1; // g11=1/(z-2*n-1)
                g12=g11*g11; // g12=1/(z-2*n-1)^2

                g = g + (dLcomplex) am[n]*g12;
            };

            g2= (dLcomplex) 2.0*(dLcomplex) mm-(dLcomplex) 1.0;
            g1=z-g2;
            for(n=mm;n<lp+mm;n++){ // \sum_{k=mm}^{lp+mm-1}

                g1=g1-(dLcomplex) 2.0; // g1=z-2*n-1
                g11=(dLcomplex) 1.0/g1; // g11=1/(z-2*n-1)
                g12=g11*g11; // g12=1/(z-2*n-1)^2

                g2=g2+(dLcomplex) 2.0; // g2=2*n+1
                g21=(dLcomplex) 1.0/g2;
            };
        }
    }
}

```



```

        g22=g21*g21;

        g3=g12-g22;
        g = g + (dLcomplex) am[n]*g3;
    };
}
else { // lp => 2*mm, i.e., lp-mm => mm

    g1=z+(dLcomplex) 1.0;
    g2=-1.0;
    g=(dLcomplex) -gt;

    for (n=0;n<mm;n++){ // \sum_{k=0}^{mm}

        g1=g1-(dLcomplex) 2.0; // g1=z-2*n-1
        g11=(dLcomplex) 1.0/g1; // g11=1/(z-2*n-1)
        g12=g11*g11; // g12=1/(z-2*n-1)^2

        g = g + (dLcomplex) am[n]*g12;
    };

    lc=lp-mm; // lc=max(mm, lp-mm);

    g2= (dLcomplex) 2.0*(dLcomplex) lc-(dLcomplex) 1.0;
    g1=z-g2;

    for (n=lc;n<lp+mm;n++){ // \sum_{k=lc}^{lp+mm}

        g1=g1-(dLcomplex) 2.0; // g1=z-2*n-1
        g11=(dLcomplex) 1.0/g1; // g11=1/(z-2*n-1)
        g12=g11*g11; // g12=1/(z-2*n-1)^2

        g2=g2+(dLcomplex) 2.0; // g2=2*n+1
        g21=(dLcomplex) 1.0/g2;
        g22=g21*g21;

        g3=g12-g22;
        g = g + (dLcomplex) am[n]*g3;
    };

};

// hc=1.0-cos( pi*h) = 1 - cos( (z-2*lp-1)) = 1 + cos( z)
f=f2*hc*g; // f=f(z) , f2=(dcomplex) 2.0/(pi*pi);
};
return f;
}

```

```

// long double caf( long xe, long mm, long am[])
long double caf( long xe, long mm, long am[])
{
    /*  $\varphi(2n+1)$  ( $0 \leq xe = xbound$ ) を計算し配列に入れる ,
        $\sum_k \varphi(2n+1)/(2n+1)^2$  ( $0 \leq n < mm$ ) を計算する . ( $mm = lm$ ) */

    long q, n;
    long double a, g=0.0, g2, g21, g22;

    for (n=0;n<xe;n++){
        q=6*n+4;
        do {
            q>>=1;
        } while ( !(q & 1)); // q = am(n);

        am[n]=q;
    };

    g2=-1.0;
    for (n=0;n<mm;n++){
        a=(long double) am[n];
        g2=g2+2.0; // g2=2*n+1
        g21=1.0/g2; // g21=1/(2*n+1)
        g22=g21*g21; // g22=1/(2*n+1)^2
        g = g + a*g22;
    };
    return g;
}

// long scaf( long p)
long scaf( long p)
{
    /*  $\varphi(2p+1)$  を計算する . ( $p$  odd) */

    long q;
    q=3*p+1;
    do {
        q>>=1;
    } while ( !(q & 1));

    return q; // q = \varphi(p)
}

```

```

// BITMAPFILEHEADERを引数で初期化
void InitBitmapFileHeader(BITMAPFILEHEADER *fileHeader, int width, int height)
{
    int headerSize = sizeof(BITMAPFILEHEADER) + sizeof(BITMAPINFOHEADER);
    // BITMAPINFOHEADERと共に使用

    fileHeader->bfType      = 'B' + 'M' * 0x100;
    fileHeader->bfSize      = width * height * 3 + headerSize;
    fileHeader->bfReserved1 = fileHeader->bfReserved2 = 0;
    fileHeader->bfOffBits   = headerSize;
}

// BITMAPINFOHEADERを引数で初期化
void InitBitmapInfoHeader(BITMAPINFOHEADER *infoHeader, int width, int height)
{
    memset(infoHeader, 0, sizeof(BITMAPINFOHEADER));
    infoHeader->biSize      = 40;
    infoHeader->biWidth     = width;
    infoHeader->biHeight    = height;
    infoHeader->biPlanes   = 1;
    infoHeader->biBitCount  = 32; // true color(4byte)
}

// BITMAPFILEHEADERとBITMAPINFOHEADERを引数で初期化
void InitBitmapHeader(BITMAPFILEHEADER *fileHeader, BITMAPINFOHEADER *infoHeader,
    int width, int height)
{
    InitBitmapFileHeader(fileHeader, width, height);
    InitBitmapInfoHeader(infoHeader, width, height);
}

// ビットマップヘッダをファイルに書き出す
void WriteBitmapHeader(FILE *fp, BITMAPFILEHEADER fileHeader, BITMAPINFOHEADER infoHeader)
{
    fwrite(&fileHeader, sizeof(BITMAPFILEHEADER), 1, fp);
    fwrite(&infoHeader, sizeof(BITMAPINFOHEADER), 1, fp);
}

// 一行分のRGBデータをファイルに出力
void WriteBitmapLine(FILE *fp, RGB *rgb, int width)
{
    int counter;
    BYTE padding = 0;

    for (counter = 0; counter < width; counter++)
    {
        fwrite(&rgb[counter].blue, sizeof(BYTE), 1, fp);
        fwrite(&rgb[counter].green, sizeof(BYTE), 1, fp);
        fwrite(&rgb[counter].red, sizeof(BYTE), 1, fp);
        fwrite(&padding, sizeof(BYTE), 1, fp);
    }
}

```

関連図書

- [1] Marc Chamberland: A Dynamical Systems Approach to the $3x+1$ Problem, Proceedings of International Conference on the Collatz Problem and Related Topics 1999, Ed. M. Chamberland.
- [2] J. C. Lagarias: The $3x+1$ Problem and its Generalizations, Amer. Math. Monthly 92(1985), 3-23.
- [3] J. C. Lagarias: The $3x + 1$ Problem: An Annotated Bibliography (1963-1999), arXiv:math/0309224v12 [math.NT] 3 Aug 2009.
- [4] J. W. Sander: On the $(3N + 1)$ -conjecture, Acta Arithmetica LV, 241-248, 1990.
- [5] Toshio Urata, Some Holomorphic Functions connected with the Collatz Problem, Bull. Aichi University of Education, 51(Natural Science) 2002, 13-16.
- [6] Toshio Urata, The Collatz Problem over the 2-adic Integers, Bull. Aichi University of Education, 52(Natural Science) 2003, 5-11.
- [7] Toshio Urata and Kazuhiro Hamada, Positive Values of a Holomorphic Function connected with the Collatz Problem, Bull. Aichi University of Education, 54(Natural Science) 2005, 1-10.
- [8] Toshio Urata, Negative Values of a Holomorphic Function connected with the Collatz Problem, Bull. Aichi University of Education, 60(Natural Science) 2011, 1-10.
- [9] Toshio Urata, Cesàro Means Arising from Iteration of the Speeded-up Collatz Function, Bull. Aichi University of Education, 62(Natural Science) 2013, 61-63.
- [10] 浦田敏夫・鈴木克文：Collatz の問題，愛知教育大学数学教育学会誌 イブシロン，38(1996)，123-131．
- [11] 浦田敏夫：コラッツの問題，[改訂版原稿 (2013 年 3 月 6 日)]
https://dl.dropboxusercontent.com/u/87057655/collatz-problem_13.pdf
- [12] G. J. Wirsching: The Dynamical System Generated by the $3n+1$ Function, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1681, Springer-Verlag, 1998.

索引

あ ん

$F(z)$	5,8,37,39,44
$F(z)$ の反復回数 n	8
$F'(0)$	7
$G(z)$	5,44
関数 $F(z)$ の (反復) 合成	7
関数 $\varphi(x)$	2
関数 $\varphi(x)$ の反復	2
吸引的不動点	8,38
コラッツ Lothar Collatz	1
コラッツの奇数手続き	2
コラッツの手続き	1
コラッツの問題	1
コラッツの予想	1
超吸引的不動点	8
反発的不動点	8
複素数の平面 \mathbb{C}	5
不動点	6,8,37

A-Z

Collatz の問題から生じた **模様**
(PATTERNS arising from the Collatz Problem)

初 版 2013 年 6 月 29 日

著 者 浦田敏夫

印刷所

発 行

PATTERNS arising from the Collatz Problem